

MAGDALENA DUCHNOWSKA*, JAN DRZYMAŁA**

Wpływ jakości nadawy na jakość produktów wzbogacania ocenianych za pomocą wykresu Fuerstenaua dla przypadku symetrycznej krzywej separacji

Wprowadzenie

Wyniki separacji składnika użytecznego z rud i surowców przedstawia się w postaci bilansów i wykresów (Kelly, Spottiswood 1982). Do opisu wyników wzbogacania stosuje się wiele wykresów nazywanych także krzywymi wzbogacania, w tym krzywe wzbogacania, takie jak Fuerstenaua, Mayera, Halbicha. Powoduje to, że do opisu rezultatów wzbogacania wykorzystuje się także wiele zależności matematycznych. W tabeli 1, dla przykładu, pokazano równania matematyczne stosowane do opisu wyników wzbogacania rud pochodzących z Legnicko-Głogowskiego Okręgu Miedziowego.

Jednym z wykresów wzbogacania jest krzywa Fuerstenaua, przedstawiająca zwykle zależność pomiędzy uzyskiem składnika użytecznego w koncentracie ε a uzyskiem składnika nieużytecznego w odpadzie ε_r . Krzywą tę wprowadził Fuerstenau i jego współpracownicy (1989–1992, Sotillo i in. 1997; Drzymała 2006) w celu graficznego przedstawienia wyników wzbogacania węgla. Jest to bardzo użyteczna i praktyczna w stosowaniu krzywa wzbogacania, gdyż wyniki wzbogacania łatwo można opisać zależnościami matematycznymi. Ponadto, jest to tak zwana krzywa alfa-nieczuła, gdyż jej linie odniesienia, to jest linia braku wzbogacania oraz idealnego wzbogacania i mieszania, nie zmieniają się w zależności od jakości nadawy α . Stwarza to możliwość charakteryzowania separacji za pomocą pojedynczego wskaźnika selektywności (efektywności) wzbogacania (rys. 1), podczas gdy opis wzbogacania z reguły wymaga dwóch parametrów jednocześnie. Daje to, przykładowo,

* Mgr inż., ** Prof. dr hab. inż., Wydział Geoinżynierii, Górnictwa i Geologii, Politechnika Wrocławska, Wrocław, e-mail: magdalena.duchnowska@pwr.wroc.pl, jan.drzymala@pwr.wroc.pl

TABELA 1

Przykładowe równania matematyczne stosowane do opisu wyników wzbogacania polskich rud miedzi

TABLE 1

Equations used for delineation of beneficiation results of Polish copper ores

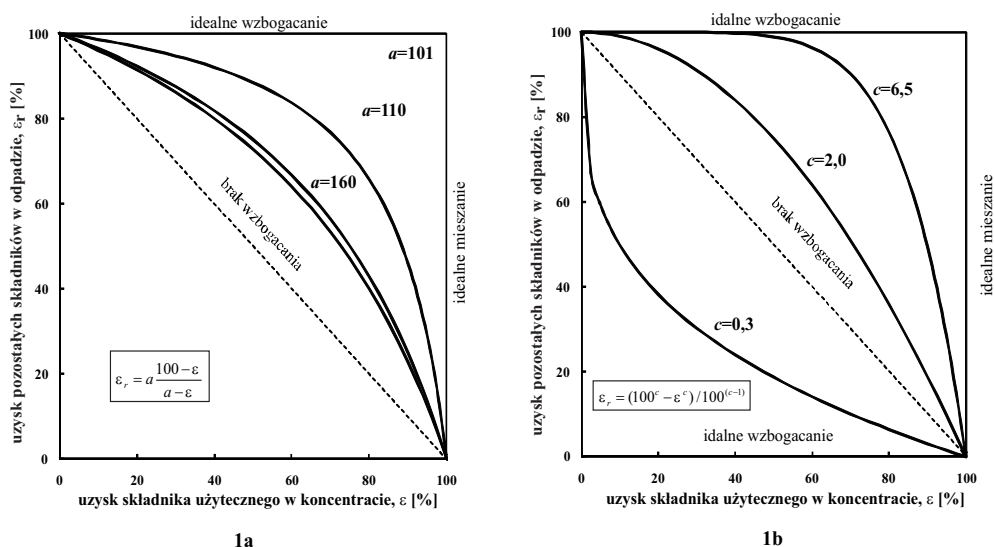
Parametry wzbogacania	Postać matematyczna równania	Źródło
ϑ, α	$\vartheta = a\alpha + b$	Pudło 1971
η, β, α	$\eta = a(\beta - \alpha) + 2b(\beta - \alpha) + 3c(\beta - \alpha) + d$	Madej 1974
ε, β	$\varepsilon = 1 - \left(\frac{\beta - \alpha}{\beta_{\max} - \alpha} \right)^k$	Malewski 2008
β, γ	$\beta = a\gamma^2$	IMN 1994
$\varepsilon_r, \varepsilon$	$\varepsilon_r = a \frac{100 - \varepsilon}{a - \varepsilon}$	Drzymała, Ahmed 2005; Drzymała i in. 2010
β, γ	$\gamma = \frac{a}{\beta} + b$	Saramak 2007
ϑ, β, α	$\vartheta = \frac{b\beta^2 + (a - \alpha)\beta}{(-b - 1)\beta + a}$	Saramak 2007
$\varepsilon_{r(a')}, \varepsilon$	$\varepsilon_{r(a')} = a' \frac{100 - \varepsilon}{a' - \varepsilon} - 0,07 \left(a' \frac{100 - \varepsilon}{a' - \varepsilon} - 95,5 \right)^2 \left(100 - a' \frac{100 - \varepsilon}{a' - \varepsilon} \right)$	Drzymała i in. 2010
β, γ	$\gamma = a(\beta - \alpha)^{-b}$	Foszcz i in. 2010

 α – zawartość składnika użytecznego w nadawie, β – zawartość składnika użytecznego w koncentracji, ϑ – zawartość składnika użytecznego w odpadzie, γ – wychód, ε – uzysk składnika użytecznego w koncentracji, ε_r – uzysk składnika nieużytecznego w odpadzie.

$a, a', b, c, d, k; 95,5$ to współczynniki empiryczne (zachowano oryginalne symbole, stąd ich wartość i znaczenie, mimo tego samego symbolu, jest różna)

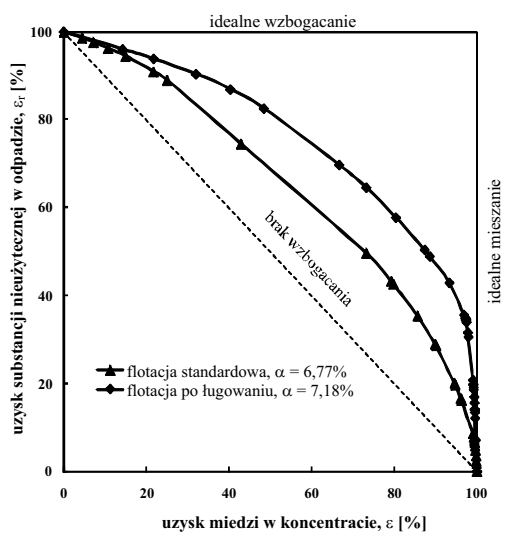
możliwość porównywania na jednym wykresie wyników wzbogacania dla układów ze zmiennym składem nadawy α , czy też zupełnie różnych układów, w których zachodzi separacja (Drzymała 2009). Warunkiem jest, aby wyniki wzbogacania były opisywane tym samym jednoparametrowym równaniem. Dwa z nich pokazano na rysunku 1a i b.

Wyniki wzbogacania przemysłowego i laboratoryjnego często układają się w postaci krzywej wzbogacania symetrycznej względem przekątnej. Pozwala to na opisanie ich za pomocą równania umieszczonego na rysunku 1a, które posiada tylko jeden dopasowywany parametr a . Na rysunku 2 zaprezentowano przykładowe, zaczerpnięte z pracy Łuszczkiewicza i Chmielewskiego (2008, Fig. 15) wyniki dodatkowego wzbogacania przemysłowego flotacyjnego koncentratu miedziowego z Lubina, przedstawione w postaci krzywej wzbogacania Fuerstenaua, na której symetryczność linii wzbogacania, względem diagonalnej, jest bardzo wyraźnie widoczna.



Rys. 1. Wykres wzbogacania Fuerstenau. Jeżeli różne wyniki wzbogacania układają się według jednego typu zależności (rys. 1a zależność symetryczna, rys. 1b zależność niesymetryczna względem diagonalnej) wtedy poszczególne linie na wykresie wyznaczają selektywność procesu

Fig. 1. The Fuerstenau upgrading curve. When different upgrading results form a certain type of curve (Fig. 1a symmetrical, Fig. 1b nonsymmetrical), then the lines in the plot determine process selectivity



Rys. 2. Symetryczność względem diagonalnej wyników wzbogacania wykreślonych na wykresie Fuerstenau dla dodatkowego laboratoryjnego flotacyjnego wzbogacania przemysłowego koncentratu miedziowego. Na podstawie pracy Łuszczkiewicza i Chmielewskiego (2008)

Fig. 2. Symmetrical, in relation to diagonal, results of separation plotted as the Fuerstenau curves for additional laboratory flotation of a final industrial copper concentrate.

Based on Łuszczkiewicz and Chmielewski (2008)

Ważną cechą wykresu Fuerstenaua jest to, że jeżeli dwie różne jakościowo nadawy dostarczają takich samych zależności ε od ε_r , oznacza to, że mają one identyczną selektywność separacji, ale jakość i ilość ich koncentratów oraz odpadów będzie różna. Dlatego nasuwa się pytanie, w jaki sposób krzywa Fuerstenaua kompensuje zmienność jakości nadawy przy tej samej selektywności procesu. Celem tej pracy jest określenie, jak przy stałej selektywności separacji, zmiana zawartości składnika użytecznego w nadawie α wpływa na zmiany jakości koncentratu β i odpadu ϑ .

1. Wskaźniki selektywności dla krzywych wzbogacania symetrycznych względem diagonalnej na wykresie Fuerstenaua

Wyniki separacji przedstawione zgodnie z metodyką Fuerstenaua można opisać za pomocą wielu równań (Drzymała, Ahmed 2005). Często można użyć równania o pełnej symetryczności względem diagonalnej wykresu. Taką zależność można opisać podanym już na rysunku 1a równaniem:

$$\varepsilon_r = a \frac{100 - \varepsilon}{a - \varepsilon} \quad (1)$$

gdzie

- a – wskaźnik selektywności wzbogacania,
- ε – uzysk składnika użytecznego w koncentracie,
- ε_r – uzysk pozostałych składników w odpadzie.

Parametr a tego równania jest jednocześnie wskaźnikiem selektywności procesu. Gdy wskaźnik selektywności procesu a zmniejsza swoją wartość, krzywa zwiększa swoją wypukłość, a proces staje się coraz bliższy idealnemu (Drzymała i in. 2010) (rys. 1a). Z analizy literatury wynika, że matematycznie wskaźnik selektywności dla linii wzbogacania pokazanych na rysunku 1a można wyrazić różnymi wzorami (Hall 1971; Drzymała, Ahmed 2005; Laplante i in. 1989; Krzanowski i in. 2009; Włodarski 2009). Formuły te zebrano w tabeli 1. W tej pracy użyty będzie wskaźnik a zdefiniowany tylko równaniem (1).

Należy zauważyć, że ε oraz ε_r można wyrazić opierając się na parametrach β , ϑ oraz α , stosując zależności (Drzymała 2009):

$$\varepsilon = \frac{\alpha - \vartheta}{\beta - \vartheta} \frac{\beta}{\alpha} 100 = \gamma \frac{\beta}{\alpha} \quad (2)$$

$$\varepsilon_r = \left(100 - \frac{\alpha - \vartheta}{\beta - \vartheta} 100 \right) \frac{100 - \vartheta}{100 - \alpha} \quad (3)$$

TABELA 2

Różne matematyczne sposoby wyrażania wskaźnika selektywności wzbogacania przy symetrycznym względem diagonalnej przebiegu wzbogacania na krzywej Fuerstenaua (rys. 1a)

TABLE 2

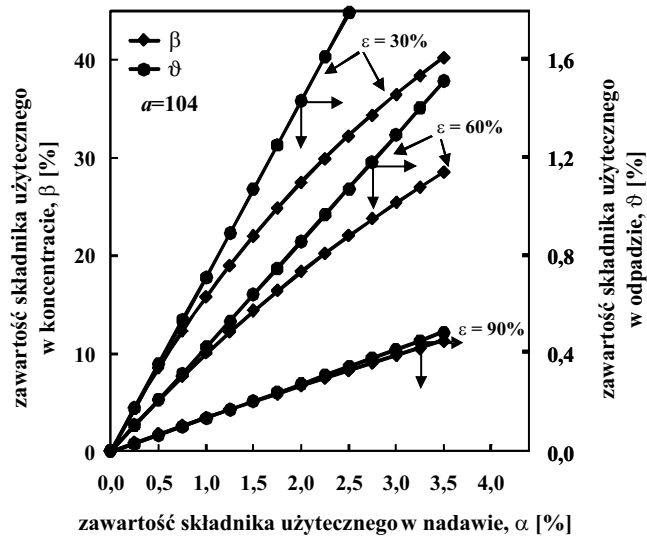
Various mathematical formulas used for expressing selectivity factor for symmetric in-relation-to-diagonal course of upgrading in the Fuerstenau plot (Fig. 1a)

Symbol wskaźnika selektywności wzbogacania	Postać matematyczna równania	Skala wartości wskaźnika	Źródło
a	$\varepsilon_r = a \frac{100 - \varepsilon}{a - \varepsilon}$	$a = 100$ (idealne) $a = \infty$ (brak)	Drzymała, Ahmed 2005
A	$\varepsilon_r = A \frac{100 - \varepsilon}{\varepsilon + A}$	$A = -100$ (idealne) $A = -\infty$ (brak)	Hall 1971
Z	$\varepsilon_r = 100 - \frac{Z\varepsilon}{1 + \frac{\varepsilon}{100}(Z - 1)}$	$Z = 0$ (idealne) $Z = 1$ (brak)	Laplante i in. 1989
F	$F = \varepsilon_r = \varepsilon$	$F = 50$ (brak) $F = 100$ (idealne)	Fuerstenau i in. 1989–1992; Drzymała 2009
a_n, b	$y = 100\Phi(a_n + b\Phi^{-1}(x))$ Φ to dystrybuanta rozkładu normalnego standardowego	$b = 1$ (krzywa symetryczna) $a_n = 0$ (brak) $a_n = \infty$ (idealne)	Krzanowski, Hand 2009; Włodarski 2009

2. Kompensacja wpływu zmienności zawartości składnika użytecznego w nadawie α dla utrzymania stałej selektywności wzbogacania na krzywej Fuerstenaua

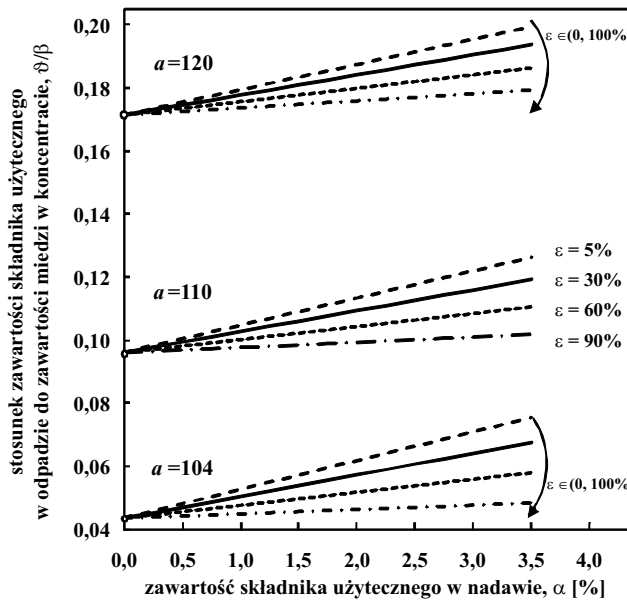
Na podstawie równania na wskaźnik selektywności krzywej symetrycznej a , dla znanej zawartości składnika użytecznego w nadawie α , wyliczono dla danego uzysku ε możliwe zawartości składnika użytecznego w koncentracji β oraz odpadzie ϑ . Wyniki tych obliczeń przedstawiono na rysunku 3. Pokazuje on, że wraz ze wzrostem zawartości składnika użytecznego w nadawie α rośnie jego zawartość w koncentracji i odpadzie, a zależności między β i α oraz między ϑ i α są krzywoliniowe. Funkcje te mają postać wielomianu o trzech dopasowywanych parametrach a_i, b_i oraz c_i , zależnych od wskaźnika selektywności a , to jest $\beta = a_1\alpha^2 + b_1\alpha + c_1$ oraz $\vartheta = a_2\alpha^2 + b_2\alpha + c_2$ (rys. 3).

Aby określić zależność pomiędzy podstawowymi parametrami wzbogacania α, β, ϑ dla krzywej symetrycznej o stałej wartości wskaźnika selektywności a , wyznaczono stosunek zawartości składnika użytecznego w odpadzie oraz w koncentracji, czyli ϑ/β , a następnie odniesiono go do zawartości składnika użytecznego w nadawie α . Wyniki obliczeń przedstawiono na rysunku 4.



Rys. 3. Wpływ zawartości składnika użytecznego w nadawie α na jego zawartość w koncentracie i odpadzie przy $a = 104$ i różnych stałych wartościach ε

Fig. 3. Influence of α on content of a considered component in concentrate and tailing for $a = 104$ and different constant values of ε



Rys. 4. Linie ϑ/β od α dla różnych wartości współczynnika selektywności a oraz ε

Fig. 4. Lines of ϑ/β vs α for different values of efficiency factor a and ε

Dla stałych wartości wskaźnika selektywności a oraz ε otrzymuje się linie proste o równaniu:

$$\frac{\vartheta}{\beta} = A_{i,j}\alpha + B_{i,j} \quad (4)$$

gdzie

- $A_{i,j}$ – współczynnik kierunkowy prostej,
- $B_{i,j}$ – wyraz wolny dla danego uzysku ε_j oraz danego stałego współczynnika selektywności a_i .

Następnie dla wyznaczonych równań sporządzono wykres, przedstawiający zmianę współczynnika $B_{i,j}$ w zależności od zmieniającej się wartości współczynnika selektywności a . Powstałe w ten sposób punkty na wykresie aproksymowano za pomocą przybliżonego równania:

$$B_{i,j} \approx B_j = 0,009a - 0,9 \quad (5)$$

Należy zauważyć, że linie, dla danego a nie przecinają się dokładnie w punkcie $\alpha = 0$, co wynika z przyjętej dokładności obliczeń oraz zastosowanych wzorów.

Cechą charakterystyczną prostych na rysunku 4 jest to, że wraz ze wzrostem uzysku składnika użytecznego ε w koncentracji, przy stałym a , maleje ich nachylenie. Z kolei pogorszenie wzbogacalności nadawy, spowodowane wzrostem wartości parametru selektywności a , przyczynia się do przesunięcia się pęku prostych do góry. Z rysunku 4 wynika także, że wzrost zawartości składnika użytecznego w nadawie α powoduje, że następuje wzrost ilości składnika użytecznego zarówno w koncentracji β jak i w odpadzie ϑ . Ponadto, przy stałej selektywności procesu separacji a i stałym uzysku ε wzrost zawartości składnika użytecznego w nadawie α powoduje większy wzrost jego ilości w odpadzie niż w koncentracji.

Podsumowanie i wnioski

Wyniki wzbogacania wykreślone na krzywych Fuerstenaua dają się często opisać za pomocą tego samego równania z jednym dopasowywanym parametrem. Wtedy parametr ten może być wykorzystany jako wskaźnik selektywności wzbogacania. Dla równania $\varepsilon = a(100 - \varepsilon_r)/(a - \varepsilon_r)$, lub równoważnego, przy stałej selektywności wzbogacania, czyli stałej wartości wskaźnika selektywności a , wzrost zawartości składnika użytecznego w nadawie α powoduje, że następuje wzrost ilości składnika użytecznego zarówno w koncentracji β jak i w odpadzie ϑ , przy czym przy stałej wartości ε stosunek ϑ do β jest linowo zależny od α . Można zatem stwierdzić, że przy stałej selektywności procesu separacji a , oraz

przy stałym ε , wzrost zawartości składnika użytecznego w nadawie powoduje większy wzrost jego ilości w odpadzie niż w koncentracji.

Praca wykonana w ramach badań statutowych Instytutu Górnictwa Politechniki Wrocławskiej (343165/I11)

LITERATURA

- Drzymała J., 2006 – Atlas of upgrading curves used in separation and mineral science and technology. *Physicochem. Probl. Miner. Process.* vol. 40, s. 19–29.
- Drzymała J., 2009 – Podstawy mineralurgii. Wyd. 2, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Warszawa.
- Drzymała J., Ahmed H.A.M., 2005 – Mathematical equations for approximation of separation results using the Fuerstenau upgrading curves. *Int. J. Miner. Process.* vol. 76, z. 1–2, s. 55–65.
- Drzymała J., Łuszczkiewicz A., Foszcz D., 2010 – Application of upgrading curves for evaluation of past, present, and future performance of a separation plant. *Mineral Processing and Extractive Metall. Rev.* vol. 31 (3), s. 165–175.
- Foszcz D., Niedoba T., Tumidajski T., 2010 – Analiza możliwości prognozowania wyników wzbogacania polskich rud miedzi uwzględniającego stosowaną technologię. *Górnictwo i Geoinżynieria* z. 4/1, s. 25–36.
- Fuerstenau D.W. et al., 1988–1992 – Coal surface control for advanced fine coal flotation, Final Report, University of California, Berkeley, Final Report DOE/PC/88878-T13, DE92 015625 for U.S. Dept. of Energy. Prepared by Univ. California, Columbia Univ., Univ. of Utah, and Praxis Engineers Inc.
- Hall W.B., 1971 – The mathematical form of separation curves based on two known ore parameters and a single liberation coefficient. *Trans. IMM., Sec. C*, 80, C213–C222.
- IMN, 1994 – Sprawozdanie nr 4463/II/90, Gliwice.
- Kelly E.G., Spottiswood D.J., 1982 – Introduction to mineral processing. Wyd. 1, New York, Wiley.
- Krzyszowski W.J., Hand D.J., 2009 – ROC curves for continuous data. Wyd. 1. Boca Raton, London, New York, CRC Press/Taylor & Francis Group.
- Laplante A., Kaya M., Smith H.W., 1989 – The effect of froth on flotation kinetics—a mass transfer approach. *Mineral Processing and Extractive Metall. Rev.* vol. 5, s. 147–168.
- Łuszczkiewicz A., Chmielewski T., 2008 – Acid treatment of copper sulfide middlings and rougher concentrates in the flotation circuit of carbonate ores. *Int. J. Miner. Process.*, vol. 88, nr 1–2, s. 45–52.
- Madej W., 1978 – Ocena procesów wzbogacania, *Prace Instytutu Metali Nieżelaznych*, t. VII, nr 3/78, s. 105–113.
- Malewski J., 2008 – [W:] J. Malewski, J. Drzymała, A. Łuszczkiewicz, U. Kaźmierczak, Ż. Konopacka, J. Górniak-Zimroz. Metoda analizy efektywności produkcji miedzi ze złóż LGOM. Raport Inst. Górn. PWr., seria SPR nr S-69, Wrocław.
- Pudło W., 1971 – O pewnej metodzie aproksymacji krzywych wzbogacania. *Zeszyty Problemowe Górnictwa PAN* z. 2, s. 83–103.
- Saramak D., 2007 – Symulacja efektów pracy układów technologicznych przeróbki rud miedzi z wykorzystaniem kryteriów technologicznych i ekonomicznych. *Górnictwo i Geoinżynieria* z. 4, s. 73–80.
- Sotillo F.J., Fuerstenau D.W., Harris G., 1997 – Surface chemistry and rheology of Pittsburgh No. 8. coal-water slurry in the presence of a new pyrite depressant, *Coal Preparation*, 18, 151–183.
- Włodarski M., 2009 – Porównanie parametrycznej i nieparametrycznej metody obliczania krzywej ROC na przykładzie zbioru sygnałów elektroretinograficznych. *Metody Informatyki Stosowanej* nr 2 (19), s. 177–192.

WPLYW JAKOŚCI NADAWY NA JAKOŚĆ PRODUKTÓW WZBOGACANIA OCENIANYCH
ZA POMOCĄ WYKRESU FUERSTENAU DLA PRZYPADKU SYMETRYCZNEJ KRZYWEJ SEPARACJI

Słowa kluczowe

Wzbogacanie, separacja, selektywność, flotacja

Streszczenie

Jeżeli wyniki wzbogacania dają się opisać na tzw. wykresie Fuerstenau krzywą opisywaną równaniem matematycznym z jednym dopasowywanym parametrem, wtedy parametr ten może być wykorzystany jako wskaźnik selektywności wzbogacania. Jeżeli równanie to ma postać $\varepsilon = a(100 - \varepsilon_r)/(a - \varepsilon_r)$ (gdzie ε oznacza uzysk składnika użytecznego w koncentracji, a ε_r uzysk nieużytecznego składnika w odpadzie), wtedy przy stałej selektywności wzbogacania (stałe a) wzrost zawartości składnika użytecznego w nadawie α powoduje, że następuje wzrost ilości składnika użytecznego zarówno w koncentracji β jak i w odpadzie ϑ , przy czym przy stałym uzysku składnika użytecznego w koncentracji ε stosunek ϑ do β rośnie liniowo z α . Oznacza to, że przy stałej selektywności procesu separacji a oraz stałym uzysku składnika użytecznego w koncentracji ε wzrost zawartości składnika użytecznego w nadawie α powoduje większy wzrost ilości składnika użytecznego w odpadzie niż w koncentracji.

INFLUENCE OF FEED QUALITY ON QUALITY OF SEPARATION PRODUCTS EVALUATED BY MEANS
OF THE FUERSTENAU PLOT FOR SYMMETRICAL SEPARATION CURVES

Key words

Upgrading, separation, selectivity, flotation

Abstract

When mineral processing separation results, for either constant or varying quality of the feed, can be approximated on the so-called Fuerstenau upgrading plots with the same one-fitting parameter a , then this parameter can be used as a selectivity indicator. If the equation has a form $\varepsilon = a(100 - \varepsilon_r)/(a - \varepsilon_r)$, where ε_r stands for recovery of non-useful component in tailing while ε is the recovery of useful component in the concentrate, then at the same selectivity of upgrading (constant a) the increase of the useful component in the feed α results in an increased amount of this component in both concentrate β and tailing ϑ , while the ratio of ϑ to β is linearly dependent on α when ε is constant. Thus, at a constant selectivity a and constant ε an increase in α leads to a greater increase of the considered component in the tailing ϑ than in the concentrate β .