PRACE NAUKOWE GIG
GÓRNICTWO I ŚRODOWISKO

RESEARCH REPORTS
MINING AND ENVIRONMENT

Kwartalnik Quarterly 4/2004

Jerzy Kornowski

WPROWADZENIE DO ZAGADNIENIA SEKWENCYJNEJ PROGNOZY RYZYKA FINANSOWEGO W CZASIE AKCJI RATOWNICZEJ PO TĄPNIĘCIU

Streszczenie

Publikacja ta jest częścią cyklu artykułów, w których opisano podstawy i wyniki projektu celowego (KBN/NOT:6T120056 2000 C/05823) realizowanego wspólnie przez GIG i CSRG, a dotyczącego zagrożenia sejsmicznego i ryzyka w czasie akcji ratunkowej po tąpnięciu. Przedstawiono w niej podstawowe pojęcia i definicje, a także konstruktywne estymatory ryzyka wraz z elementarnymi przykładami obliczeń.

W rozdziale 4 – zakładając, że dostępne są sekwencyjne prognozy parametrów rozkładu energii sejsmicznej (zagadnienie to opisano w innym artykule tego cyklu) przedstawiono prosty sposób automatycznej sekwencyjnej estymacji prognozy zmian ryzyka finansowego w czasie akcji. W części końcowej zaproponowano i przeanalizowano konstruktywną (tzn. umożliwiającą przybliżone obliczenie) definicję zagrożenia tąpaniami.

Sequential forecasting of financial risk during the rescue action after a rockburst – an introduction

Abstract

This paper is a part of a sequence of papers describing basis and results of the project – realized by cooperating teams of GIG and CSRG – attempting to build methods (and computer programs) for induced seismic hazard and risk prediction during a rescue action after a rockburst. The basic notions of risk and hazard are (constructively) defined, elementary numerical examples are given and sequential estimators / predictors are discussed provided we are given predicted parameters of seismic energy distribution. At the final part of the paper the constructive definition of rockburst hazard is suggested.

WSTĘP I MOTYWACJA

Publikacja ta jest jednym z „efektów ubocznych" dwu projektów celowych, realizowanych wspólnie przez Centralną Stację Ratownictwa Górniczego i Główny Instytut Górnictwa. Pierwszy projekt został ukończony w 2000 roku, a jego rezultatem było wyprodukowanie przenośnej, autonomicznej aparatury GEOGIG 2000, wyposażonej we własne zasilanie akumulatorowe, czujniki i procesory. Aparatura ta umożliwia obserwacje sejsmoakustyczne i sejsmologiczne (dalej: obserwacje AE[1)] i wstrząsów) w czasie i w rejonie akcji ratowniczej, niezależnie od stanu sieci kopalnianych, które w pierwszych godzinach po katastrofie być może niezbyt sprawnie działają. GEOGIG 2000 wyświetla co 15 minut (jest to przyjęta „jednostka

[1)] Skrótem AE dalej zastąpiono wszystkie formy rzeczownika „sejsmoakustyka" i przymiotnika „sejsmoakustyczny".

czasu”: Δt = 15 min) – między innymi – zaobserwowane w minionych 15 minutach wartości energii AE i wstrząsów. Aparatura GEOGIG 2000, wraz z zasadami działania, została opisana przez Kajdasza i innych (2000).

Równocześnie około 2001 roku w Laboratorium Sejsmoakustyki GIG została opracowana – dająca dobre wyniki – metoda sekwencyjnej liniowej prognozy całkowitej energii sejsmicznej $E^C(t)$ (górny indeks „c” oznacza energię „całkowitą”) będącą sumą energii AE i wstrząsów z obserwowanego obszaru S w okresie Δt, (Surma, Kornowski 2002; Kornowski 2003; Kurzeja 2004). Metoda ta umożliwia okresową („sekwencyjną”), na przykład co Δt = 15 min, prognozę wartości średniej $E\ (t + 1)$ i wariancji $\sigma^2(t + 1)$ (zatem i prawdopodobieństw przedziałowych) energii E^C, która będzie wyemitowana w najbliższym czasie Δt. Dysponowaliśmy więc aparaturą, która na przykład w czasie akcji co 15 min może rejestrować energie i na podstawie tych obserwacji $\{E^C(k \cdot \Delta t), k = 1, 2, ...\}$ jest możliwe wykonanie prognozy. Wiadomo, że bezpośrednio po tąpnięciu zagrożenie sejsmiczne trwać może nadal, gdyż wstrząsy mogą występować seriami, przy czym nie wiadomo czy najgorszy wstrząs („główny”) już był, czy nadchodzi.

W tym samym czasie, kiedy została opracowana powyższa metoda okazało się, że od 2007 roku („Rzeczpospolita”, 12.05.2004) zgodnie z ustawodawstwem Unijnym obowiązywać będzie obligatoryjna estymacja ryzyka (finansowego) niektórych przedsięwzięć związanych z ryzykiem i że zasięg tego obowiązku będzie się rozszerzał.

Naturalny więc okazał się zamiar wykorzystania aparatury GEOGIG 2000 w metodzie prognozowania (np. w czasie akcji) zarówno zagrożenia sejsmicznego, jak i – znając to zagrożenie – oczekiwanego ryzyka finansowego (wielkości te zostały w dalszej części artykułu dokładnie zdefiniowane). Taka jest geneza i motywacja drugiego projektu celowego: „Procedury dynamicznej estymacji ryzyka sejsmicznego, na podstawie pomiarów geofizycznych”, którego realizacja zbliża się do końca.

W niniejszej publikacji – choć podano definicje zarówno zagrożenia sejsmicznego, jak i ryzyka finansowego – analizowane jest przede wszystkim zagadnienie sekwencyjnej estymacji i prognozy ryzyka finansowego w czasie akcji po tąpnięciu, przy założeniu, że dysponuje się już (w danym miejscu i czasie) prognozą zagrożenia sejsmicznego.

Metoda prognozy zagrożenia sejsmicznego będzie tematem osobnej publikacji (stanowiącej drugą cześć cyklu poświęconego prognozie ryzyka), a przykładowe wyniki znaleźć można, na przykład w pracy Kurzeji (2004).

Przyjmuje się założenia, że prognoza ryzyka finansowego zawiera informacje, których nie zawiera prognoza zagrożenia sejsmicznego, może więc ułatwić Kierownikowi Akcji podejmowanie racjonalnych decyzji.

Zauważyć należy, że krótkookresowa prognoza sekwencyjna wymaga (co Δt) analogicznego (ciągłego lub okresowego, co Δt) dopływu obserwacji.

Ze względu na małą liczbę krajowych publikacji przedstawiających zagadnienie estymacji i prognozy ryzyka finansowego w przystępnej formie, publikacja ta ma charakter częściowo dydaktyczny. Dokładnie objaśniono w niej i zilustrowano przykładami stosowane metody.

Wartość średnia i wartość oczekiwana to synonimy. Estymacja oznacza oszacowanie, podkreślając statystyczny (w odróżnieniu od niechlujnego) charakter obliczeń. Prognoza formułowana w chwili t dotyczy momentu $t + h$ lub okresu $(t, t + h)$, gdzie h nazywa się horyzontem prognozy

W całej pracy prawdopodobieństwo oznaczane jest dużą literą P, a gęstość prawdopodobieństwa – małą literą p. Symbol P(T|E) oznacza prawdopodobieństwo warunkowe zdarzenia T pod warunkiem (wystąpienia zdarzenia) E, a kreska nad zmienną oznacza jej średnią.

1. POJĘCIA I DEFINICJE

1.1. Zagrożenie sejsmiczne

Prognoza „zagrożenia tąpaniami" jest najważniejszym zagadnieniem sejsmoakustyki i sejsmologii górniczej. Zgodnie z literaturą (np. Gibowicz, Kijko 1994; Marcak, Zuberek 1994; Kornowski 2002) przedmiotem takiej prognozy może być:

a) **Czas, miejsce i energia „nadchodzącego" silnego wstrząsu.** Taką informację chcieliby otrzymać – i chętnie uznaliby za „właściwą prognozę" – na przykład górnicy, lecz jest to obecnie nieosiągalne. Według Lomnitza (1994, s. 3): „Earthquake prediction (in the sense of forecasting the date, location and magnitude) is not feasible today". Marcak i Zuberek (1994, str. 152) nazwają taką prognozę „deterministyczną" (bo nie zawiera pojęcia prawdopodobieństwa): „...należy stwierdzić, że dotychczas... prognozy w sensie deterministycznym nie udało się osiągnąć. Dlatego zajmiemy się statystycznymi algorytmami predykcyjnymi...". Więcej na ten temat podał, na przykład Kornowski (2004 s. 506). Postulat prognozowania czasu, miejsca i energii zdarzenia wywodzi się z sejsmologii trzęsień ziemi. W sejsmologii górniczej rejon (czyli miejsce) jest w przybliżeniu z góry określony jako zagrożone wyrobisko (ściana) i interesuje nas **czas i energia nadchodzącego silnego wstrząsu**. Jest to więc zagadnienie prognozy, „w przestrzeni (E, t)" zjawisk określonych na osiach energii i czasu. Bardzo ważne jest spostrzeżenie, że w przestrzeni takiej – tzn. w przestrzeni (E, t) – brak jest dobrze uzasadnionej i powszechnie akceptowanej miary odległości między dwoma „punktami" tej przestrzeni (czyli między dwoma wstrząsami) i to jest podstawowa przyczyna trudności w prognozowaniu.

b) **Zagrożenie sejsmiczne, zdefiniowane przez (porównywaną z „progiem bezpieczeństwa") intensywność emitowanej energii sejsmicznej**, ściślej:
DEF.1:
Zagrożenie sejsmiczne $Z_{\Delta,S}(t, E_g)$ prognozowane w chwili t, jest to prawdopodobieństwo przekroczenia – przez wyemitowaną w obszarze S i okresie $(t, t + \Delta t)$ całkowitą energię $E^C_{\Delta\ S}(t)$ sejsmiczną – lokalnie ustalonej wartości progowej E_g (np. $E_g = 1\cdot 10^5$J) zwanej progiem bezpieczeństwa

$$0 \le Z_{\Delta\ S}(t, E_g) \equiv P[E^C_{\Delta\ S}(t) > E_g] \le \qquad (1.1)$$

Symbol P[ ] oznacza prawdopodobieństwo „zdarzenia” określonego w kwadratowym nawiasie. Górny indeks „c” przypomina, że to **energia całkowita**, estymowana jako suma energii AE i wstrząsów

$$E_{\Delta S}^{C} = E_{\Delta S}^{AE} + E_{\Delta S}^{W} \tag{1.2}$$

W dalszej części artykułu, w celu uproszczenia, zbędne indeksy zostały pominięte, a **zajmować się będziemy**, gdy nie jest powiedziane inaczej, **tylko zlogarytmowaną energią całkowitą** $\{\log E_{\Delta S}^{C}(t)\}$, oznaczoną symbolem E lub $E(t)$. Analogiczną definicję zagrożenia, lecz z energią samych tylko wstrząsów w miejsce przyjmowanej energii całkowitej, podają też inni autorzy (np. Gibowicz, Kijko 1994; Marcak, Zuberek 1994). Jednak, jak wyżej wspomniano, prognoza (samych tylko) pojedynczych wstrząsów nie jest dziś możliwa.

W dowolnej chwili dyskretnego czasu $t = k \cdot \Delta t$, $k = 1, 2, ...$ prognoza całkowitej (logarytmicznej) energii $E = E(t + 1)$ (będącej sumą energii AE i wstrząsów), która wyemitowana będzie w okresie $(t, t + 1 \cdot \Delta t)$ w obserwowanym obszarze S polega na założeniu, że (ta nieznana, przyszła) energia jest wielkością losową i na oszacowaniu (estymacji) jej wartości średniej $\overline{E}$ (t + 1) i wariancji $\sigma^2(t + 1)$. Ponieważ liczne przykłady (np. Kornowski 2002, Kurzeja 2004) wskazują, że logarytmiczna energia całkowita – a w szczególności błąd prognozy tej energii – może być aproksymowana rozkładem normalnym, faktycznym wynikiem prognozy są zawsze parametry rozkładu normalnego $N[\overline{E}(t + 1), \sigma^2(t + 1)]$ w pełni opisujące zmienną losową $E(t + 1)$. W szczególności umożliwiają one estymację granic α-procentowych (np. 90%) przedziałów ufności dla energii – czyli przedziałów, w których energia ta będzie zawarta z prawdopodobieństwem α (np. $\alpha = 90\%$). Odbiorca prognozy powinien pamiętać, że nieznana, przyszła wartość tej energii jest zmienną losową („przyszłość nie może być dokładnie przewidziana”), a najlepszy jej opis polega na podaniu typu rozkładu (tej zmiennej) i wartości jego parametrów. Opisy uproszczone, na przykład za pomocą samej tylko wartości średniej $\overline{E}(t + 1)$ choć proste i łatwe do zrozumienia i wykorzystania, bardzo prędko przyniosą rozczarowanie z powodu dużych błędów. Z tego powodu powszechny jest zwyczaj informowania o przedziałach ufności dla prognozowanej wielkości. Należy podkreślić, że **zagrożenie sejsmiczne, jako prawdopodobieństwo, jest wielkością dobrze, ilościowo zdefiniowaną i mieści się zawsze w przedziale (0,1).** Próg bezpieczeństwa E_g występujący w definicji, może być dostosowany do lokalnych warunków i potrzeb (np. Dubiński, Konopko 2000, Tabl. 5.4) i zależny, na przykład od typu wyrobiska i obudowy.

Celowy jest podział „przestrzeni możliwych zagrożeń” [tzn. odcinka: (0,1)] na kilka fragmentów, na przykład ($0–10^{-5} – 10^{-4} – 10^{-3} – 1$) i nazwanie ich, odpowiednio, stanami a, b, c, d zagrożenia sejsmicznego, co uwalnia odbiorcę od rozważań „co należy zrobić z tym prawdopodobieństwem” i zapewnia bezpośrednie powiązanie prognozy z obowiązującymi instrukcjami oceny stanu zagrożenia. W praktyce prognoza zagrożenia sejsmicznego powinna więc mieć (i ma w opisywanym systemie) postać pojawiającego się co $\Delta t = 15$ min komunikatu:

Z prawdopodobieństwem $P = 90\%$

$$E_{5\%} \leq E(t+1) \leq E_{95\%}$$

a prawdopodobieństwo, że $E(t + 1) > 1 \cdot 10^5$ J wynosi Z
zatem prognozuje się stan zagrożenia ABCD.

W komunikacie tym (który w praktyce może być skrócony), symbole E_5, E_{95} i Z są liczbami, symbol ABCD jest jedną z liter (a, b, c, d). Komunikat wyświetlany w chwili t dotyczy obserwowanego obszaru S i okresu (t, $t + \Delta t$), a po upływie tego okresu wyświetlany jest nowy komunikat. System taki został uruchomiony od niedawna w ZG Bytom III.

1.2. Ryzyko finansowe

Choć zagadnienia ryzyka i teorii decyzji podejmowanych „w warunkach ryzyka” badane były od dawna jak pisze J.C. Hickman w przedmowie do znanej książki Gerbera (1979), to Daniel Bernoulli (1700–1782) zaproponował maksymalizację użyteczności – która jest uogólnieniem korzyści finansowej, stosowanym gdy wyniki działań lub decyzji nie dają się łatwo wyrazić w pieniądzach – jako kryterium decyzyjne]. Rozkwit teorii decyzji i teorii ryzyka[2)] wiąże się ze słynnymi pracami Von Neumanna i Morgensterna (1947) oraz Walda (1950) w połowie XX wieku. W Polsce zagadnienia te przez długi okres nie były popularne, lecz transformacja ustrojowa spowodowała wzrost zainteresowania „ryzykiem” – szczególnie w bankowości i ubezpieczeniach (Borys 1996; Ronka-Chmielowiec 1997; Zeliaś 1998), ale także w górnictwie (Sobala i Rozmus 1997, Niczyporuk 2000). W literaturze górniczej i sejsmologicznej znaleźć można wzmianki na temat ryzyka finansowego – często bez znaczenia, że „finansowego”, co prowadzi do nieporozumień (gdyż liczne inne zagrożenia też bywają zwane „ryzykiem”, a terminologia nie została ostatecznie ustalona) – oraz różne, czasem bardzo uproszczone jego definicje. Według Lomnitza (1994, s. 156): „Risk is hazard time cost”, a według Dubińskiego i Konopko (2000, str. 86): „Pod pojęciem ryzyka rozumie się iloczyn prawdopodobieństwa P i strat S... czyli R = P·S”. Wymiarem ryzyka finansowego są jednostki pieniężne[3)]. Definicja ryzyka finansowego nie zawsze jest aż tak prosta. Zeliaś (1998, s. 18) utożsamia ryzyko ze zmienną losową określającą finansowy wynik działalności (lub decyzji) i pisze: „Jedną z podstawowych ilościowych charakterystyk ryzyka jest wariancja” (mając na myśli wariancję rozkładu zysków i strat pewnej działalności). W przypadku akcji ratowniczej nie są rozważane zyski, lecz przyszłe skutki finansowe podejmowanych działań i decyzji stanowią zmienną

[2)] Teoria decyzji i teoria ryzyka są gałęziami statystki rozwijanymi początkowo (Lundberg 1903; Cramer 1930, 1955; Gerber 1979) dla potrzeb ubezpieczalnictwa i bankowości. Ryzyku – ściśle zdefiniowanemu – poświecono dziesiątki książek i tysiące artykułów, są nawet periodyki (np. Risk; Risk Magazine; Journal of Risk and Insurance) tylko ryzyku poświecone. Niestety Polska Norma PN-N-18002 (2000) nie ułatwia, zdaniem autora, zrozumienia zagadnienia.

[3)] Raiffa H. (1969) stosuje nazwę „Expected Monetary Value” (EMV), rozumiejąc przez to właśnie ryzyko finansowe.

losową (bo są nieznane, niepewne i nie-wyznaczalne w sensie deterministycznym), która ma jakiś – znany, nieznany lub częściowo znany – rozkład i parametry tego rozkładu mogą być interesujące.

Gdy przyszły (chwilowo nieznany i niepewny) wynik finansowy działalności lub decyzji traktuje się jako zmienną losową, to jej wartość średnią (zwaną też wartością oczekiwaną) nazywa się ryzykiem (także ryzykiem oczekiwanym lub oczekiwanym ryzykiem finansowym) i oznacza symbolem *R*. Ryzyko *R* jest więc wartością oczekiwaną przyszłych kosztów (lub strat)

$$R = \text{[illegible]} \qquad (1.3)$$

W popularnym podręczniku De Groot (1981 s. 106) ujmuje to tak: „Dla dowolnej decyzji *d* oczekiwana strata $\rho(P, d)$ nazywana ryzykiem, określana jest wzorem

$$\rho(P, d) = \int_G \mathrm{L}(\omega, \mathrm{d})\, \mathrm{dP}(\omega)\text{”}$$

{$\mathrm{L}(\omega, d)$ to strata / koszt (ang.: loss) jako funkcja decyzji (d) i wyniku (ω), natomiast P to prawdopodobieństwo, a G to przestrzeń parametrów} i dalej (DeGroot 1981 s. 118) wzmacnia poprzednie stwierdzenie, pisząc explicite: „**Termin ryzyko oznacza oczekiwaną stratę**” (należy przypomnieć, że „wartość oczekiwana”, to wartość średnia, a słowo „oczekiwana” ma wywołać skojarzenie z przyszłymi wynikami: znany wynik działań już dokonanych nie jest na ogół zmienną losową!).

Definicja ryzyka jest związana z klasyczną teorią decyzji (Moore 1975; DeGroot 1981) i wystarczy do ustalenia rankingu (zatem i do wyboru najlepszej) decyzji na podstawie właśnie kryterium minimalizacji ryzyka czyli minimalizacji oczekiwanych (średnich) strat.

Należy stwierdzić, że jeżeli obliczenia (ryzyka) mają umożliwić lub ułatwić PORÓWNANIE skutków różnych decyzji (lub działań) to wystarcza posługiwanie się oczekiwanym (tzn. średnim) ryzykiem finansowym *R* lub wielkością liniowo z nim związaną. Jeżeli jednak obliczenia mają umożliwić wyznaczenie liczbowych wartości strat (kosztów) – na przykład w celu przygotowania „rezerw finansowych” (np. na sławetne „złe długi” banku lub na wypadek katastrofalnej powodzi) – to ryzyko oczekiwane (*R*) stanowiące wartość średnią (rozkładu) zmiennej losowej, którą są straty, nie wystarczy (zwykle określić wówczas trzeba cały, parametryczny lub nieparametryczny rozkład możliwych kosztów (*k*) wraz z ich prawdopodobieństwami i wyznaczyć „rozsądny” lub „wymagany prawem” kwantyl tego rozkładu, na przykład tak zwaną „wartość zagrożoną na poziomie α”, $\mathrm{VaR}(\alpha)$, ang.: Value-at-Risk; na przykład Jorion 2001). Zagadnienie to nie dotyczy akcji ratowniczej po tąpnięciu nie będzie więc dalej analizowane, może ono jednak dotyczyć normalnej eksploatacji w warunkach zagrożenia tąpaniami (i będzie przedmiotem osobnej publikacji).

Należy tu przypomnieć, że:

- Estymatorem wartości średniej zmiennej losowej $k(j)$ – na przykład kosztów – o rozkładzie prawdopodobieństwa $P(j)$ – gdzie $j = 1, ..., \mathrm{q}$ – jest równanie

$$\overline{k} = \sum_{j=1}^{q} k(j)P(j) \qquad (1.4a)$$

gdzie q jest liczebnością badanej dyskretnej przestrzeni (np. kosztów). Gdy przestrzeń $\{k\}$ jest ciągła (np. gdy koszt zależy od długości uszkodzonego wyrobiska), to sumę (1.4a) zastępuje się całką (np. podana wyżej definicja DeGroota). Średnia (1.4a) bywa zwana średnią ważoną.

- Wartość średnia zmiennej losowej będącej iloczynem dwu niezależnych zmiennych losowych jest iloczynem ich wartości średnich

$$\overline{(XY)} = \overline{X} \cdot \overline{Y} \qquad (1.4b)$$

(zależności (1.4a, b) znaleźć można w każdym podręczniku rachunku prawdopodobieństwa).

Jeżeli więc średnia liczba uczestników wypadku wynosi $\overline{n}$ (nie musi to być liczba całkowita), a średni „koszt jednostkowy” wynosi $\overline{k}^1$ (określany, na przykład przez ubezpieczyciela i dotyczy tylko poszkodowanych, górny indeks „1” wskazuje, że koszt ten dotyczy jednego poszkodowanego, niezależnie od losu pozostałych) i wielkości te (tzn. $\overline{n}$ i $\overline{k}^1$) są niezależne, to równanie (1.3) przyjmuje postać

$$R = \overline{n}\overline{k}^1 \qquad (1.5a).$$

Jeżeli ponadto wiadomo, że prawdopodobieństwo odniesienia jakiejkolwiek szkody przez osobę przebywającą w rejonie wypadku wynosi P_E lub wiadomo, że prawdopodobieństwo wyjścia bez szkody wynosi $1 - P_E$, to

$$R = mP_E)\overline{k}^1 \qquad (1.5b)$$

gdzie m jest liczbą osób w zagrożonym rejonie.

Gdy prognozuje się ryzyko w czasie akcji po tąpnięciu, m jest łączną liczbą ratowanych i ratujących. Należy zauważyć, że równanie (1.4a) może być wykorzystane do obliczenia $\overline{k}^1$, czyli średniego kosztu jednostkowego, gdy jest określona przestrzeń kosztów jednostkowych $\{k^1(i), i = 1, 2, ..., q\}$ i określone są na niej prawdopodobieństwa $P(i)$, $i = 1, ..., q$. Tak obliczona wartość $\overline{k}^1$ może być wstawiona do równania (1.5b) umożliwiając estymację wartości oczekiwanej ryzyka finansowego w ogólnym przypadku (m osób i kosztów/strat o dowolnym znanym rozkładzie)

$$R = (mP_E)\sum_{j=1}^{q} k(j)P(j) \qquad (1.6)$$

2. PRZYKŁADY OBLICZANIA RYZYKA

Przykład 1:

W wyrobisku jest tylko jeden człowiek (m = 1), który wskutek zdarzenia E, z prawdopodobieństwem P_E (np. P_E = 0,2) może ulec wypadkowi o koszcie $k(1)$ = 100 tys. zł (lub z prawdopodobieństwem $1–P_E$ nie odniesie żadnej szkody) i innych możliwości nie ma.

Z równania (1.5b) wynika, że

$$R = (1 \cdot 0{,}2) \cdot 100 = 20 \text{ tys. zł}$$

Z zapisu $R = P_E k = 0{,}2 \cdot 100$ wynika, że „ryzyko = prawdopodobieństwo razy koszt”.

Przykład 2:

Sytuacja się nie zmienia (m = 1, P_E = 0,2), lecz szkoda nie musi być wielkością dwustanową; jeżeli osoba ulegnie jakiemukolwiek wypadkowi to:

- z prawdopodobieństwem P(1) = 0,73 będzie to wypadek „lekki”,

$$k(1) = 5 \text{ tys. zł}$$

- `z prawdopodobieństwem $P(2)$ = 0,13 będzie to wypadek „ciężki”,

$$k(2) = 33 \text{ tys. zł}$$

- z prawdopodobieństwem P(3) = 0,14 będzie to wypadek śmiertelny,

$$k(3) = 80{,}5 \text{ tys. zł}$$

Z równania (1.5b) wynika, że

$$R = (1 \cdot 0{,}2) \sum_{i=1}^{3} P(i)k(i) = 0{,}2\ [0{,}73 \cdot 5 + 0{,}13 \cdot 33 + 0{,}14 \cdot 80{,}5] = 0{,}2 \cdot 19{,}21 = 3{,}84 \text{ tys. zł}$$

Przykład 3:

W wyrobisku są m = 3 osoby i każda z nich niezależnie od losu pozostałych, wskutek zdarzenia E ulec może, z prawdopodobieństwem P_E = 0,2 wypadkowi (np. śmiertelnemu) o koszcie $k(1)$ = 100 tys. zł i z prawdopodobieństwem $1–P_E$ może wyjść bez szkody – innych możliwości nie ma.

Z równania (1.5b) wynika, że

$$R = (m \cdot P_E)k(1) = 3 \cdot 0{,}2 \cdot 100 = 60 \text{ tys. zł}$$

W podręcznikach rachunku prawdopodobieństwa uogólniona forma tego zadania – wymagająca obliczenia prawdopodobieństwa, że akurat n spośród obecnych m ($m \geq n$) osób ulegnie wypadkowi, lub że w serii m rzutów monetą reszka wypadnie n razy – zwana jest problemem Bernoulliego lub problemem rzutów (fałszywą) monetą.

Przykład 4:

W wyrobisku są m = 3 osoby, z których każda z prawdopodobieństwem P_E = 0,2 może odnieść jakąś szkodę (i z prawdopodobieństwem $1–P_E$ może nie ponieść żadnej szkody). Wiadomo też, że jeżeli ktoś został poszkodowany, to:

- z prawdopodobieństwem $P(1)$ = 0,73 uległ wypadkowi „lekkiemu”, $k(1)$ = 5 tys. zł,
- z prawdopodobieństwem $P(2)$ = 0,13 uległ wypadkowi „ciężkiemu”, $k(2)$ = 33 tys. zł,
- z prawdopodobieństwem $P(3)$ = 0,14 uległ wypadkowi śmiertelnemu, $k(3)$ = 80,5 tys. zł.

Na podstawie (1.4a) oblicza się wartość średnią szkody jednostkowej

$$\overline{k^1} = 0{,}73 \cdot 5 + 0{,}13 \cdot 33 + 0{,}14 \cdot 80{,}5 = 19{,}21 \text{ tys. zł}$$

i podstawia się do równania (1.5b)

$$R = (mP_E)\,\overline{k^1} = 3 \cdot 0{,}2 \cdot 19{,}21 = 11{,}526 \text{ tys. zł}$$

Z przykładów tych wynika, że jeśli zna się liczbę m zagrożonych osób oraz odpowiednie prawdopodobieństwa i koszty, to estymacja wartości oczekiwanej R ryzyka finansowego jest bardzo prosta.

Przykłady uogólnić można na straty związane z obiektami, lecz nie dotyczy to akcji ratowniczej i będzie tematem osobnej publikacji.

3. KOSZTY I PRAWDOPODOBIEŃSTWA

Rozdział ten dotyczy kosztów i prawdopodobieństw niezbędnych do estymacji oczekiwanego ryzyka finansowego R przyjmując, jak to się zwyczajowo robi w górnictwie, że wypadki dzielą się na „ lekkie”, „ciężkie” i „śmiertelne”.

Ani definicja kategorii wypadku, ani związane z wypadkiem koszty nie mogą być przedmiotem analiz geofizycznych. Przyjęto więc, na podstawie niejawnych informacji uzyskanych przez autora od Ubezpieczyciela, że w 2000 roku, na podstawie danych z minionych kilku lat, koszty te szacowano następująco:

- dla wypadku lekkiego $k^1(1) \approx$ 5000 zł (3.1a)
- dla wypadku ciężkiego $k^1(2) \approx$ 33000 zł (3.1b)
- dla wypadku śmiertelnego $k^1(3) \approx$ 80500 zł (3.1c)

Przypuszczać można, że w 2004 roku koszty te są o 25–30% większe, lecz z braku aktualnych danych do obliczeń przyjęto wyżej podane wartości szkody jednostkowej $k^1(j)$ j = 1, 2, 3.

Na podstawie danych literaturowych (np. Konopko (red.) 1998, 1999, 2000, 2001, 2002; Barański 2003; Barański i inni 1999) możliwe okazało się proste zestawienie danych o wstrząsach, tąpaniach i wypadkach (tabl. 1 i 2) z lat 1993–2002. Gdy znane są statystyczne zestawienia zdarzeń, to warunkowe prawdopodobieństwa („empiryczne" czyli z obserwacji) $P(T|\varepsilon_j)$ wystąpienia tąpnięcia (T), pod warunkiem wystąpienia wstrząsu „w klasie energetycznej" ε_j (zdefiniowanej poniżej) estymuje się na podstawie równania

$$P(T \mid \varepsilon_j) = \frac{N(T, \varepsilon_j)}{N(\varepsilon_j)} \tag{3.2}$$

gdzie $N(\varepsilon_j)$ to liczba wstrząsów o energii E w klasie ε_j, natomiast $N(T,\varepsilon_j)$ to liczba zdarzeń złożonych, w których wraz z wstrząsem o energii w klasie ε_j wystąpiło tąpnięcie T. Równanie (3.2) jest definicją tak zwanego prawdopodobieństwa warunkowego (np. Feller 1966). Symbol (T, ε) oznacza więc koniunkcję (tzn. logiczne „i") zdarzeń T oraz ε. Klasą energetyczną ε_j nazywa się przedział ($\varepsilon_j^-,\varepsilon_j^+$) energii taki, że energia E wstrząsu spełnia nierówności

$$\varepsilon_j^- = 1 \cdot 10^j \text{ [J]} \le E \le \varepsilon_j^+ = 1 \cdot 10^{j+1}, \text{ J} \tag{3.3}$$

Symbole ε_j^- i ε_j^+ oznaczają wiec dolną i górną granice klasy (czyli przedziału) energii: na przykład jeśli energia wstrząsu wynosi $E = 4{,}2 \cdot 10^4$, J, to: $j = 4$, $\varepsilon_j = (1 \cdot 10^4 - 1 \cdot 10^5)$, $\varepsilon_j^- = 1 \cdot 10^4$, $\varepsilon_j^+ = 1 \cdot 10^5$, J. W celu uproszczenia zapisu klasy energetyczne oznacza się symbolem ε_j lub nawet tylko wykładnikiem „j" (co daje popularne „czwórki", „piątki" itp.). Zauważyć należy, że wykładnik „j" jest cechą logarytmu energii. Klasy ε_j zostały wprowadzone dlatego, że w takich właśnie przedziałach energii dostępne są statystyczne zestawienia wstrząsów.

Tablica 1. Prawdopodobieństwo warunkowe $P(T|\varepsilon_j)$ tąpnięcia, gdy wystąpił wstrząs w klasie energii ε_j

Energia ε_j^-	10^4 J	10^5 J	10^6 J	10^7 J	10^8 J	10^9 J
Liczba wstrząsów $N(\varepsilon_j)$	74860	7309	1183	105	8	1 lub 2*
Liczba tąpań $N(T \mid \varepsilon_j)$	8	20	20	9	0	1
$P(T \mid \varepsilon_j)$	~1 10^{-4}	~3$10^{-3}$	0,017	0,086		1

* sieć GIG – zarejestrowała 2 wstrząsy o energii rzędu 10^9 J

Dane zawarte w tablicy są efektem dziesięcioletnich obserwacji w polskim górnictwie, dlatego podane wartości liczbowe, choć mogą zawierać błędy, są istotne. Wynika z niej (po zaokrągleniu wartości N(ε) do najbliższej potęgi dziesiątki), że **w długim okresie czasu i dla wielu kopalń, zatem ASYMPTOTYCZNIE, co najmniej dla energii od 10^4 J do 10^9 J, w (zgrubnym) przybliżeniu taka sama energia (~10^9 J) wydziela się w każdej klasie energetycznej ε_j, a liczba N wstrząsów maleje w przybliżeniu:**

- hiperbolicznie (czyli potęgowo) na skali liniowej

$$N(E) \approx 10^9/\text{E} \qquad 10^4 \le E \le 10^9 \text{ J} \tag{3.4a}$$

lub równoważnie

$$N(\varepsilon_j) \approx 10^9(\varepsilon_j^-)^{-1} \qquad 4 \le j \le 9 \qquad (3.4b)$$

- wykładniczo na skali liniowo-logarytmicznej

$$N(\log_{10}\varepsilon_j) \approx 0,1 \cdot N(\log_{10}\varepsilon_{j-1}) \qquad 4 \le j \le 9 \qquad (3.4c)$$

lub

$$N(\mathrm{j}) \approx N(4) \cdot 10^{4-j} \qquad 4 \le j \le 9 \qquad (3.4d)$$

- liniowo na skali bilogarytmicznej (log-log)

$$\log_{10}N(\log_{10}\varepsilon_j) \approx 9\text{-}\log_{10}(\varepsilon_j^-) \qquad 4 \le j \le 9 \qquad (3.4e)$$

lub równoważnie

$$\log_{10}N(j) \approx 9\text{-}j, \qquad 4 \le j \le 9 \qquad (3.4f)$$

co jest zgodne z modelem Gutenberga – Richtera (G-R), w którym parametr „b" ma w (zgrubnym) przybliżeniu wartość $b = -1$.

Wniosek ten, choć nie jest nieznany, warto skomentować:

- podstawą podanych w równaniach (3.4) wartości liczbowych jest założenie, że energie wstrząsów są szacowane poprawnie,
- na tego typu zależności mogą wskazywać obserwacje, lecz na podstawie obserwacji nie mogą one być udowodnione,
- brak wystarczających podstaw do ekstrapolacji równań (3.4) poza obszar energii $10^4 - 10^9$ (J), J. Barański i inni (1999) podają, że w 1998 roku: $N(3) \approx 7N(4)$ oraz $N(2) \approx 1,1 \cdot N(3)$, lecz nie wszystkie zdarzenia „słabe" są rejestrowane,
- ponieważ energie, zarówno pojedynczych zdarzeń, jak i skumulowane, pozostają skończone, zatem rozkład G-R dla dużych energii z konieczności ulegać musi załamaniu.

Wartość prawdopodobieństwa $P(i) \equiv P[k^1(i)]$ wystąpienia kosztów jednostkowych $k^1(i)$ oblicza się za pomocą równania

$$P(i) = N[k^1(i)] / \sum_{j=1}^{3} N[k^1(j)] \qquad (3.5)$$

Jest to względny udział wypadków i-tej kategorii w ogólnej liczbie wypadków. Obliczone prawdopodobieństwa empiryczne przedstawiono w tablicy 2.

Tablica 2: Zestawienie liczby wypadków, które wystąpiły wskutek tąpnięć oraz wartości prawdopodobieństwa $P(i) \equiv P[k^1(i)]$, że wypadek – jeśli nastąpi – będzie i-tej „kategorii" i spowoduje koszt jednostkowy $k^1(i)$

Kategoria wypadku	Lekki $j = 1$	Ciężki $j = 2$	Śmiertelny $j = 3$
Liczba wypadków (1993–2002)	150	27	28
$P(i)$	0,73	0,13	0,14

Ponieważ empiryczne prawdopodobieństwa $P(T|\varepsilon_j)$ – tablica 1 – są niekompletne i obejmują tylko ograniczony zakres energii, a automatyzacja obliczeń wymaga by możliwe było obliczenie wartości $P(T|\varepsilon_j)$ dla każdej możliwej energii, konieczna jest aproksymacja prawdopodobieństw $P(T|\varepsilon_j)$ estymatorem dopasowanym do danych empirycznych (tabl. 1) i spełniającym warunki matematyczne

$$0 \le P(T|\varepsilon_j) \le 1 \tag{3.6a}$$

oraz fizyczne

$$P(T|\varepsilon_j) \to 0 \text{ gdy } \varepsilon_j^+ \to 0 \tag{3.6b}$$

$$P(T|\varepsilon_j) \to 1 \text{ gdy } \varepsilon_j^- \to \infty \tag{3.6c}$$

Warunki takie spełnia wiele funkcji, na przykład linia łamana, zerowa dla małych energii, następnie liniowo rosnąca od 0 do 1 ze wzrostem energii i równa 1 dla dużych energii. Łatwą aproksymację danych empirycznych zapewnia krzywa (zwana „logistyczną” lub „sigmoidalną”) o równaniu

$$P(T|\varepsilon_j) = \{1+\exp[-\gamma(\log \varepsilon_j^- - \beta)]\}^{-1} \tag{3.7}$$

gdzie parametry (γ, β) wyznacza się w procesie dopasowania. Obliczenia – które wykonywać można różnymi metodami – stają się szczególnie proste, gdy w tablicy 1 tylko dwie pary danych [(ε_a, P_a), (ε_b, P_b)] uzna się za „w pełni wiarygodne”. Wówczas, oznaczając:

$$Z_1 = \ln[(1 - P_a)/P_a] \tag{3.8a}$$

$$Z_2 = \ln[(1 - P_b)/P_b] \tag{3.8b}$$

otrzymuje się

$$\beta = (Z_1 - Z_2)^{-1} (Z_1 \log \varepsilon_b^- - Z_2 \log \varepsilon_a^-) \tag{3.8c}$$

$$\gamma = Z_1 / (\beta - \log \varepsilon_a^-) \tag{3.8d}$$

(należy zauważyć logarytm naturalny, ln oraz dziesiętny, log).

Przyjmując, że w tablicy 1 najbardziej wiarygodne są pary ($\varepsilon_a^- \equiv \varepsilon_4^- = 1\cdot10^4$ J; $P_a = 0{,}0001$) i ($\varepsilon_b^- \equiv \varepsilon_7^- = 1\cdot10^7$ J; $P_b = 0{,}086$) można obliczyć, że $\beta = 8{,}036$ oraz $\gamma = 2{,}282$. Zatem, prawdopodobieństwo warunkowe tąpnięcia, pod warunkiem wystąpienia wstrząsu o energii w klasie ε_j estymować można za pomocą równania

$$P(T|\varepsilon_j) \approx \{1+\exp[-2{,}3(\log \varepsilon_j^- - 8)]\}^{-1} \tag{3.9a}$$

lub niemal równoważnym równaniem w dziedzinie energii ciągłej

$$P(T|E) = \{1+\exp[-2{,}3(\log \mathrm{E} - 8)]\}^{-1} \tag{3.9b}$$

Łatwo sprawdzić, że zależności (3.9a,b) generują następujące wartości $P(T|\varepsilon_j)$ w przypadku wstrząsów o energii w klasie ε_j.

$\overline{\varepsilon_j}$	10^4 J	10^5 J	10^6 J	10^7 J	10^8 J	10^9 J
$P(T\|\varepsilon_j)$	$\sim 1\cdot 10^{-4}$	$\sim 1\cdot 10^{-3}$	$\sim 1\cdot 10^{-2}$	~0,091	0,5	~0,91

Są to wartości zbliżone do podanych w tablicy 1.

4. PROGNOZA OCZEKIWANEGO RYZYKA FINANSOWEGO

W czasie akcji ratowniczej – i ogólnie zawsze z wyjątkiem momentów aktualizacji informacji statystycznych o wypadkach – wartości q, $k(j)$ oraz $P(j)$, występujące w równaniu (1.6), pozostają stałe. Jeśli więc aktualizacja jest przeprowadzona prawidłowo, poza czasem akcji, to równanie (1.6) zapisać można w postaci

$$\overline{R} = C_1 P_E \tag{4.1a}$$

gdzie, zgodnie z (1.4a)

$$C_1 = m\overline{k}_1 \tag{4.1b}$$

$$\overline{k}_1 = \sum_{j=1}^{q} k(j)P(j) \tag{4.1c}$$

(i gdzie, w praktyce $q = 3$).

P_E jest to prawdopodobieństwo zdarzenia (złożonego) polegającego na tym, że „osoba w objętym skutkami wyrobisku ulegnie wypadkowi wskutek tąpnięcia T związanego z wstrząsem o energii E (lub z wstrząsem o energii w klasie ε_j)”, a złożoność zdarzenia polega na tym, że musi wystąpić i wstrząs, i tąpnięcie. Prawdopodobieństwo zdarzenia złożonego (zdarzenie złożone zwane bywa też koniunkcją lub iloczynem logicznym) oznacza się symbolem $P(T, \varepsilon_j)$ a gęstość takiego prawdopodobieństwa – symbolem $p(T, E)$. (Uwaga: łączne prawdopodobieństwo tąpnięcia i wstrząsu o energii „punktowej” dokładnie równej E, jest „nieskończenie małe” dlatego należy posługiwać się gęstością $p(T, E)$). Wykorzystując znane twierdzenie o prawdopodobieństwie zdarzeń złożonych (które równocześnie definiuje prawdopodobieństwo warunkowe, na przykład Chung 1974, s. 111–116; Hahn i Shapiro 1969, s. 18–22; Feller 1966, s. 103–105; Fisz 1969, s. 27–31, porównaj też (3.2)) można zapisać

$$p_E \equiv p(T, E) = P(T|E)\cdot p(E) \tag{4.2a}$$

$$P_E \equiv P(T, \varepsilon_j) = P(T|\varepsilon_j)\cdot P(\varepsilon_j) \tag{4.2b}$$

Stąd, równanie (4.1a) określające ryzyko oczekiwane przyjmuje formy

$$R = C_1 P(T \mid \overline{\varepsilon}_j) P\overline{(\varepsilon_j)} \tag{4.3a}$$

$$\bar{r} = \,_1 \cdot P(T \mid \bar{E}) \cdot p(\bar{E}) \tag{4.3b}$$

gdzie r to gęstość ryzyka; wymiarem R są jednostki pieniężne, wymiarem r są jednostki pieniężne na stosowaną – np. logarytmiczną – jednostkę energii; całka z r – np. od ε_j do ε_j – daje R).

Znając oczekiwaną energię („punktową” $\bar{E}$ lub przedziałową czyli klasę ε_j) wstrząsu, wartość $P(T|\bar{E})$ oblicza się za pomocą równania (3.9b), a wartość $P(T|\varepsilon_j)$ za pomocą równania (3.9a). W równaniach (4.3a,b) czynnikiem nieznanym, który ponadto zależny jest od czasu t i być może jest szybkozmienny, jest tylko oczekiwana energia ($\bar{E}$(t) lub ε_j (t)) wstrząsu. Wykorzystując (3.9a,b), równania (4.3a,b) można więc zapisać:

$$R(t) = C_1 P_t(\varepsilon_j)\{1 + \;\mathrm{xp}[- \;,3(\log \varepsilon_j(t) - \;)]\}^{-} \tag{4.4a}$$

$$r(t) = C_1 p_t(\bar{E})\{1 + \;\mathrm{xp}[- \;,3(\log \bar{E}(t) - \;)]\}^{-} \tag{4.4b}$$

Równanie (4.4a), przy założeniu, że energie są określane z dokładnością do „klasy“ czyli jednostki logarytmicznej (zatem z dokładnością do rzędu wielkości), umożliwia obliczenie ryzyka oczekiwanego wyrażonego w jednostkach pieniężnych zależnych od C_1 (na podstawie (4.1), korzystając z (3.1a,b,c) i z prawdopodobieństw podanych w tablicy 2, otrzymuje się C_1 = 19,21 tys. zł). Jak podano we wstępie i w rozdziale 1 rozkład logarytmicznej energii całkowitej (w okresach Δt, z obszaru S) aproksymować można rozkładem normalnym o parametrach $\bar{E}(t)$, $\sigma^2(t)$ i dysponujemy programem predykcyjnym, który co jednostkę (Δt) czasu parametry te prognozuje. Ponieważ gęstość rozkładu normalnego

$$p(E) = [\sigma\sqrt{2\pi}\,]^{-1}\exp[-(E-\bar{E})^2/2\sigma^2 \tag{4.5a}$$

w punkcie $E = \bar{E}$ przyjmuje wartość $[\sigma\sqrt{2\pi}\,]^{-1}$, to podstawiając

$$C_2 = C_1/\sqrt{2\pi} \tag{4.5b}$$

równanie (4.4b) można zapisać w postaci

$$r(t) = C_2\cdot\{\sigma(t)\cdot[1 + e^{-2,3(\log \bar{E} - 8)}]\}^{-1} \tag{4.4c}$$

Gdy celem obliczeń jest „tylko“ monitorowanie zmian oczekiwanego ryzyka finansowego, stała C_2 nie ma znaczenia i przyjmując C_2 = 1 posługiwać się można „znormalizowaną gęstością” r_N oczekiwanego ryzyka finansowego

$$r_N(t) = \{\sigma(t)\cdot[1 + e^{-2,3(\log \bar{E} - 8)}]\}^{-1} \tag{4.4d}$$

Jest to wielkość bezwymiarowa, tak samo dobrze jak ryzyko oczekiwane $R(t)$ – równanie (4.4a) – informująca o zmianach ryzyka finansowego (lecz prostsza od $R(t)$, bo nie wymaga trudnych do uzyskania informacji o kosztach wypadków ani też obliczania prawdopodobieństwa $P_t(\varepsilon_j) = P_t(\varepsilon_j) - P_t(\varepsilon_j)$, co oblicza się całkując równanie (4.5a) rozkładu normalnego), **stąd równanie (4.4d) jest, wraz z programem prognozującym wartości $\overline{E}$ (*t* + 1) oraz σ^2(*t* + 1), rekomendowane do sekwencyjnej estymacji i prognozy zmian oczekiwanego ryzyka finansowego** w czasie akcji. Estymator (4.4d) oczekiwanej (czyli średniej znormalizowanej) gęstości ryzyka nie zależy od statystki szkód (tabl. 2), a zależy od statystki wstrząsów i tąpań (tabl. 1) poprzez równanie (3.9b), którego parametry mogą zmieniać swe wartości w przypadku napływu znacznej liczby nowych danych, tzn. w przypadku gdy wartości $P(T|E)$ w ostatnim wierszu tablicy 1 ulegają istotnym zmianom.

5. JESZCZE JEDNA DEFINICJA

Jeżeli zauważy się, że równania (4.2a,b) określają prawdopodobieństwo zdarzenia „wystąpił wstrząs o energii E (lub w klasie ε_j) i tąpnęło", to pozostaje już tylko jeden krok do sformułowania definicji zagrożenia tąpnięciem, równie prostej i konstruktywnej, jak podane poprzednio definicje zagrożenia sejsmicznego i oczekiwanego ryzyka finansowego. Choć wykracza to nieco poza tematykę tej publikacji – definicję taką trzeba sformułować, gdyż brak jej – lub bardzo trudno ją znaleźć – w literaturze górniczej.

W rachunku prawdopodobieństwa znane jest twierdzenie „o prawdopodobieństwie całkowitym" (np. Benjamin, Cornell 1977; Feller 1966, Fisz 1969). Chung (1974) ujmuje je tak (tłum. J.K.) „Niech $\Omega \quad \sum_n A_n$ stanowi podział przestrzeni prób na zbiory rozłączne. Wówczas dla dowolnego zdarzenia B

$$P(B) = \sum_n P(A_n)\ P(B|A_n)\text{"}$$

(porównaj z równaniem (4.2b) dla $n = 1$).

W omawianym przypadku „przestrzeń prób" to zakres (oś) możliwych logarytmicznych energii, w teorii od $-\infty$ do $+\infty$ a w praktyce, na przykład od 0 do 10 (od 10^0J do 10^{10}J). „Podział Ω", to podział osi energii na odcinki (np. jednostkowe lub na klasy ε_j). Jeżeli w cytowanym wyżej równaniu zapisze się T („tąpnięcie") zamiast B oraz ε_j zamiast A_n, wówczas, biorąc pod uwagę, na przykład 11 klas energii, zapisać można

$$P(T) = \sum_{j=0}^{10} P(\varepsilon_j) P(T \mid \varepsilon_j) \tag{5.1}$$

Załóżmy teraz, że „zbiory rozłączne" A_n (lub klasy ε_j) maleją tak, że $P(A_n) \rightarrow p(A)\mathrm{d}A$ lub równoważnie $P(\varepsilon) \rightarrow p(E)\mathrm{d}E$, co oznacza przejście do ciągłego rozkładu gęstości $p(E)$ prawdopodobieństwa (wystąpienia logarytmicznej energii E). Z równania (5.1) otrzymuje się wówczas

$$P(T) = \int_{-\infty}^{\infty} p(E)P(T \mid E)\mathrm{d}E \tag{5.2}$$

W tej postaci Fisz (1969) przedstawił „uogólnione twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym" dla zmiennych typu ciągłego.

Równania (5.1) i (5.2) umożliwiają estymację i prognozę (należy zauważyć, że $P(T|E)$ zmienia się bardzo rzadko (tylko gdy publikowane są nowe statystyki tąpań), a parametry $\overline{E}$ i σ^2 rozkładu $p(E)$ napływają co Δt, z programu prognozującego) całkowitego prawdopodobieństwa tąpnięcia – równanie (5.2) bardziej w teorii, a równanie (5.1) w praktyce. Mając konstruktywne (czyli umożliwiające obliczenie) estymatory, zaproponować można definicję:

(Prognozowane w chwili *t*) zagrożenie $Z^T_{\Delta,S}(t)$ tąpnięciem jest to całkowite prawdopodobieństwo tąpnięcia w obszarze *S* i w okresie (*t*, *t*+Δ*t*)

$$\boldsymbol{Z^T_{\Delta,S}(t) \equiv P_t(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_t(E)P(T|E)\,\mathrm{d}E} \tag{5.3}$$

Definicja ta, w związku z tym, że jest definicją nową, zasługuje na komentarz:

1. Jako prawdopodobieństwo $0 \leq Z^T_{\Delta,S}(t) \leq 1$, zagrożenie tąpnięciem ma dobrze zdefiniowaną miarę liczbową.
2. Zagrożenie tąpnięciem jest ciągłą funkcją czasu t i nie dotyczy żadnego konkretnego zdarzenia lecz dotyczy obszaru S i okresu $(t, t + \Delta t)$.
3. Gdy umie się aproksymować rozkłady $p(E)$ i $P(T|E)$, to definicja (5.3) jest konstruktywnym estymatorem i predyktorem zagrożenia tąpnięciem. Proponuje się zatem wykorzystanie równania (3.9b) do aproksymacji $P(T|E)$, oraz rozkładu normalnego (4.5a) z parametrami $\overline{E}(t + 1)$ i $\sigma^2(t + 1)$ prognozowanymi metodą prognozy liniowej do aproksymacji $p(E)$. Całkę w (5.3) obliczać należy numerycznie. Przybliżona wartość $Z^{\mathrm{T}}_{\Delta,\mathrm{S}}(t)$ zagrożenia tąpnięciem (w okresie $(t, t + \Delta t)$ i w obszarze S) jest więc łatwa do obliczenia.
4. „Przestrzeń" możliwych wartości Z^T, czyli odcinek (0,1) proponuje się podzielić na segmenty $(0–10^{-5} – 10^{-4} – 10^{-3} – 1)$ i nazywać je, odpowiednio, stanami a, b, c, d zagrożenia tąpaniami. Sugestia ta wiąże się z godzinową lub 15-minutową jednostką czasu i obszarem S obserwacji obejmującym, na przykład jedną ścianę. Wówczas, jeśli Δt = 15 min i „*S*" to ściana, „stan a" oznacza mniejsze od 10^{-5} prawdopodobieństwo tąpnięcia w najbliższym kwadransie w obserwowanej ścianie, ale na przykład prawdopodobieństwo tąpnięcia w ciągu trzech lat $P = (1–10^{-5})^{105120} \approx 0{,}35$ (bo 3 x 365 x 24 x 4 = 105120), zatem nie jest to prawdopodobieństwo zerowe.
5. Jakość prognozy zagrożenia tąpnięciem w oczywisty sposób zależy od jakości prognozy energii – czyli od jakości prognoz $\overline{E}(t + 1)$ i $\sigma^2(t + 1)$ – oraz od jakości informacji statystycznej (z przeszłości) o związku $p(T|E)$ tąpnięć z energiami

wstrząsów. Należy też pamiętać, że realnie dostępna prognoza energii dotyczy energii całkowitej log $E^C(t)$, a nie energii „nadchodzącego wstrząsu”.

6. Symbol zagrożenia tąpnięciem można skracać do postaci Z^T lub $Z^T(t)$, zawsze odróżniając od zagrożenia sejsmicznego (1.1).

6. ZAKOŃCZENIE I WNIOSKI

W publikacji tej podano definicje i estymatory umożliwiające przybliżone obliczanie zagrożenia sejsmicznego i oczekiwanego ryzyka finansowego – w szczególności w warunkach akcji ratowniczej po tąpnięciu. Podano też przybliżoną lecz konstruktywną definicję i estymator zagrożenia tąpnięciem, co jest nowością w literaturze przedmiotu.

1.a. Sekwencyjna prognoza zagrożenia i ryzyka jest możliwa i łatwa, gdy jest dostępna sekwencyjna prognoza parametrów rozkładu energii sejsmicznej.

1.b. Gdy celem prognozy oczekiwanego ryzyka finansowego jest ułatwienie (np. Kierownikowi Akcji) podejmowania (porównywania) decyzji, szczególnie wygodne jest równanie (4.4d).

2. Dysponujemy metodą i programem sekwencyjnej (powtarzanej co Δt, na przykład co 15 min lub co godzinę) prognozy parametrów rozkładu całkowitej (logarytmicznej) energii sejsmicznej, istnieją też niezbędne dane statystyczne; można więc estymować ryzyko finansowe oraz zagrożenie sejsmiczne i zagrożenie tąpnięciem.
3. Dokładność prognoz zagrożenia i ryzyka zależy od dokładności bieżącej (sekwencyjnej) prognozy parametrów rozkładu energii oraz od dokładności statystycznej (historycznej) informacji o prawdopodobieństwie tąpnięcia wskutek wstrząsu.

Literatura

1. Barański A. (2003): *Analiza zmian stanu zagrożenia tąpaniami w latach 1994–2003 w kopalniach tworzących obecnie Kompanię Węglową S.A., Tąpania' 2003*. Katowice, GIG.
2. Barański A., Barańska A., Etryk W. (1999): *Kształtowanie się zagrożenia tąpaniami w polskich kopalniach węgla kamiennego w latach 1994–1998, Tąpania' 99*. Katowice, GIG.
3. Benjamin J.R., Cornell C.A. (1977): *Rachunek prawdopodobieństwa, statystyka matematyczna i teoria decyzji dla inżynierów*. Warszawa, WNT.
4. Borys G. (1996): *Zarządzanie ryzykiem kredytowym w banku*. Warszawa, PWN.
5. Chung K.L. (1974): *Elementary probability theory*. New York, Springer-Verlag.
6. Cramer H. (1930): *On the Mathematical Theory of Risk*. Stockholm, Skandia Jub. Volume.
7. Cramer H. (1955): *Collective Risk Theory*. Stockholm, Skandia Jub. Volume.
8. DeGroot M. (1981): *Optymalne decyzje statystyczne*. Warszawa, PWN.
9. Dubiński J., Konopko W. (2000): Tąpania – ocena, prognoza, zwalczanie. Katowice, GIG.
10. Feller W. (1966): *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*. Warszawa, PWN.
11. Fisz M. (1969): *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna*. Warszawa, PWN.

12. Gerber H. (1979): *An Introduction to Mathematical Risk Theory*. Philadelphia, Huebner Fund.
13. Gibowicz S.J., Kijko A. (1994): *An Introduction to Mining Seismology*. New York, Academic Press.
14. Hahn G.J., Shapiro S.S. (1969): *Statistical Models in Engineering*. New York, Wiley.
15. Jorion Ph. (2001): *Value at Risk*. New York, McGraw-Hill.
16. Kajdasz Z., Kornowski J., Nowak W., Waśko A. (2000): *Monitorowanie zagrożenia sejsmicznego dla potrzeb akcji ratowniczej, Tąpania 2000*. Katowice, GIG.
17. Konopko W. (red.), 1998 (i dalsze), Raport roczny (1997) o stanie podstawowych zagrożeń naturalnych i technicznych w górnictwie węgla kamiennego. Katowice, GIG.
18. Kornowski J. (2002): *Podstawy sejsmoakustycznej oceny i prognozy zagrożenia sejsmicznego w górnictwie*. Katowice, GIG.
19. Kornowski J. (2003): *Linear prediction of hourly aggregated AE and tremors energy emitted from a longwall and its performance in practice*. Arch.Min.Sci, vol. 48, s. 315–337.
20. Kornowski J. (2004): *Przewidywanie i prognoza – nie tylko w geofizyce górniczej, Warsztaty 2004*. Kraków, IGSMiE PAN, s. 501–518.
21. Kurzeja J. (2004): *Sekwencyjna prognoza emisji sejsmicznej generowanej eksploatacją pokładu węgla.* Katowice, GIG (Praca doktorska).
22. Lomnitz C. (1994): *Fundamentals of Earthquake Prediction*. New York, J. Wiley.
23. Lundberg F. (1903): *Approximerad Framstallning av Sannolikhetsfunktionen*. Uppsala, Almgvist and Wiksell.
24. Marcak H., Zuberek M.W. (1994): *Geofizyka górnicza*. Katowice, Śląskie Wydawnictwo Techniczne.
25. Moore P.G. (1975): *Ryzyko podejmowania decyzji*. Warszawa, PWE.
26. Niczyporuk Z. (red.) (2000): *Podstawy zarządzania bezpieczeństwem w czasie akcji ratowniczej*. Katowice, GIG.
27. Raiffa H. (1969): *Decision Analysis, Introductory Lectures on Choices under Uncertainty*. London, Addison-Wesley.
28. Ronka-Chmielowiec (1997): *Ryzyko w ubezpieczeniach – metody oceny*. Wrocław, Wydaw. Akademii Ekonomicznej.
29. Sobala J., Rosmus P. (1997): *System zarządzania bezpieczeństwem pracy w zakładach górniczych*. Katowice, GIG.
30. Surma A., Kornowski J. (2002): *Liniowa prognoza zagrożenia sejsmicznego na podstawie obserwacji w rejonie ściany 37/510 kopalni „Wesoła”.* Ochrona Pracy i Środowiska w Górnictwie nr 12.
31. VonNeumann J., Morgenstern O. (1947): *Theory of Games and Economic Behaviour*. Princeton, Princeton Univ. Press.
32. Wald A. (1950): *Statistical Decision Functions*. New York, J. Wiley.
33. Zeliaś A. (red.) (1998): *Statystyczne metody oceny ryzyka w działalności gospodarczej*. Wrocław, Wydaw. Akademii Ekonomicznej.

Recenzent: dr inż. Andrzej Krowiak