
WYBRANE PROBLEMY INŻYNIERSKIE

ZESZYTY NAUKOWE
INSTYTUTU AUTOMATYZACJI PROCESÓW TECHNOLOGICZNYCH
I ZINTEGROWANYCH SYSTEMÓW WYTWARZANIA

MODELOWANIE DRGAJĄCYCH UKŁADÓW MECHATRONICZNYCH ZAWIERAJĄCYCH MATERIAŁY PIEZOELEKTRYCZNE

Andrzej Buchacz¹, Marek Placzek²

Instytut Automatykacji Procesów Technologicznych i Zintegrowanych Systemów Wytwarzania, Wydział
Mechaniczny Technologiczny, Politechnika Śląska,
ul. Konarskiego 18A, 44-100 Gliwice.
¹andrzej.buchacz@polsl.pl, ²marek.placzek@polsl.pl

Streszczenie: W pracy przedstawiono modelowanie i badanie jednowymiarowych, drgających układów mechatronicznych, opisanych dyskretno - ciągłymi modelami matematycznymi, różniącymi się stopniem uproszczenia układu rzeczywistego. Analizując układ mechatroniczny, posłużono się przybliżoną metodą Galerkina, której dokładność uprzednio zweryfikowano, badając układ mechaniczny (pozbawiony przetwornika piezoelektrycznego). Rozpatrywano układ mechatroniczny w postaci drgającej giętnej belki wspornikowej z piezoelektrycznym, szerokopasmowym tłumikiem drgań.

1. Wstęp

Modelowanie drgających układów mechatronicznych, coraz szerzej stosowanych w różnych dziedzinach techniki, w tym również w celu kontroli i stabilizacji drgań, jest procesem złożonym i pracochłonnym. Wyznaczenie charakterystyk układów wymaga stosowania złożonych modeli i zaawansowanego aparatu matematycznego, co często powoduje konieczność wprowadzania znacznych uproszczeń i pominięcia w obliczeniach elementów o pozornie niewielkim wpływie. Przykładem takiego postępowania jest pomijanie wpływu warstwy pośredniczącej pomiędzy przetwornikiem piezoelektrycznym a układem mechanicznym, której właściwości w znacznym stopniu wpływają na charakterystyki dynamiczne układu, a tym samym na skuteczność kontroli i stabilizacji drgań [1-3,8,9].

W pracy poruszono zagadnienia aplikacji materiałów piezoelektrycznych w celu pasywnej redukcji drgań układów mechanicznych. Ideę tę opracował i zweryfikował R. L. Forwad [4]. Jako pierwsi model analityczny tego typu układów opracowali N. W. Hagood oraz A. von Flotow [5,6]. Autorzy wykazali, że możliwa jest redukcja drgań układu poprzez zamianę energii mechanicznej na elektryczną w przetworniku piezoelektrycznym i rozproszenie jej przez pasywny obwód elektryczny. Hagood i von Flotow opisali dwa przypadki pasywnej redukcji drgań – szerokopasmowy, bocznikowy tłumik drgań, gdzie energia elektryczna rozpraszana jest na rezystorze oraz tłumik wąskopasmowy, w którym pasywny obwód elektryczny utworzono przez połączenie rezystora i cewki indukcyjnej. Obecnie stosowane są różne metody redukcji drgań, między innymi w sprzęcie sportowym produkowanym przez firmę ACX [10].

W niniejszej pracy zamodelowano układ z szerokopasmowym tłumikiem drgań, który opisano matematycznym modelem dyskretno – ciągłym. Celem było wskazanie modelu matematycznego odpowiedniego do opisu drgających układów mechatronicznych z uwzględnieniem wszystkich parametrów, mających wpływ na ich charakterystykę

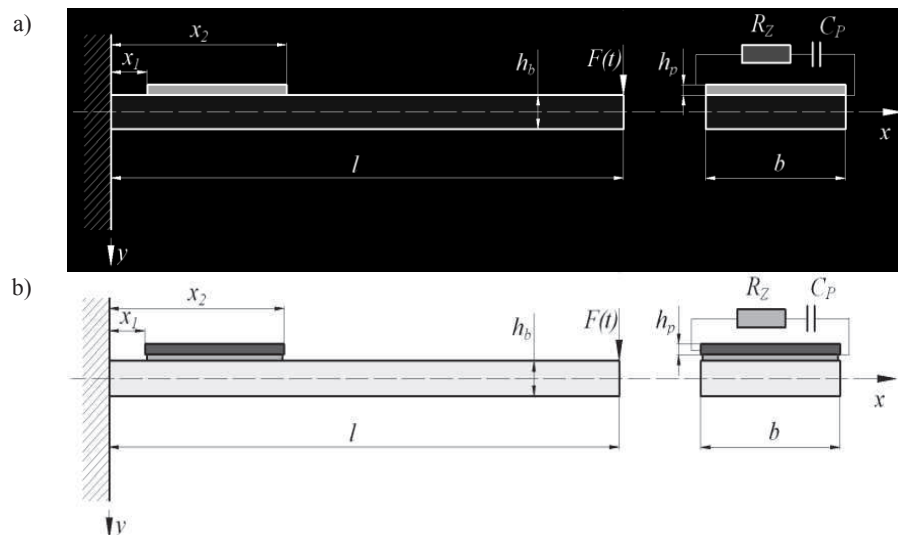
dynamiczną, przy jednoczesnym maksymalnym uproszczeniu złożoności i czasochłonności przeprowadzanych obliczeń.

2. Rozpatrywany układ

Analizowanym układem mechatronicznym jest drgający, jednowymiarowy układ ciągły w postaci belki wspornikowej o przekroju prostokątnym. Założono, że belkę wykonano z tworzywa o gęstości ρ_b , długość belki oznaczono symbolem l , szerokość symbolem b , a grubość h_b . Analizowany układ obciążony jest na swobodnym końcu siłą harmoniczną $F(t)$, działającą w kierunku prostopadłym do osi belki. Do górnej powierzchni belki, w odległości x_1 od miejsca utwierdzenia, przymocowany jest przetwornik piezoelektryczny o długości l_p , grubości h_p i szerokości równej szerokości belki. Układ mechatroniczny jest rozwinięciem układu mechanicznego - belki wspornikowej o identycznych parametrach geometrycznych i tworzywowych, pozbawionej przetwornika piezoelektrycznego.

W przypadku poszczególnych modeli matematycznych układu mechatronicznego zakładano idealne przytwierdzenie przetwornika piezoelektrycznego do powierzchni belki lub też zakładano, że przetwornik przytwierdzony jest za pośrednictwem warstwy kleju, która jest jednorodna i posiada jednakowe właściwości na całej długości. Grubość warstwy kleju oznaczono jako h_k , jej długość i szerokość odpowiada wymiarom przetwornika. Moduł sprężystości poprzecznej warstwy kleju oznaczono symbolem G .

Do zacisków przetwornika piezoelektrycznego dołączony jest zewnętrzny rezystor bocznikowy o rezystancji R_Z . Traktując siłę elektromotoryczną generowaną przez przetwornik piezoelektryczny oraz jego pojemność elektryczną jako gałąź szeregową, pod względem elektrycznym układ ten można traktować jako szeregowy obwód elektryczny typu RC z harmonicznym źródłem napięcia, generowanym przez przetwornik w wyniku odkształcenia powodowanego działaniem harmonicznej siły $F(t)$ [1-3,7]. Postać rozpatrywanego układu mechatronicznego pokazano na rys. 1.



Rys. 1. Postać analizowanego układu mechatronicznego: a) z założeniem idealnego przytwierdzenia przetwornika, b) z przetwornikiem piezoelektrycznym przytwierdzonym za pośrednictwem warstwy kleju

3. Model matematyczny układu oraz weryfikacja przybliżonej metody Galerkina

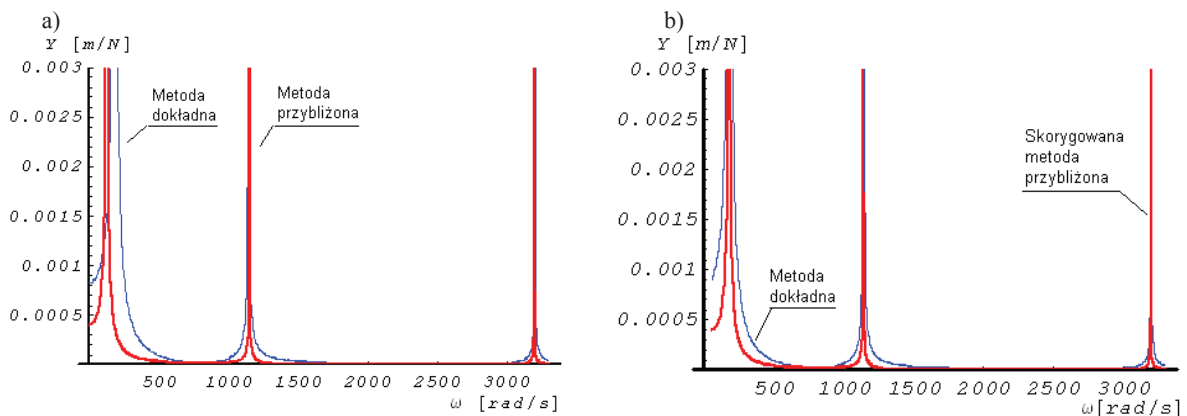
Dyskretno - ciągły model matematyczny układu otrzymano, wyznaczając równania ruchu belki oraz przetwornika piezoelektrycznego wraz z zewnętrznym obwodem elektrycznym. Równanie ruchu drgającej giętnie belki otrzymano, uwzględniając równowagę sił i momentów, działających na wycięty element belki i przetwornika o długości dx . Równanie przetwornika z dołączonym bocznikowym obwodem elektrycznym wyprowadzono, stosując metodę klasyczną analizy stanów nieustalonych liniowych obwodów elektrycznych, traktując przetwornik wraz z zewnętrznym obwodem elektrycznym, jako szeregowy obwód typu RC z wymuszeniem sinusoidalnym, którego źródłem jest przetwornik piezoelektryczny.

Podatność dynamiczną układu wyznaczono przybliżoną metodą Galerkina, w której założono rozwiązanie różniczkowego równania drgań giętych belki w postaci sumy funkcji własnych układu, odpowiednio zmiennej czasu i przemieszczenia:

$$y(x,t) = A \sum_{n=1}^{\infty} \sin \left[(2n-1) \frac{\pi}{2l} \cdot x \right] \cdot \cos(\omega t), \quad n = 1,2,3... \quad (1)$$

gdzie A oznacza amplitudę drgań belki.

Zakładane rozwiązanie różniczkowego równania ruchu spełnia jedynie dwa warunki brzegowe, którymi opisano odkształcenia drgającej belki w miejscu utwierdzenia oraz na jej swobodnym końcu. Metodę przybliżoną zweryfikowano pod względem dokładności otrzymywanych wyników, wyznaczając dwukrotnie podatność dynamiczną układu mechanicznego (belki pozbawionej przetwornika piezoelektrycznego): metodą dokładną rozdzielenia zmiennych Fouriera oraz metodą przybliżoną. Postępowanie takie miało na celu ocenę słuszności stosowania tej metody do analizy układów mechatronicznych, ze względu na brak możliwości zastosowania w ich przypadku metody dokładnej. Rozbieżności wynikające z niedokładności metody przybliżonej zniwelowano, uwzględniając w obliczeniach wartości $\Delta\omega_n$ przesunięć częstości drgań własnych, będących różnicą ich wartości wyznaczonych metodą dokładną oraz przybliżoną. Przebieg podatności dynamicznej układu mechanicznego wyznaczonej metodą dokładną oraz przybliżoną przedstawiono na rys. 2.



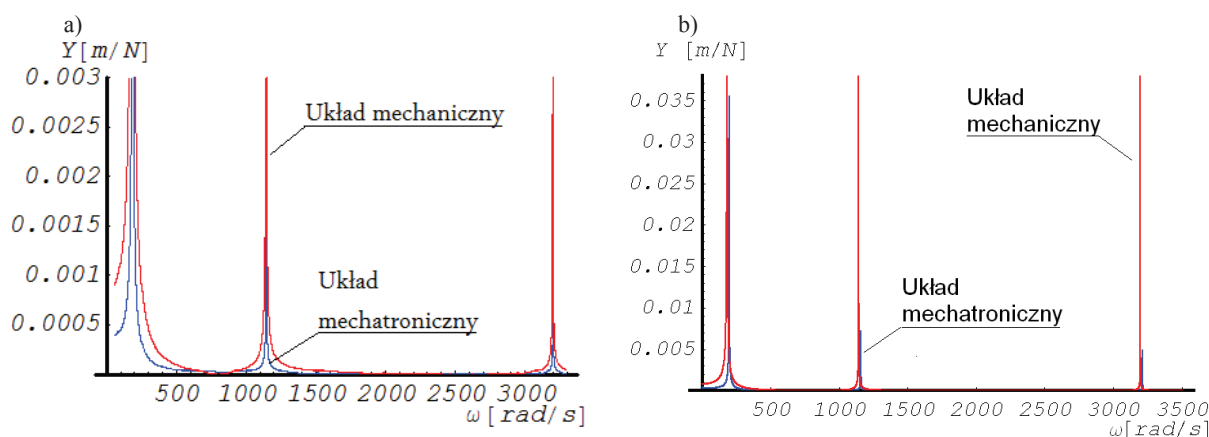
Rys.2. Podatność dynamiczna układu mechanicznego wyznaczona metodą dokładną i metodą przybliżoną (a) oraz skorygowaną metodą przybliżoną (b)

4. Wyniki analizy układu mechatronicznego

Skorygowaną metodę przybliżoną zastosowano do wyznaczenia podatności dynamicznej układu mechatronicznego zgodnie z zależnością:

$$y(x,t) = Y \cdot F_0 \cos(\omega t), \quad (2)$$

gdzie jako Y oznaczono podatność dynamiczną układu, natomiast iloczynem $F_0 \cdot \cos(\omega t)$ opisano siłę harmoniczną obciążającą układ. Podatność dynamiczną układu wyznaczono na swobodnym końcu belki ($x=l$), przy trzech pierwszych częstościach drgań ($n=1,2,3$), a uzyskane przebiegi przedstawiono na wykresach, zestawiając je z przebiegiem podatności układu mechanicznego, wyznaczonej metodą dokładną.



Rys.3. Podatność dynamiczna układu mechanicznego oraz mechatronicznego z założeniem idealnego przytwierdzenia przetwornika piezoelektrycznego (a) oraz z przetwornikiem przytwierdzonym za pośrednictwem warstwy kleju (b)

5. Podsumowanie

Przeprowadzając analizę drgających układów mechatronicznych, wykazano możliwość stosowania przybliżonej metody Galerki w odniesieniu do tego typu układów. Weryfikując dokładność metody przybliżonej, wykazano rozbieżności wartości częstości drgań własnych układu mechanicznego w przypadku ich trzech pierwszych wartości. Korygując te przesunięcia, zapewniono dużą dokładność metody, umożliwiając jej stosowanie w odniesieniu do badania układów mechatronicznych.

W przypadku układu mechatronicznego przesunięcie wartości częstości drgań własnych względem układu mechanicznego wynika z jego większej sztywności i jest zależne od wpływu parametrów materiałowych i geometrycznych przetwornika piezoelektrycznego i zewnętrznego obwodu elektrycznego. W przypadku modelu matematycznego z uwzględnieniem warstwy kleju przebieg podatności dynamicznej układu zależy również od właściwości tej warstwy. Należy więc uznać ten model matematyczny układu za bardziej dokładny od modelu z założeniem idealnego przytwierdzenia przetwornika.

Literatura

1. Buchacz A., Płaczek M.: Damping of mechanical vibrations using piezoelements, including influence of connection layer's properties on the dynamic characteristic. „Solid State Phenomena”, 2009, Vols. 147-149, p. 869-875.
2. Buchacz A., Płaczek M.: The discrete-continuous model of the one-dimension vibrating mechatronic system. PAMM - Proc. Appl. Math. Mech., 2009, Issue 1, p. 395-396, Weinheim, Published Online: 5 Mart 2010.
3. Buchacz A., Płaczek M.: Equations of motion of the vibrating mechatronic system with the glue layer. In Proceedings of the International Scientific and Engineering Conference Machine-Building and Technosphere on the Border of the XXI Century, Donetsk - Sevastopol 2009, t. 4, p. 42-45.
4. Forward R.L.: Electronic damping of orthogonal bending modes in a cylindrical mast-experiment. „Journal of Spacecraft and Rockets”, 1981, Vol.18, No.1, p. 11-17.
5. Hagood N. W., Flotow von A.: Damping of structural vibrations with piezoelectric materials and passive electric networks. „Journal of Sound and Vibration”, 1991, Vol. 146, No. 2, p. 243-268.
6. Hagood N. W., Flotow von A.: Design of passive piezoelectric damping for space structures. National Aeronautics and Space Administration Langley Research Center, Hampton, Virginia, 1994.
7. Kurnik W.: Damping of mechanical vibrations utilising shunted piezoelements. „Machine Dynamics Problems”, 2004, Vol. 28, No 4, p. 15-26.
8. Pietrzakowski M.: Active damping of beams by piezoelectric system: effects of bonding layer properties. „International Journal of Solids and Structures”, 2001, Vol. 38, p. 7885-7897.
9. Tylikowski A.: Stabilization of beam parametric vibrations. „Journal of Theoretical and Applied Mechanics”, 1993, Vol. 31, No. 3, p. 657-670.
10. Yoshikawa S., Bogue A., Degon B.: Commercial application of passive and active piezoelectric vibration control. In Proceedings of the Eleventh IEEE International Symposium on Applications of Ferroelectrics, 1998, p. 293-294.

Pracę zrealizowano w ramach projektu badawczego N501 118036 finansowanego przez Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego w latach 2009 - 2010.

MODELLING OF VIBRATING MECHATROIC SYSTEMS WITH PIEZOELECTRIC MATERIALS

Summary: The paper presents process of modelling and investigation of one-dimension vibrating mechatronic systems described by discrete - continuous mathematical models, that differ in level of simplification of the real system. Approximate Galerkin method was used to analyse and assign dynamic flexibility of considered systems. To verify the approximate method, first, the mechanical system was being taken into consideration. The mechanical system is exactly the same - beam without piezoelectric transducer and external circuit. The considered mechatronic system was flexural vibrating cantilever beam with piezoelectric transducer bonded to the beam surface. The external shunting circuit was adjoined to the transducer in order to damp vibrations of the beam.

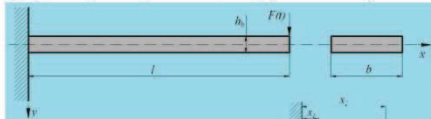
MODELOWANIE DRGAJĄCYCH UKŁADÓW MECHATRONICZNYCH ZAWIERAJĄCYCH MATERIAŁY PIEZOELEKTRYCZNE

ANDRZEJ BUCHACZ¹, MAREK PŁACZEK²

Instytut Automatykacji Procesów Technologicznych i Zintegrowanych Systemów Wytwarzania
Politechnika Śląska

¹ andrzej.buchacz@polsl.pl, ² marek.placzek@polsl.pl

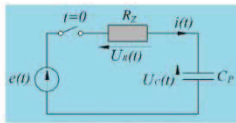
W pracy przedstawiono modelowanie i badanie jednowymiarowych drgających układów mechatronicznych, opisanych ciągiem dyskretno – ciągłych modeli matematycznych, różniących się stopniem uproszczenia układu rzeczywistego. Analizując układy mechatroniczne posłużono się przybliżoną metodą Galerkinia, którą uprzednio zweryfikowano analizując układ mechaniczny (pozbawiony przetwornika piezoelektrycznego).



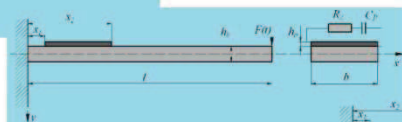
Rys. 1. Układ mechaniczny

Siła obciążająca układ: $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$, (1)

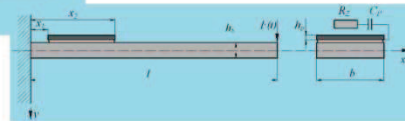
Definicja podatności dynamicznej: $y(x,t) = Y \cdot F_0 \cos(\omega t)$, (2)



Rys. 4. Schemat zastępczy przetwornika



Rys. 2. Układ mechatroniczny



Rys. 3. Układ mechatroniczny z warstwą kleju

Tab.1. Założenia metody dokładnej oraz przybliżonej

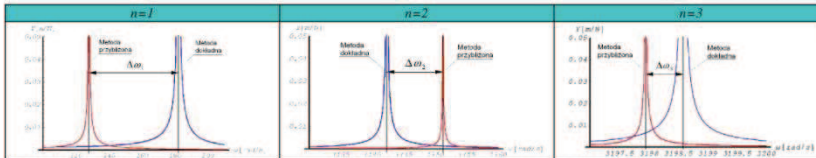
	METODA DOKŁADNA FOURIERA	METODA PRZYBLIŻONA GALERKINA
UGIĘCIE BELKI	$y(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ $X_n(x) = [-\cosh(\lambda_n x) - \cos(\lambda_n x)] [\sinh(\lambda_n x) - \sin(\lambda_n x)] + [\sinh(\lambda_n x) + \sin(\lambda_n x)] [\cosh(\lambda_n x) - \cos(\lambda_n x)]$ $\lambda_n = \frac{2n-1}{2l} \pi$ $T(t) = A \cos(\omega_n t)$	$y(x,t) = A \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left[(2n-1) \frac{\pi}{2l} \cdot x\right] \cdot \cos(\omega t)$
WARUNKI BRZĘGOWE I POCZĄTKOWE	$y(0,t) = 0, \frac{\partial y(0,t)}{\partial x} = 0, \frac{\partial^2 y(0,t)}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial^3 y(0,t)}{\partial x^3} = 0,$ $\frac{\partial y(x,0)}{\partial x} = \psi(x), y(x,0) = \phi(x)$	$y(0,t) = 0, y(l,t) = A$

Wartości częstości drgań własnych układu, przy $n > 3$, opisane są jednakową zależnością w przypadku obu metod:

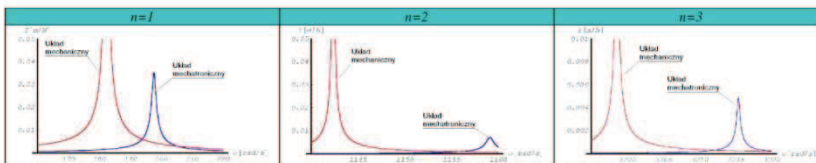
$$\omega = \sqrt{\frac{E_p J_b}{\rho_p A_b}} \cdot k^2, \quad k = (2n-1) \frac{\pi}{2l}, \quad n > 3 \quad (3)$$

Tab.2. Częstości drgań własnych układu mechanicznego

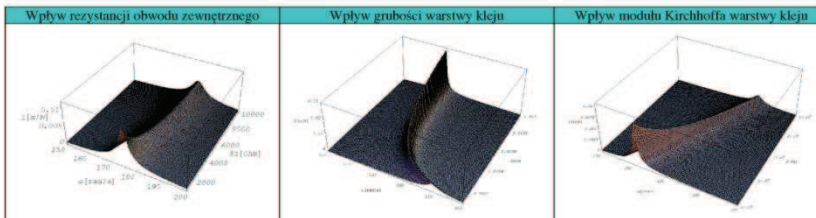
n	Metoda dokładna [rad/s]	Metoda przybliżona [rad/s]	$\Delta\omega_n$ [rad/s]
1	$\omega_1 = 182,281$	$\omega_1 = 127,918$	$\Delta\omega_1 = 54,363$
2	$\omega_2 = 1142,34$	$\omega_2 = 1151,26$	$\Delta\omega_2 = -8,92$
3	$\omega_3 = 3198,59$	$\omega_3 = 3197,95$	$\Delta\omega_3 = 0,64$
4	$\omega_4 = 6267,98$	$\omega_4 = 6267,98$	$\Delta\omega_4 = 0$



Rys.5. Podatność dynamiczna układu mechanicznego – metoda dokładna Fouriera oraz metoda przybliżona Galerkinia



Rys.6. Podatność dynamiczna układu mechanicznego – metoda dokładna oraz układu mechatronicznego – skorygowana metoda przybliżona



Rys.7. Wpływ zmian wartości wybranych parametrów układu na podatność dynamiczną przy pierwszej częstości drgań

Literatura:

- Buchacz A., Płaczek M.: Damping of Mechanical Vibrations Using Piezoelements, Including Influence of Connection Layer's Properties on the Dynamic Characteristic, Solid State Phenomena Vols. 147-149 (2009), T.I.P., Switzerland, p. 869-875;
- Buchacz A., Płaczek M.: Drgania układu mechatronicznego z uwzględnieniem ścinania warstwy łączącej, Modelowanie Inżynierskie, Tom 5, Zeszyt 36, Gliwice 2008, p. 335-342.
- Buchacz A., Płaczek M.: Wpływ właściwości warstwy łączącej na podatność dynamiczną drgającego układu mechatronicznego, Projektowanie mechatroniczne zagadnienia wybrane, Praca zbiorowa pod redakcją Tadeusza Uhla, Katedra Robotyki i Mechatroniki Akademii Górniczo-Hutniczej, Kraków 2008, p. 15-22.
- Kurnik W.: Damping of Mechanical Vibrations Utilising Shunted Piezoelements, Machine Dynamics Problems, Vol. 28, No 4, 2004, pp. 15-26.
- Tylikowski A.: Stabilization of Beam Parametric Vibrations, Journal of the Theoretical and Applied Mechanics, 31(3), 1993, s.657-670.