

---

# WYBRANE PROBLEMY INŻYNIERSKIE

NUMER 2

INSTYTUT AUTOMATYZACJI PROCESÓW TECHNOLOGICZNYCH  
I ZINTEGROWANYCH SYSTEMÓW WYTWARZANIA

---

Krzysztof JAMROZIAK\*

Wydział Nauk o Bezpieczeństwie, Wyższa Szkoła Oficerska Wojsk Lądowych  
im. gen. Tadeusza Kościuszki we Wrocławiu

\* krzysztof.jamroziak@interia.pl

## WPLYW TARCIA SUCHEGO NA DYSSYPACJĘ ENERGII UDERZENIA

**Streszczenie:** W pracy omówiono znaczenie tarcia suchego w rozpraszaniu energii uderzenia balistycznego. Proces przebijania kompozytowych osłon balistycznych kinetycznymi pociskami uzależnia się od wpływu tłumienia i rozpraszania energii uderzającego pocisku w przebijaną osłonę. Skoncentrowano się na badaniach symulacyjnych, w których obok tłumienia typu wiskotycznego występuje parametr opisujący tarcie suche.

### 1. Wstęp

Mechanizmy rozpraszania energii najczęściej postrzega się jako tłumienie drgań w układach mechanicznych. Zjawisko to związane jest z rozpraszaniem energii mechanicznej generowanej ruchem układów mechanicznych. Generalnie w takich układach wyróżnia się trzy rodzaje tłumienia, a mianowicie:

- a. tłumienie wiskotyczne;
- b. tarcie suche;
- c. tarcie wewnętrzne.

W analizie dynamiki ruchu drgającego tłumienie wiskotyczne i tarcie suche odgrywają istotne znaczenie. W mechanice stosowane procedury [1, 2, 3, 4] identyfikacji dyssypacji energii mechanicznej opierają się na wykorzystaniu modeli liniowych lub nieliniowych w różnej konfiguracji. Procedury identyfikacji, w których siła oddziaływania elementu sprężysto-tłumiącego na masę  $m$  zależy jedynie od przemieszczenia  $x$  i prędkości  $\dot{x}$ , sprowadza się do określenia postaci funkcji  $F(x, \dot{x})$ , którą można podzielić na część sprężystą  $F_s(x)$  zależną liniowo od przemieszczenia i część dyssypatywną (tłumienie wiskotyczne) zależną liniowo od prędkości  $F_l(\dot{x})$ . Jednakże liniowa postać funkcji oddziaływania siły elementu sprężysto-tłumiącego  $F(x, \dot{x}) = c\dot{x} + kx$  nie opisuje np. zjawiska histerezy. Najprostszy opis tego zjawiska wymaga wprowadzenia modelu tarcia suchego, oprócz liniowego tłumienia wiskotycznego.

Praca poświęcona została analizie pewnego układu zdegenerowanego modelującego proces dyssypacji energii w materiale z uwzględnieniem wpływu tarcia suchego. Na przykładzie wybranego modelu przeprowadzono analizę dyssypacji energii w uderzaną osłonę balistyczną i wpływ siły oporu materiału na deformację osłona-masa uderzająca.

## 2. Tarcie suche, definicja i charakterystyka

W analizie układu mechanicznego z tarciem suchym zakłada się, że siła tarcia ma wartość stałą. Zjawisko to zachodzi na styku poruszających się względem siebie ciał. Siła tarcia  $F$  skierowana jest przeciwnie do prędkości względnej ciała, a jej wartość jest proporcjonalna do nacisku  $N$  i jest opisana wzorem:

$$F = \mu N \operatorname{sgn}(\dot{x}), \quad (1)$$

gdzie  $\mu$  to współczynnik tarcia suchego, signum – funkcja znaku definiowana w postaci:

$$\operatorname{sgn}(\dot{x}) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } \dot{x} > 0 \\ 0, & \text{gdy } \dot{x} = 0 \\ -1, & \text{gdy } \dot{x} < 0. \end{cases} \quad (2)$$

Na przykładzie swobodnego ruchu układu z tarciem suchym z pominięciem tarcia wiskotycznego równanie różniczkowe ruchu przyjmie postać:

$$m\ddot{x} + F \operatorname{sgn}(\dot{x}) + kx = 0. \quad (3)$$

Przyjmując warunki początkowe

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0, \quad (4)$$

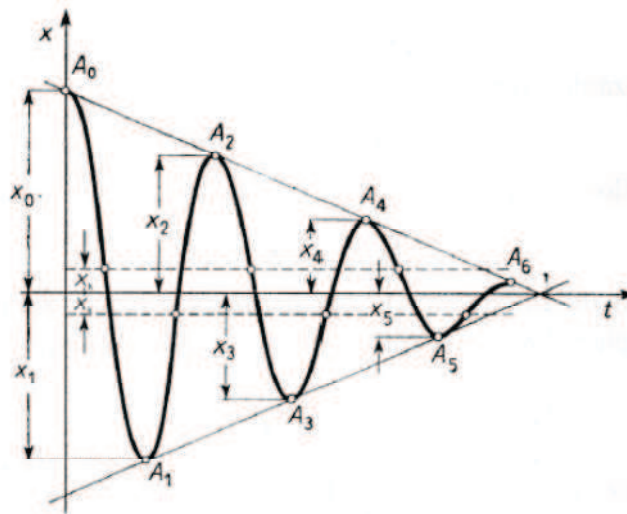
zakłada się, że siła sprężystości musi być większa od oporu tarcia, czyli musi być spełniony warunek:

$$x_0 > \frac{\mu N}{k} = x_k. \quad (5)$$

Równanie ruchu przyjmuje postać:

$$m\ddot{x} = -kx + \mu N = -k \left( x - \frac{\mu N}{k} \right) = -k(x - x_k). \quad (6)$$

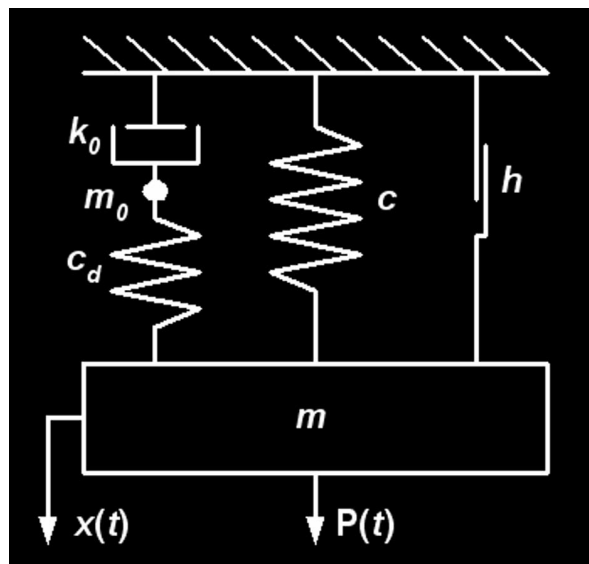
Dalsza analiza sprowadza się do rozwiązania równań różniczkowych zwyczajnych prezentowanych w pracy [5]. Rozwiązanie można przedstawić w postaci graficznej (rys. 1). Zauważa się, że amplituda maleje z każdym wahaniami o określoną wartość  $2x_k$  aż do ustania ruchu układu, gdyż siła sprężyny będzie mniejsza od siły tarcia.



Rys. 1. Ruch układu tłumionego tarciem suchym  
Fig. 1. A damping motion of system with the dry friction

### 3. Analiza układu wybranego z tarciem suchym

We wstępie określono, że tłumienie i rozpraszanie energii odgrywa pierwszoplanową rolę w procesie niszczenia uderzanych elementów konstrukcji. Przedmiotem niniejszej analizy jest określenie wpływu tarcia suchego opisanego parametrem  $h$ . Ocenie poddano przede wszystkim wpływ tego parametru na charakterystyki czasowe, a także częstotliwościowe układu przy obciążeniach udarowych. Zakłada się, że w zjawisku przebijania materiałów tarcie suche odgrywa decydującą rolę w procesie wytracania energii mechanicznej. Identyfikacji poddano model zdegenerowany typu Zenera (rys. 2).



Rys. 2. Model zdegenerowany typu Zenera z tarciem suchym  
Fig. 2. Zener type degenerated model with dry friction

Założono, że ruch masy uderzającej w osłonie sprowadza się do ruchu pojedynczej masy skupionej  $m$ , na którą działa siła oporu przebijanego materiału  $S$ , zależna od jej położenia  $x$  oraz prędkości  $v$ . Siła ta zależy od przyjętego typu modelu. W przypadku modelu Zenera z tarciem suchym siła ta wyraża się w postaci:

$$S(x, v) = cx + c_d(x - \xi) + hSgn(v), \quad (7)$$

gdzie zmienna  $\xi$  opisuje ruch masy fikcyjnej  $m_0=0$  i spełnia równanie:

$$c_d = (x - \xi) = -k_0 \dot{\xi}. \quad (8)$$

Zgodnie z zasadami dynamiki równanie różniczkowe ruchu przyjmie postać:

$$m\ddot{x} + cx + c_d(x - \xi) + hSgn\dot{x} = P. \quad (9)$$

Rugując zmienną  $\xi$  z równań (8) i (9), obydwa równania można zastąpić pojedynczym równaniem w postaci:

$$m\ddot{x} + hSgn(\dot{x}) + cx + \frac{k_0}{c_d} [(c_d + c)\dot{x} + h\delta(\dot{x})\ddot{x} + m\ddot{x} - \dot{P}] = P, \quad (10)$$

gdzie  $\delta(\dot{x})$  jest funkcją Diraca z prędkości i znika dla prędkości różnych od zera. Siłę oporu ruchu w układzie zdegenerowanym opisuje więc złożone wyrażenie:

$$S = hSgn(\dot{x}) + cx + \frac{k_0}{c_d} [(c_d + c)\dot{x} + h\delta(\dot{x})\ddot{x} + m\ddot{x} - \dot{P}] \quad (11)$$

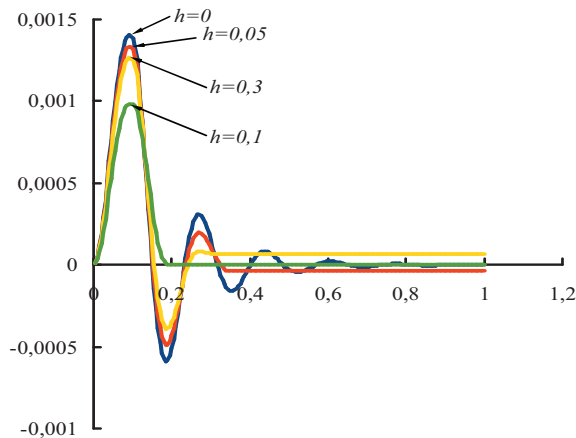
Ostatecznie na podstawie pracy [6] rozwiązaniem równania jest funkcja  $P(x)$  opisana zależnością:

$$P(x) = h + cx + k_0 v_z \left( 1 - e^{\frac{-c_d x}{k_0 v_z}} \right). \quad (12)$$

Ze względu na złożoną postać równania dla modelu zdegenerowanego dalsze analizy zostały przeprowadzone techniką numeryczną. Badania symulacji charakterystyk czasowych i częstotliwościowych, w których parametrem zmiennym (analizowanym) był parametr tarcia suchego  $h$ , przeprowadzono dla różnych jego wartości. Rozwiązania uzyskano, stosując oprogramowanie *Mathematica*, zakładając, że w każdym przypadku symulowano wymuszenie impulsowe w postaci:

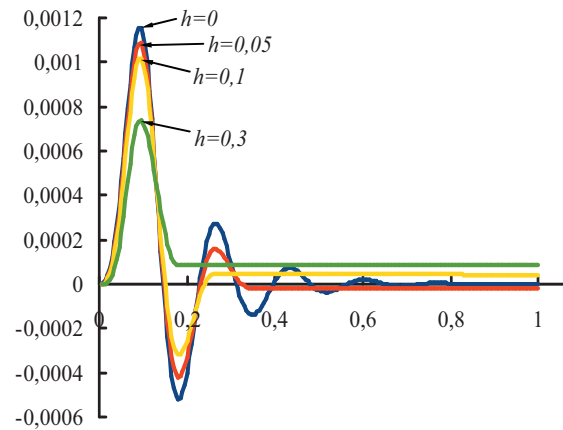
- dla  $t < 0.01$ ;
- gdzie siła jest równa  $P(t) = 100Sgn(Pi t / 0.01)$ , w pozostałym zakresie 0.

Przebiegi czasowe i charakterystyki częstotliwościowe odpowiedzi układu zobrazowano na poniższych rysunkach.



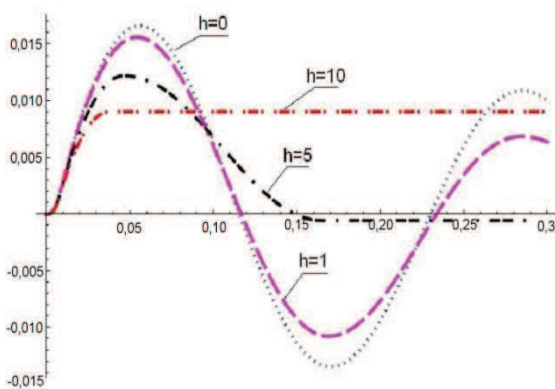
Rys. 3. Charakterystyki czasowe na wymuszenie impulsowe prostokątne przy zadanych wartościach  $h$

Fig. 3. Time characteristics on function impulse of rectangular for different values of  $h$



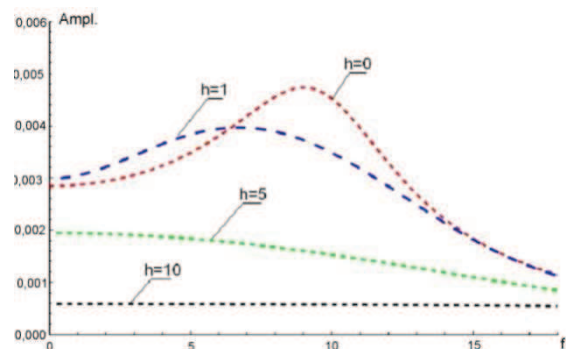
Rys. 4. Charakterystyki czasowe na wymuszenie impulsowe sinusoidalne przy zadanych wartościach  $h$

Fig. 4. Time characteristics on function impulse of sinusoidal for different values of  $h$



Rys. 5. Charakterystyki czasowe analizowanego modelu przy różnych wartościach  $h$

Fig. 5. Time characteristics of analyzed model for different values of  $h$



Rys. 6. Charakterystyki częstotliwościowe analizowanego modelu przy różnych wartościach  $h$

Fig. 6. Frequency characteristics of analyzed model for different values of  $h$

#### 4. Podsumowanie

Omówiono wpływ tarcia suchego na rozpraszanie energii mechanicznej w układzie niszczenia elementów konstrukcji. Na przykładzie układu wybranego przeprowadzono analizę oraz wyprowadzono zależność funkcji  $P(x)$ . Poprzez symulację numeryczną wybrany układ poddano wymuszeniom impulsowym sinusoidalnym i prostokątnym, zmieniając wartość parametru tarcia suchego  $h$ . W ten sposób badano wrażliwość modelu na wartości tarcia suchego. Uzyskane graficzne przebiegi charakterystyk czasowych i częstotliwościowych wykazały zależność tego parametru na tłumienie drgań. Jak zauważono przy wartości  $h=0$

(brak tarcia suchego), obserwuje się istotne różnice w szybkości zanikania drgań. W układzie wybranym (model zdegenerowany) na spadek tłumienia wpływa także element sprężysty opisany parametrem  $c_d$ . Jednakże sam charakter drgań jest gasnący. Odnosząc to do rzeczywistych warunków oraz charakterystyk quasi-statycznych [6] w opisie uderzenia balistycznego proponowany model znacznie wzbogaca zachodzący proces rozpraszania energii.

Podsumowując, stwierdza się, że wpływ tarcia suchego na uzyskane odpowiedzi, jak pokazano w symulacji (rys. 3-6), jest istotny i ma decydujące znaczenie w fazie niszczącej materiał przebijany.

Praca powstała w ramach projektu N N501 063740 sfinansowanego ze środków Narodowego Centrum Nauki

### Literatura

1. Buchacz A.: Analysis of beam hypergraphs by means of exact and approximate methods as models of transverse vibrating subsystems in the synthesis of mechanical and mechatronic systems. "The Archive of Mechanical Engineering", Vol. 58, No. 4, 2010, p. 431–442.
2. Buchacz A., Wrobel A.: Computer aided analysis of piezoelectric plates. "Solid State Phenomena – Trans Tech Publ.", Vol. 164, 2010, p. 239–242.
3. Kulisiewicz M.: "Modeling and identification of nonlinear mechanical systems under dynamic complex loads. Wrocław: Ofic. Wyd. Pol. Wrocław., 2005.
4. Piesiak S.: Identyfikacja układów mechanicznych w dziedzinie nieliniowych zdegenerowanych modeli dynamicznych. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2003.
5. Osiński Z.: Tłumienie drgań mechanicznych. Warszawa: PWN 1979.
6. Jamroziak K. i inni: Identyfikacja uderzenia balistycznego w oparciu o lekkie osłony balistyczne z wykorzystaniem nieliniowych modeli zdegenerowanych. Praca naukowo-badawcza. Cz – 2. Wrocław, WSOWL, 2009, Materiały niepublikowane.

## INFLUENCE OF A DRY FRICTION ON STRIKE ENERGY DISSIPATION

**Summary:** In this paper, an importance of a dry friction in dissipation of ballistic strike energy was presented. The process of ballistic shields' penetration with kinetic projectiles depends on an influence of suppression and dissipation of energy of the striking projectile into penetrated shield. Therefore, the research was focused on simulation, where, aside from viscotic type suppression, the dry friction factor was presented.