

# Rozdzielanie zawiesin ciał stałych w cieczach na drodze filtracji z kompresją tworzonych osadu.

## I. Teoretyczny opis filtracji z równoczesną kompresją osadu

*Jacek Kocurek, Michał Palica  
Politechnika Śląska w Gliwicach*

### 1. Wstęp

Rozdział zawiesin ciał stałych w cieczach ma duże znaczenie praktyczne. Proces ten występuje w wielu gałęziach przemysłu, a w szczególności w technologiach oczyszczania ścieków komunalnych i przemysłowych oraz wielu innych dziedzinach działalności człowieka. Oddzielenie od cieczy zanieczyszczeń stałych, często silnie toksycznych, ma ogromne znaczenie w szeroko rozumianej gospodarce wodno ściekowej i w ochronie środowiska, łatwiej bowiem składować odzyskane w procesie filtracji w formie placka filtracyjnego odpowiednio zabezpieczone ciała stałe na składowiskach i równocześnie zawracać do obiegu technologicznych ciecz klarowną (filtrat), niż zawiesiny lub osady o wysokiej wilgotności. Proces filtracji nie jest tani i dlatego tak ważny jest możliwie poprawny jego opis umożliwiający wybór odpowiedniego urządzenia filtracyjnego i możliwość sterowania procesem poprzez stosowny dobór wartości parametrów procesowych.

Przez zawiesinę rozumie się potocznie mieszaninę ciała stałego i cieczy. W zależności od wzajemnego stosunku ilościowego tych składników może ona mieć charakter zawiesiny swobodnej, gdy drobin ciała stałego nie stykają się ze sobą, lub szlamu, gdy cząstki nie są zawieszane swobodnie i znajdują się ze sobą w kontakcie. Swobodne zawiesiny występują najczęściej i ich rozdział na drodze filtracji jest efektywny i dość szeroko opisany [1,2,3,4], natomiast gęste szlamy można mechanicznie osuszać praktycznie tylko na drodze kompresji, którą przeprowadza się np. na prasach filtracyjnych.

Zarówno w przypadku filtracji jak i kompresji występuje rozdział na przegrodzie przepuszczalnej tylko dla fazy ciekłej. Siłą napędową procesu jest tutaj różnica ciśnień po obydwu stronach przegrody. W praktyce przemysłowej filtracja i kompresja mogą zachodzić bezpośrednio jako procesy następcze (na prasach filtracyjnych). Jeżeli na tego typu urządzeniach rozdzielana jest zawiesina swobodna, to na skutek jej pompowania na przegrodę w pierwszym etapie następuje filtracja i stopniowo tworzy się plack. Gdy wypełni on całą dostępną mu przestrzeń, dalsza filtracja nie jest możliwa i głębsze jego osuszenie wymaga kompresji powstałego osadu. Dokonuje się jej przy pomocy specjalnych nieprzepuszczalnych, elastycznych przepon umieszczonych wewnątrz ramy w płaszczyźnie równoległej do powierzchni filtracji [3]. Po zakończeniu filtracji przestrzeń ograniczoną przeponą wypełnia się sprężonym powietrzem i następuje dodatkowe osuszenie placka przez mechaniczne wyciśnięcie resztek cieczy z osadu.

Piecuch i Anielak [5] proponują dla filtracji zawieszin tworzących osady ściśliwe stopniowanie ciśnienia, zamiast użycia od razu przewidywanego ciśnienia procesowego. Dla takiego samego czasu całkowitego tego procesu filtracji można wówczas uzyskać głębsze odwodnienie osadu, przy czym proces należy prowadzić w odcinkach czasowych dla wzrastających ciśnień tak, by suma tych odcinków odpowiadała całkowitemu czasowi filtracji przy maksymalnym ciśnieniu. W warunkach przemysłowych najchętniej stosowane są typowe prasy ROW [6,7] lub FRAMK [8], przy czym pojawiają się również modyfikacje tych urządzeń [9]. Bliższe informacje nt. działania typowych pras filtracyjnych i filtrów ciśnieniowych oraz technologii odwadniania na tego typu urządzeniach znajdują się w monografii T. Piecucha „Technika hydroszlama-wa” [10] oraz w pracy [11].

W warunkach laboratoryjnych zbliżony proces można badać za pomocą filtrów opartych na tzw. celce kompresyjnej [12,13]. W niniejszej pracy wykorzystano do badań testowy filtr ciśnieniowy zaprojektowany i wykonany w Katedrze Inżynierii Chemicznej i Procesowej Politechniki Śląskiej [14,15]. W urządzeniach tego typu zachodzi zjawisko jednokierunkowego przepływu zawiesiny wewnątrz cylindra ku półprzepuszczalnej przegrodzie. Przepływ ten wymuszony jest poprzez nacisk tłoka wywołującego w urządzeniu nadciśnienie względem ciśnienia otoczenia. W pierwszym etapie, który można nazwać klasyczną filtracją z tworzeniem osadu, następuje stopniowe narastanie placka na przegrodzie. Proces ten przebiega wg stałego mechanizmu aż do momentu zetknięcia się tłoka z osadem, od tej chwili rozpoczyna się drugi etap - kompresja utworzonego uprzednio placka (tzw. strefa kompresji). Etap ten trwa tak długo, dopóki cały osad nie osiągnie jednakowej porowatości  $\varepsilon_k$ , równej porowatości osadu pod ciśnieniem kompresji równym przyłożonemu ciśnieniu procesowemu. Idealnie

ujednoczenie porowatości osadu wystąpi po czasie nieskończenie długim, jednak dające się rejestrować zmiany grubości osadu zanikają w skończonym czasie zależnym od grubości osadu i jego podatności na ciśnienie.

## 2. Podstawowe zagadnienia związane z opisem filtracji z tworzeniem osadu oraz kompresją osadów

Tzw. tradycyjny opis procesu filtracji z tworzeniem placka sformułowany przez Rutha [11], który obserwował paraboliczną zależność ilości filtratu od czasu filtracji opiera się na kilku założeniach. Pierwszym jest laminarny przepływ cieczy przez pory utworzonego osadu. Ze względu na wielkość porów i stosowaną w praktyce liniową prędkość przepływu założenie to jest słuszne dla filtracji praktycznie wszystkich typów zawieszin. W opisie tym zakłada się ponadto, że takie parametry osadu, jak porowatość i opór właściwy są stałe w danym momencie, czyli w całej swej objętości osad jest jednorodny. Stała jest też zatem w danym czasie  $\tau$  natężenie przepływu filtratu  $dV/d\tau$  na każdej warstwie placka filtracyjnego. Wyraża się je wzorem [11]:

$$\frac{dV}{d\tau} = \frac{K}{2 \cdot (V + C)} \quad (2.1)$$

będącym różniczkowaną formą eksperymentalnego równania:

$$(V + C)^2 = K\tau \quad (2.2)$$

opartego, jak wspomniano, na obserwowanej w doświadczeniach parabolicznej zależności ilości uzyskanego filtratu  $V$  od czasu filtracji  $\tau$ . W równaniach (2.1) i (2.2)  $K$  jest stałą szybkości filtracji zależną od oporu osadu, a stała  $C$  zależy od oporu przegrody. Stała  $K$  jest funkcją parametrów zawiesziny, a także, w przypadku placków ściśliwych, przyłożonego ciśnienia procesowego. Jej budowa bywa różna w zależności od wyjściowych równań, zawsze jednak jej elementem składowym jest opór właściwy osadu  $\alpha$ . Definiowany bywa on w różny sposób, zazwyczaj jako funkcja porowatości osadu, średniej wielkości i współczynnika kształtu cząstek tworzących złożę, lub też średnicy i gęstości występowania porów w osadzie (przy oparciu się na zależności Poiseuille'a) [16,17]. W przypadku osadów ściśliwych struktura złoża zależy od występujących w nich naprężeń. Naprężenia te pochodzą od ciśnienia filtracji i ich wpływ na opór osadu wyraża się różnymi wzorami. Najprostsze równanie określające

wpływ ciśnienia procesowego na opór właściwy osadu, nazywane równaniem Sperry'ego podaje H. P. Grace [18]:

$$\alpha = \alpha_0 P_k^s \quad (2.3)$$

Jego wadą, ale tylko teoretyczną, jest fizykalna niezgodność dla warunku granicznego polegająca na spadku  $\alpha$  do 0 dla ciśnienia kompresji równego 0. Dokładniejsze i wykazujące zgodność z warunkami granicznymi jest równanie zaproponowane przez Tillera [19] opierające się na zależnościach podanych przez Rutha w pracy [20]:

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 P_k^s \quad (2.4)$$

W równaniach (2.3) i (2.4)  $P_k$  to ciśnienie kompresji (jeżeli traktuje się osad jako całość jest ono równe przyłożonemu ciśnieniu procesowemu),  $s$  to tzw. współczynnik ściśliwości (osady nie podatne na ciśnienie mają  $s = 0$ , podatne mają  $s > 0$ ),  $\alpha_0$  i  $\alpha_1$  to stałe.

Dla większości zawiesin, które tworzą osady filtracyjne mało podatne na ciśnienie, wyżej wymienione założenia tradycyjnego opisu procesu pozwalają na dość dokładny i prosty opis filtracji. Im jednak jest większa podatność osadu na ciśnienie, tym bardziej wyraźnie występują odstępstwa od wyżej wymienionych założeń. Średni opór właściwy osadu  $\alpha$  staje się funkcją nie tylko ciśnienia procesowego, ale także koncentracji rozdzielanej zawiesiny. Odstępstwa te próbował korygować Shirato ze współpracownikami [21,22] przy użyciu współczynnika  $J_R$  będącego funkcją ciśnienia i udziału ciała stałego w zawieszynie:

$$\alpha = \alpha_R J_R \quad (2.5)$$

gdzie  $\alpha_R$  to opór właściwy osadu definiowany wg Rutha. Współczynnik ten poprawił zgodność danych doświadczalnych i opisu teoretycznego. W swoich rozważaniach Shirato w [22] zastosował również podział osadu na kilka warstw, różniących się między sobą natężeniem przepływu filtratu. Różnice te wywołane były przez zmianę porowatości osadu w funkcji czasu i odległości od przegrody. Powodują one dodanie do filtratu pochodzącego z powierzchni placzka cieczy wyciśniętej z osadu wskutek jego kompresji.

Analiza wyników wyżej wymienionych badań umożliwiła próbę ogólnego wyjaśnienia mechanizmu procesu kompresji osadów pofiltracyjnych na bazie istniejącej teorii filtracji (wcześniejsze prace eksperymentalne prowadziły do uzyskania równań empirycznych słusznych tylko dla przebadanych zawie-

sin). W swych rozważaniach na temat kompresji i filtracji połączonej z kompresją Shirato posługuje się bezwymiarowym „stosunkiem filtracji”  $U_f$  i „stosunkiem kompresji”  $U_k$  definiowanym przy pomocy grubości ładunku celki kompresyjnej [23,24,25] w różnych momentach charakterystycznych filtracji i kompresji, przy czym pod pojęciem grubości ładunku rozumie się odpowiednie wysokości słupa medium w celce:

$$U_f = \frac{L_0 - L}{L_0 - L_1} \quad (2.6)$$

$$U_k = \frac{L_1 - L}{L_1 - L_2} \quad (2.7)$$

gdzie  $L_0$  – początkowa grubość ładunku celki,  $L_1$  – grubość ładunku na granicy między filtracją a kompresją,  $L_2$  – po zakończeniu kompresji, a  $L$  – to grubość ładunku w danym momencie  $\tau$ . Wartości  $L_0$ ,  $L_1$  oraz  $L_2$  określano na podstawie doświadczeń. O ile wyznaczenie  $L_0$  i  $L_2$  nie budzi specjalnych wątpliwości, to określenie grubości osadu w chwili rozpoczęcia kompresji  $L_1$  obarczone jest znacznym błędem ze względu na brak możliwości bezpośredniego pomiaru. Zarówno  $U_f$  jak i  $U_k$  zmieniają się w zakresie od 0 do 1. Opracowanie wyników doświadczeń metodą zaproponowaną przez Shirato i in. dały dobrą zgodność wyników doświadczeń i obliczeń dla przebadanych przez autorów zawieszin. Badanie przeprowadzono dla stałego ciśnienia całkowitego  $\Delta P$  [24] jak i dla  $\Delta P$  zmiennego w czasie [23].

Swoje prace Shirato i wsp. oparli na wcześniejszych badaniach Terzaghiego [26,27] dotyczących mechaniki gruntów, w których do opisu zachowania się nasyconego cieczą, porowatego złoża zastosował on współczynnik konsolidacji  $C_v$ , będący m. in. funkcją przestrzeni swobodnej  $e$  i współczynnika zmiany objętości  $m_v$ :

$$C_v = \frac{(1 + e)}{\eta \alpha m_v \rho_s} \quad (2.8)$$

gdzie:  $\eta$  - dynamiczny współczynnik lepkości,

$\rho_s$  – gęstość ciała stałego,

przy czym:

$$m_v = -\frac{1}{(1 + e)} \frac{de}{dp} \quad (2.8a)$$

a przestrzeń swobodną można przedstawić jako funkcję porowatości:

$$e = \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \quad (2.8.b)$$

Współczynnik tzw. przestrzeni swobodnej  $e$  informuje ile razy więcej lub mniej jest w osadzie objętości porów od objętości fazy stałej (ziaren), przy czym  $e$  związane jest z  $U_f$  i  $U_k$ . Shirato i wsp. [23] zastosowali zmodyfikowany współczynnik konsolidacji. Opis kompresji osadu, czyli zmiany przestrzeni swobodnej  $e$  w czasie opiera się na równaniu o budowie analogicznej do różniczkowego równania dyfuzji:

$$\frac{\partial e}{\partial \tau} = C_e \left( \frac{\partial^2 e}{\partial \omega^2} \right) \quad (2.9)$$

gdzie  $\tau$  - czas,

w którym to równaniu  $C_e$  to zmodyfikowany współczynnik konsolidacji Terzaghiego:

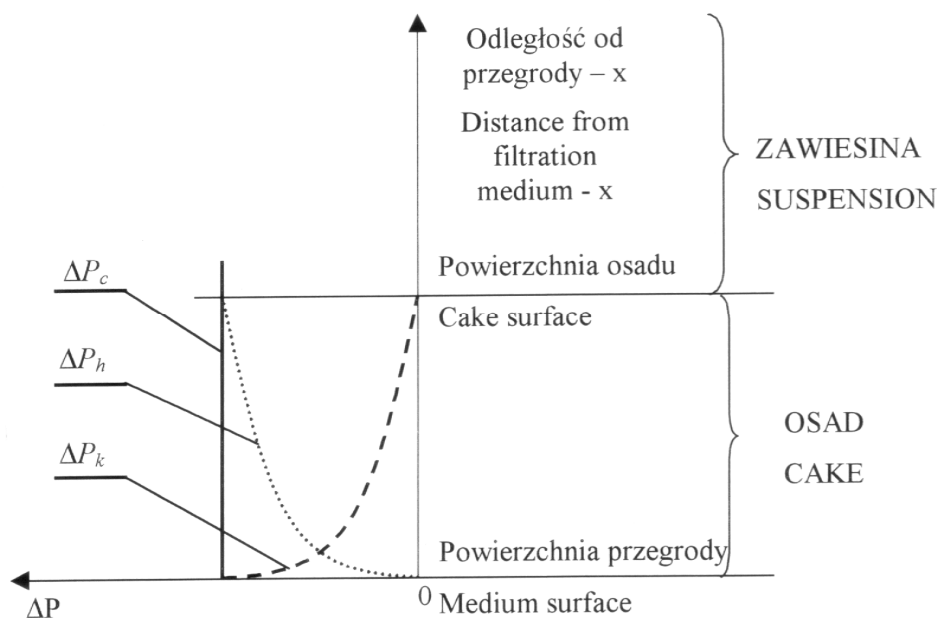
$$C_e = \frac{\rho_s^2}{(1 + e)^2} C_v \quad (2.10)$$

zaś  $\omega$  to wymiar liniowy w tzw. materiałowym układzie współrzędnych, którego bliższe wyjaśnienie znajduje się w rozdziale 3. Jego wartość w osadzie zmienia się w zależności od odległości od przegrody oraz czasu. W celu uproszczenia obliczeń, w pracach [23] i [24] Shirato i in. zastosowali średnią, stałą wartość współczynnika  $C_e$ . Rozwiązanie równania (2.9) po wykorzystaniu w nim (2.10) prowadzi do uzyskania zależności  $U_k$  od czasu kompresji i współczynnika  $C_e$ , ponieważ jak wcześniej wspomniano  $U_k$  zależy od  $e$ . Rozwiązanie to wzorowane jest na pracy Taylora [28]. Jest ono zależne od wstępnego rozkładu ciśnienia kompresji w osadzie. Powyższy opis wymaga zatem znajomości rozkładu ciśnienia kompresji  $\Delta P_k$  w osadzie filtracyjnym ( $\Delta P = f(x)$ ), gdyż zarówno  $e$  jak i  $\alpha$  są funkcjami tej zmiennej. Ciśnienie kompresji (zwane również ciśnieniem kontaktowym) na danej umownej warstwie osadu pochodzi od warstw znajdujących się ponad nią i jest skutkiem hydraulicznego oporu przepływu (spadku ciśnienia hydraulicznego  $\Delta P_h$ ). Jeżeli zaniedbać siły pochodzące od grawitacji jak i opór tarcia osadu o ścianki naczynia, to bilans sił wymaga, by spełnione było równanie:

$$\Delta P_c = \Delta P_h + \Delta P_k \quad (2.11)$$

gdzie  $\Delta P_c$  ciśnienie całkowite.

Wartość  $\Delta P_h$  w zawieszynie i na powierzchni placka podczas filtracji jest równa przyłożonemu ciśnieniu procesowemu  $\Delta P_c$ . Im rozpatrywana warstwa znajduje się dalej od powierzchni osadu, tym większa część ciśnienia procesowego staje się na niej ciśnieniem kompresji. Zjawisko to można zilustrować następującym rysunkiem:



**Rys. 2.1.** Zmiana wartości ciśnienia kompresji  $\Delta P_k$ , ciśnienia hydraulicznego  $\Delta P_h$  oraz całkowite ciśnienie procesowe  $\Delta P_c$ , w zależności od odległości od przegrody

**Fig. 2.1.** Change of compression pressure  $\Delta P_k$ , hydraulic pressure  $\Delta P_h$  and total pressure  $\Delta P_c$  as a dependence of filtration medium distance

Shirato i in. [24] posłużyli się w rozwiązaniu przybliżeniem rozkładu  $\Delta P_k$  w momencie rozpoczęcia kompresji osadu funkcją sinusoidalną opierając się na badaniach doświadczalnych, polegających na pomiarze porowatości osadu w różnych odległościach od przegrody podczas trwania procesu filtracji [29].

Następnym krokiem było uzmiennienie w pracy [25] wartości  $C_e$  w funkcji odległości od przegrody, przy czym Shirato i in. zastosowali tu metody numeryczne. Rozpatrywany osad podzielono na 8 warstw. Uzmiennienie  $C_e$

znacząco poprawiło zgodność danych doświadczalnych z obliczonymi. Na podobnych równaniach oparli swoje rozważania dotyczące filtracji Atsumi i Akayama w pracy [30].

Jak widać z powyższych rozważań, zastosowane przez Shirato i in. metody opisu rozdziału zawieszin na drodze kompresji i filtracji nie bazują na podstawowych równaniach stosowanych w filtracji, lecz na równaniach mechaniki gruntów wyprowadzonych przez Terzagiego. Ponadto opis przebiegu procesu wymagał znajomości (z doświadczeń) wartości grubości osadu w chwili rozpoczęcia kompresji, której to wielkości nie można zmierzyć w sposób bezpośredni.

Kamst, Bruinsma i Graauw [31] badali wpływ kompresji na opór osadu oraz wpływ cieczy z placka filtracyjnego powstałego z filtracji częściowo wykryształizowanego oleju palmowego przepuszczając przezeń powietrze oraz ciekłą frakcję oleju. Praca ta nie ma jednak bliskiego związku z praktyką filtracyjną.

Podobnie Landman, Sirakoff i White w swojej pracy [32] wyprowadzili i rozwiązali numerycznie model opisujący filtrację. Rozwiązanie to jest jednak bardzo skomplikowane ze względu na wykorzystanie rzeczywistych współrzędnych kartezyjskich, a praca ma czysto teoretyczny charakter. Równie skomplikowane ze względu na użycie rzeczywistych współrzędnych jest opracowanie Stamakisa i Tiena dotyczące opisu filtracji z uwzględnieniem wypływu cieczy z komprimowanego osadu [33].

Analityczne rozwiązanie układu równań opisujących filtrację przedstawił w pracy [34] Wu, zakładając jednak stały spadek ciśnienia w placku oraz potęgową zależność oporu osadu od ciśnienia (równanie 2.3). W swych rozważaniach wykorzystał on wspomniany już materiałowy układ współrzędnych i ograniczył się do filtracji przy stałym ciśnieniu.

Wraz z pojawieniem się maszyn liczących o dużej mocy obliczeniowej pojawiła się również możliwość zastosowania modelu matematycznego opartego na podstawowych równaniach przepływu przez złożę porowate (do opisu zarówno filtracji jak i kompresji osadu). Idea takiego ich zastosowania opiera się na podzieleniu osadu na warstwy o bardzo małej grubości i o stałych w danym czasie  $\tau$  parametrach filtracyjnych. Model taki, wykorzystujący w miejscach współrzędnych kartezyjskich tzw. współrzędne materiałowe, pojawił się w pracy Sørensen i in. [35] i został rozwiązany dla przykładowych danych. Ze względu na teoretyczny charakter wspomnianej pracy zdecydowano się na rozwinięcie tego problemu o propozycję opisu za pomocą podobnie skonstruowanego modelu rzeczywistych danych doświadczalnych. Próbę tę podjęto w niniejszej pracy.

Rozważania fizyczne nad przebiegiem procesu odwodnienia zawiesziny zawierają bilans masowy cieczy oraz bilans sił wywołanych przez przyłożone ciśnienie, które w osadzie filtracyjnym rozkłada się na dwie składowe: ciśnienie



cieczy oraz ciśnienie kontaktowe pomiędzy cząsteczkami ciała stałego. W oparciu o równania wymienionych bilansów oraz rozważania dotyczące szybkości przepływu cieczy przez utworzony osad można zestawić układ równań, za pomocą którego możliwe jest numeryczne modelowanie przebiegu filtracji.

### 3. Opis procesu rozdziału zawiesin w oparciu o równanie przepływu przez złożę porowate

Przepływowi cieczy rzeczywistej przez ciało porowate towarzyszy wywołany tarciem spadek ciśnienia. Zjawisko to analizował już w XIX wieku Darcy przy badaniach źródeł miejskich. Sformułował on zależność opisującą szybkość laminarnego przepływu cieczy przez stałe złożę porowate jako wprost proporcjonalną do spadku ciśnienia hydraulicznego  $dP_h$  na warstwie złoża, a odwrotnie proporcjonalną do oporu przepływu i jego grubości:

$$u = \frac{1}{\eta\alpha} \frac{dP_h}{dx} \quad (3.1)$$

Jest to postać zależności ogólnej, zgodnie z którą szybkość przebiegu procesu jest wprost proporcjonalna do jego siły napędowej, a odwrotnie do oporu. W przypadku równania (3.1) opór reprezentowany jest przez iloczyn dynamicznego współczynnika lepkości cieczy  $\eta$  i oporu właściwego złoża porowatego  $\alpha$ .

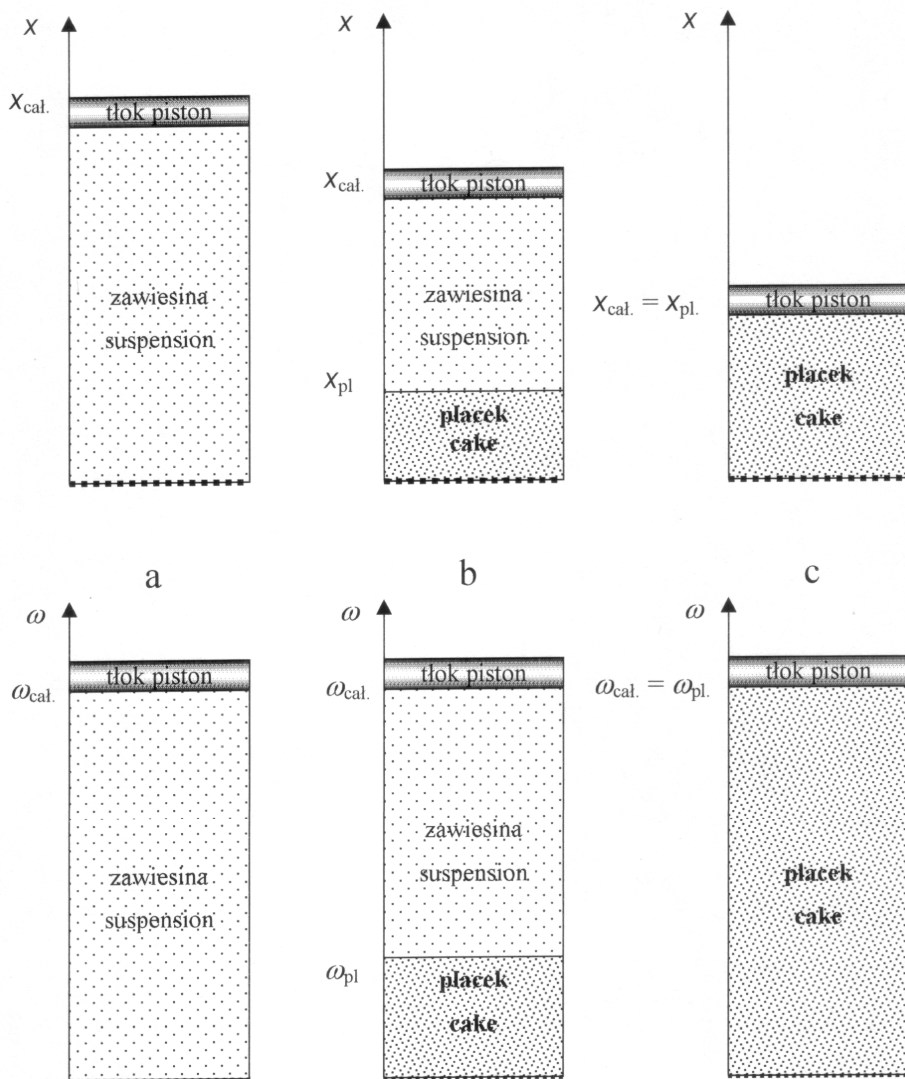
Filtracja i kompresja osadu pofiltracyjnego jest szczególnym przypadkiem przepływu cieczy przez złożę porowate. Podstawowa różnica między tymi procesami, a przepływem przez złożę stacjonarne polega na tym, że placek filtracyjny zmienia swoją grubość, a na skutek kompresji zmienia się także jego porowatość, z którą silnie związany jest opór właściwy osadu. Ponadto w trakcie kompresji cała ciecz wypływająca z filtru wytłaczana jest tylko z porów osadu, co m. in. opisał Piecuch w pracy [11]. Podczas filtracji zawiesin dających osady podlegające kompresji, ciało stałe, pierwotnie znajdujące się w zawieszynie, przemieszcza się wraz z cieczą w kierunku przegrody i względna prędkość ciała stałego w odniesieniu do cieczy  $u$  wynosi 0 (jeśli pominąć sedymentację). W chwili przejścia z zawiesziny do placka (tzw. kolmatacja) drobinę ciała stałego zatrzymane na strukturze osadu uzyskują względną prędkość w odniesieniu do cieczy, nie zatrzymując się jednak względem przegrody i dalej (choć znacznie wolniej od cieczy) przemieszczają się w jej kierunku. Dzieje się tak na skutek kompresji, czyli zmniejszenia objętości placka znajdującego się pomiędzy rozpatrywanymi cząstkami a przegrodą. Zmiana położenia ciała stałego w osadzie względem przegrody znacznie utrudnia zastosowanie równania (3.1) do opisu filtracji szczególnie wówczas, gdy placek ulega dużej kompresji.

Jednym ze sposobów ominięcia tej niedogodności jest traktowanie osadu jako całości o pewnych średnich parametrach. Założenie takie pozwala na poprawny opis filtracji w przypadku rozdziału zawieszin o niskiej zawartości ciała stałego tworzących placki nieściśliwe lub mało ściśliwe.

Opisana powyżej wada równania (3.1) wynika z użycia w nim rzeczywistego układu współrzędnych i można ją wyeliminować przez zastosowanie tzw. współrzędnych materiałowych. Odległość od przegrody jest w nim wyrażona przy pomocy ilości ciała stałego (masa lub objętość) znajdującego się pomiędzy przegrodą, a rozpatrywanym przekrojem. Jeżeli ilość ciała stałego wyrazi się przy pomocy jego objętości, to wówczas odległość we współrzędnych materiałowych będzie miała wymiar [m]:

$$\omega = \frac{V_s}{F} \quad (3.2)$$

Cechą charakterystyczną materiałowego układu współrzędnych jest to, że dana cząstka lub warstwa znajduje się w nim zawsze w tej samej odległości od przegrody niezależnie od tego, czy należy do zawiesziny, czy jest już częścią osadu. W trakcie procesu filtracji przesuwa się jedynie powierzchnia placka, czyli ta jego część, która styka się z tłokiem w momencie rozpoczęcia kompresji. Różnice pomiędzy rzeczywistym i materiałowym układem współrzędnych ilustruje rys. 3.1. Widać na nim, że całkowita grubość osadu i zawiesziny  $x_{cat}$ , wyrażona w rzeczywistych współrzędnych kartezjańskich zmienia się, podczas gdy w materiałowym układzie współrzędnych  $\omega_{cat}$  jest stałe, bo stała jest całkowita ilość ciała stałego nad przegrodą. Grubość osadu  $x_{pl}$  i  $\omega_{pl}$  zwiększa się od 0 do odpowiednio  $x_{cat}$  i  $\omega_{cat}$ . Ponieważ objętość całkowita ciała stałego nad przegrodą nie zmienia się w przypadku współrzędnych materiałowych, gdy całe ciało stałe przechodzi do osadu,  $\omega_{pl} = \omega_{cat}$ .



**Rys. 3.1.** Położenie przegrody, granicy placka oraz tłoka wyrażone we współrzędnych rzeczywistych ( $x$ ) i materiałowych ( $\omega$ ) na początku procesu (a), podczas filtracji (b) i po jej zakończeniu (c)

**Fig. 3.1.** Situation of filtration medium, cake surface and piston in real ( $x$ ) and material ( $\omega$ ) co-ordinates in the beginning of the process (a), during filtration (b) and when the filtration is finished (c)

Po odpowiednich przekształceniach można wyprowadzić różniczkowe równanie wiążące współrzędne materiałowe i rzeczywiste [37]:

$$d\omega = \frac{1}{1+e} dx \quad (3.3)$$

Wstawiając wyrażenie (3.3) do równania (3.1) otrzymuje się zależność Darcy'ego dla materiałowego układu współrzędnych:

$$u = \frac{1}{\eta\alpha(1+e)} \frac{dP_h}{d\omega} \quad (3.4)$$

Równanie (3.4) różni się nieznacznie od podanego w literaturze [35], w którym w prosty sposób wyznaczoną przez Darcy'ego zależność przekształcono do postaci:

$$u = \frac{1}{\eta\alpha} \frac{dP_h}{d\omega} \quad (3.5)$$

Ponieważ  $dx \neq d\omega$ , równanie (3.4) można uznać za bardziej ścisłe.

Jak już wspomniano wcześniej, opór właściwy osadu i jego porowatość jest funkcją odległości od przegrody oraz czasu, jaki upłynął od początku procesu. Odpowiedzialna za to jest właściwość placków filtracyjnych, którą nazywa się ściśliwością, czyli podatność struktury osadu na ciśnienie kompresji. Bezpośrednim skutkiem tego jest zmienna szybkość przepływu cieczy przez osad –  $u$  liczona na pustym przekroju.

Istnieje wiele równań opisujących wpływ ciśnienia kompresji na wartość oporu właściwego osadu  $\alpha$  oraz jego porowatość  $\varepsilon$ . Najstarsze i najprostsze jest ujęcie w formie funkcji potęgowej określane zależnością Sperry'ego [24], które dobrze opisuje zachowanie się osadów o względnie niedużej ściśliwości i które sprawdza się dla niezbyt wielkich zakresów ciśnień. W przypadku dużych zakresów ciśnień i dużej podatności placka na ciśnienie lepszą dokładność daje równanie zaproponowane przez Tiller i Leu [36]:

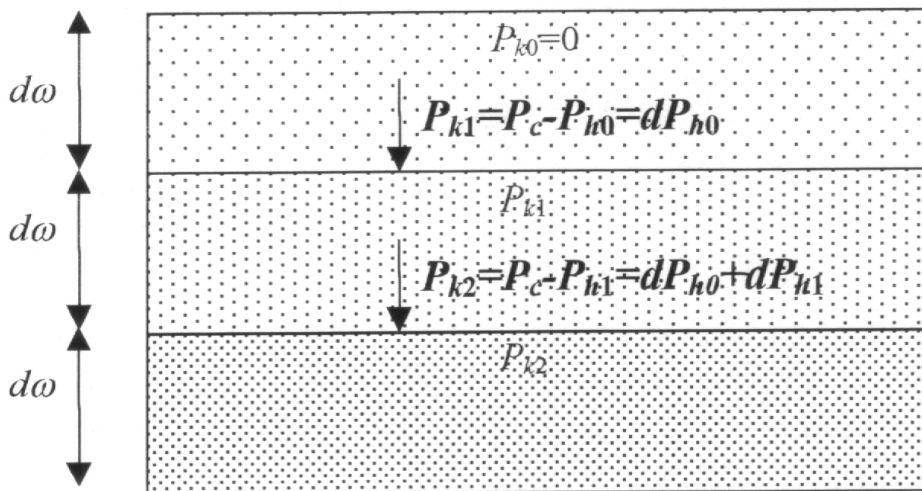
$$\alpha = \alpha_0 \left( 1 + \frac{P_k}{P_a} \right)^s \quad (3.6)$$

zbliżone do równania (2.4), gdzie  $P_a$  to tzw. współczynnik skali. Cytowani autorzy podają również równanie opisujące związek porowatości osadu z ciśnieniem kompresji:

$$(1 - \varepsilon) = (1 - \varepsilon_0) \left( 1 + \frac{P_k}{P_a} \right)^\beta \quad (3.7)$$

Cechą charakterystyczną powyższych równań jest logicznie uzasadniony fakt istnienia zarówno porowatości granicznej  $\varepsilon_0$  jak i granicznego właściwego oporu osadu  $\alpha_0$  przy ciśnieniu kompresji równym 0. Wykładnik  $s$  to współczynnik ściśliwości osadu, a  $\beta$  to współczynnik określający podatność porowatości osadu na ciśnienie.

Ściśliwy osad filtracyjny można rozpatrywać jako zbiór warstw porowatego ciała stałego o różniczkowej grubości  $d\omega$ . Ciecz przepływająca przez warstwę stykającą się z zawiesziną na skutek tarcia przekazuje pewną część ciśnienia hydraulicznego ciała stałemu. Powstała dzięki temu siła nacisku na warstwę znajdującą się poniżej wywołuje w niej ciśnienie kompresji. W warstwie tej również występuje tarcie cieczy o materiał placka i powstała w niej siła dodaje się do wytworzonej w warstwie powierzchniowej i wywiera nacisk na warstwę znajdującą się poniżej. Można to zilustrować następującym rysunkiem:



**Rys. 3.2.** Rozkład ciśnień w warstwach najbliższych powierzchni osadu  
**Fig. 3.2.** Distribution of pressures in the closest to surface layers

gdzie  $dP_{h0}$  to spadek ciśnienia cieczy na skutek oporów przepływu przez warstwę 0, a  $dP_{h1}$  to odpowiedni spadek ciśnienia w warstwie 1. W warstwie powierzchniowej ciśnienie kompresji wynosi zatem 0. Ciśnienie kompresji w warstwie najbliższej przegrody jest bliskie przyłożonemu ciśnieniu procesowemu (niższe o ciśnienie potrzebne do pokonania oporów przepływu filtratu przez przegrodę). Na każdej odległości od przegrody słuszne jest równanie bilansu sił:

$$P_c = P_k + P_h \quad (3.8)$$

Równanie (3.8) zakłada pominięcie sił tarcia osadu o ściany filtru. Związek pomiędzy ciśnieniem kompresji i ciśnieniem hydraulicznym w postaci różniczkowanej przedstawia się następująco:

$$dP_k = -dP_h \quad (3.9)$$

co pozwala na użycie w równaniach opisujących proces rozdziału zawieszin jednego z ciśnień składowych, a mianowicie ciśnienia kompresji, gdyż występuje ono w równaniach na opór właściwy i porowatość osadu (3.6, 3.7). Równanie Darcy'ego (3.4) przyjmie wówczas następującą postać:

$$u = -\frac{1}{\eta\alpha(1+e)} \frac{dP_k}{d\omega} \quad (3.10)$$

Przytoczone wyżej równania pozwalają opisać stan placka filtracyjnego w danym momencie czasu  $\tau$ . Jak to już zostało uprzednio zaznaczone, placek filtracyjny zmienia swoją strukturę, a podczas filtracji również rozmiar w czasie, co wywołuje zmiany ilości cieczy przepływającej przez osad. Dzieje się tak dlatego, że uwięziona w porach placka filtracyjnego ciecz, na skutek zmniejszenia porowatości wywołanego wzrastającym na danej warstwie osadu ciśnieniem kompresji, zwiększa ilość cieczy wpływającej do warstwy znajdującej się poniżej. W związku z tym szybkość przepływu  $u$  rośnie w kierunku od powierzchni osadu do przegrody. Zmiana ilości cieczy zawartej w warstwie osadu w czasie jest równa przyrostowi natężenia przepływu cieczy na grubości  $d\omega$ . Można to opisać za pomocą następującego różniczkowego równania bilansu [35]:

$$\frac{\partial e}{\partial \tau} = \frac{\partial u}{\partial \omega} \quad (3.12)$$

zgodnie z którym przyrost prędkości  $u$  na nieskończenie krótkim odcinku jest równy zmianie przestrzeni swobodnej płacka w czasie. Prędkość liniowa cieczy względem ciała stałego  $u$  jest liczona na pusty przekrój poprzeczny celki kompresyjnej.

Warunki brzegowe definiują równania opisujące przepływ przez przegrodę oraz powierzchnię osadu. Ciecz wypływająca z warstwy osadu najbliższej przegrodzie musi pokonać opór przepływu, jaki stawia jej struktura. Do opisu tego zjawiska można użyć zmodyfikowanego równania Darcy'ego, w którym opór właściwy osadu o różniczkowej grubości zastąpiono oporem właściwym przegrody filtracyjnej  $R_p$ :

$$u_p = \frac{1}{\eta R_p} P_{hp} \quad (3.11)$$

W równaniu (3.11)  $P_{hp}$  to ciśnienie cieczy na granicy plack- przegroda, a  $u_p$  - to szybkość przepływu (liczona na wolny przekrój filtru) cieczy przez przegrodę.

Drugi warunek brzegowy dotyczy warstwy znajdująca się na powierzchni osadu (w odległości  $a_{pl.\tau}$  od przegrody), gdyż to w niej podczas filtracji generuje się pierwsza ilość cieczy, która dalej przemieszcza się przez osad ku przegrodzie.

W nieskończenie krótkim czasie  $d\tau$  pewna porcja zawiesiny o objętości  $dV_\tau$  przechodzi z zawiesiny do osadu. Procesowi temu towarzyszy przede wszystkim zwiększenie udziału ciała stałego w rozpatrywanej objętości, którą można wyrazić za pomocą zmiany przestrzeni swobodnej  $e$ . W czasie  $\tau$  objętość ta jest taka, jak w całej zawieszynie i wynosi  $e_\tau$ . W czasie  $\tau + d\tau$  jest ona równa objętości swobodnej mieszaniny ciała stałego i cieczy w warunkach wzajemnego kontaktu drobin ciała stałego przy ciśnieniu kompresji  $P_k = 0$  i oznacza się ją jako  $e_0$ . Ciecz, w ilości  $dV_{c.\tau}$  która na skutek zmiany koncentracji opuściła rozpatrywaną objętość mieszaniny, wpływa do warstwy znajdującej się poniżej i dalej w głąb osadu. Powyższe rozważanie pozwalają na sformułowanie równania bilansu masy dla warstewki powstałej na osadzie w czasie  $d\tau$ . W równaniu tym korzystne jest zastąpienie całkowitej objętości zawiesiny objętością ciała stałego  $dV_{st.\tau}$  gdyż, jak to już wyjaśniono wcześniej, jest ona niezmienna na drodze procesu. Przyjmuje się a priori, że do filtratu nie przechodzą drobinę ciała stałego. Bilans ten ma zatem następującą postać:

$$e_z dV_{st.\tau} = e_0 dV_{st.\tau} + dV_{c.\tau} \quad (3.13)$$

Jeżeli obydwie strony równanie podzielić przez powierzchnię przekroju poprzecznego filtru  $F$  i wykorzystać zależność:

$$u_{\tau} = \frac{dV_{c\tau}}{Fd\tau} \quad (3.14)$$

oraz związek określony funkcją (3.3), to równanie (3.13) przyjmie postać:

$$e_z d\omega_{\tau} = e_0 d\omega_{\tau} + u_{\tau} d\tau \quad (3.15)$$

i po przekształceniu:

$$\frac{d\omega_{\tau}}{d\tau} = \frac{u_{\tau}}{e_z - e_0} \quad (3.16)$$

W równaniu tym  $d\omega_{\tau}$  to wyrażona we współrzędnych materiałowych wartość, o jaką zwiększyła się grubość osadu w czasie od  $\tau$  do  $\tau + d\tau$ , a  $u_{\tau}$  jest to względna szybkość wypływu cieczy z warstwy powierzchniowej do warstwy znajdującej się poniżej. Grubość osadu od chwili zakończenia filtracji, czyli podczas kompresji nie zwiększa się i wówczas drugi warunek brzegowy ma postać  $u_{\tau} = 0$ , bo w warstwie powierzchniowej ustaje generowanie filtratu.

Podsumowując powyższe rozważania można stwierdzić, że proces rozdziału zawiesiny ciała stałego w cieczy przebiegający wg mechanizmu filtracji z tworzeniem osadu prowadzony przy użyciu celki kompresyjnej można opisać za pomocą układu równań różniczkowych, w skład którego wchodzi równania (3.6), (3.7), (3.10-3.12) oraz podczas filtracji (równanie (3.16)). Dodatkowymi założeniami są tutaj: statystycznie jednokierunkowy przepływ cieczy względem ciała stałego oraz pominięcie oporów tarcia ciała stałego o ścianki cylindra i zaniedbanie zjawiska sedimentacji, które może występować w zawieszynie w trakcie rzeczywistego rozdziału faz.

#### 4. Numeryczne rozwiązanie modelu procesu odwadniania zawiesin

Matematyczne modelowanie procesu rozdziału zawiesiny na testowym filtrze ciśnieniowym polega na znalezieniu wartości objętości swobodnej  $e$  (lub porowatości  $\varepsilon$ ) oraz szybkości przepływu cieczy względem ciała stałego w osadzie  $u$  w funkcji odległości  $\omega$  i czasu  $\tau$ :

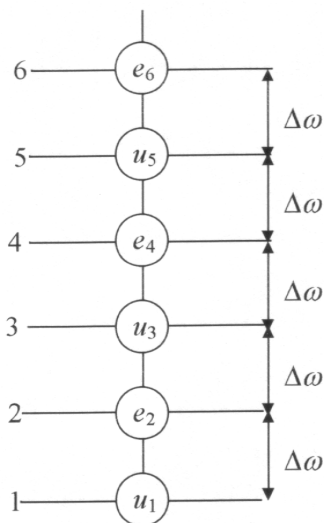
$$e = e(\omega, \tau) \quad (4.1)$$



$$u = u(\omega, \tau) \quad (4.2)$$

Wyżej wymienione zależności można wyznaczyć posługując się równaniami (3.6), (3.7), (3.10-3.12), (3.16). Ze względu na swoją nieliniowość, uwikłanie zmiennych oraz na fakt, że w przypadku filtracji mamy do czynienia z poruszającą się granicą obszaru obliczeń, analityczne rozwiązanie takiego układu równań nie jest możliwe. Koniecznym jest w tym przypadku zastosowanie odpowiednich procedur numerycznych. Wzorując się na wcześniejszych opracowaniach [35], do rozwiązania problemu wykorzystano metodę różnic skończonych, w której różniczkowe przyrosty zmiennych  $d$  zastąpiono przyrostami skończonymi  $\Delta$ . Prosta metoda różnic skończonych przy wyznaczeniu szybkości przepływu cieczy  $u$  uzupełniono tu (wzorując się na pracach [38] i [39]) stosując w schemacie obliczeń scałkowane równanie (3.10). W znacznym stopniu poprawia to dokładność obliczeń szczególnie w przypadku, gdy opór właściwy osadu  $\alpha$  silnie zmienia się w funkcji odległości od przegrody.

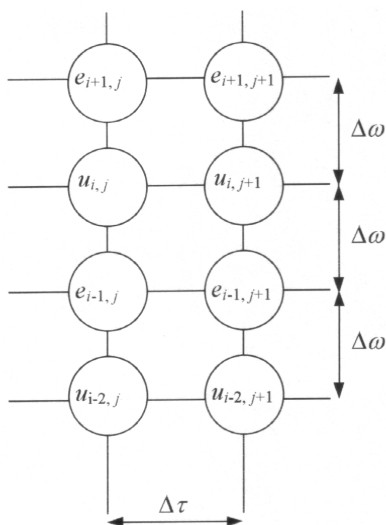
W celu wyznaczenia profili  $e$  oraz  $u$ , ładunek testowego filtra ciśnieniowego podzielono na  $n$  części tworząc siatkę rozwiązań, w której odległość pomiędzy węzłami wynosi  $\Delta\omega$ . Obliczenia prowadzi się tylko dla tych punktów, które należą do osadu. Ze względu na ciągłą zmianę jego rozmiaru podczas filtracji, placek filtracyjny dzieli się na dwie strefy obliczeń: główną i warstwę powierzchniową. W sąsiadujących ze sobą węzłach siatki wyznaczone są alternatywnie wartości prędkości lub wartości przestrzeni swobodnej przy użyciu tzw. siatki przesuniętej opracowanej dla modelowania numerycznego przepływu płynów lepkich przez Harlowa i Welcha w pracy [40]. Oznacza to, że węzeł, w którym wyznaczono szybkość przepływu cieczy sąsiaduje z węzłami, w których wyznaczono przestrzeń swobodną, a odległość między dwoma najbliższymi wartościami  $e$  lub  $u$  wynosi  $2\Delta\omega$ . Ze względu na fakt, że równanie opisujące warunek brzegowy dla przegrody wyznacza wartość szybkości przepływu, pierwszy węzeł siatki zawiera obliczoną wartość szybkości przepływu przez przegrodę  $u_1 = u_p$ . Jeżeli kolejne węzły siatki będzie się opisywać liczbami całkowitymi, to te z nich, które są opisane liczbami nieparzystymi zawierają obliczoną wartość  $u$ , a opisane liczbami parzystymi wartość  $e$  (rys. 4.1)



**Rys. 4.1.** Fragment siatki rozwiązań układu równań dla czasu  $\tau$  opisujących rozdział zawieszin

**Fig. 4.1.** A part of the solving grid of the equation set describing suspension separation for the time  $\tau$

Zmiana wartości przestrzeni swobodnej  $e$  i prędkości cieczy względem ciała stałego w osadzie  $u$  zależy zarówno od  $\omega$  jak i  $\tau$ . Z numerycznego punktu widzenia oznacza to, że każda z obliczonych wartości  $u$  i  $e$  opisana jest dwoma indeksami. Indeksy zmiennej  $\omega$  przyjęto oznaczać „ $i$ ”, a zmiennej  $\tau$  poprzez „ $j$ ”. W siatce rozwiązań oś czasu to oś odciętych, a odległość od przegrody to oś rzędnych. Ilustrację sposobu oznaczania siatki przedstawia rys. 4.2.



**Rys. 4.2.** Fragment siatki obliczeń dla czasu  $j$  i  $j+1$

**Fig. 4.2.** A part of the solving grid for the time  $j$  and  $j+1$

W modelu numerycznym szybkość przepływu przez przegrodę oblicza się przy użyciu dwóch równań. Pierwsze to równanie opisujące przepływ przez przegrodę:

$$u_1 = \frac{1}{\eta R_p} P_{hp} = \frac{1}{\eta R_p} (P_c - P_{kp}) \quad (4.3)$$

drugie zaś wypływ z warstwy 1-2:

$$u_1 \int_0^{\Delta\omega} d\omega = \frac{1}{\eta} \int_{P_{k2}}^{P_{kp}} \frac{1}{(1+e)\alpha} dP_k \quad (4.4)$$

gdzie  $P_{kp}$  to ciśnienie kompresji w przegrodzie.

Do równania (4.4) podstawia się zależność (3.6) oraz przekształcone równanie (3.7):

$$\frac{1}{1+e} = (1 - \varepsilon_0) \left( 1 + \frac{P_k}{P_a} \right)^\beta \quad (4.5)$$

Wówczas zależność (4.4) przyjmie postać:

$$u_1 \int_0^{\Delta\omega} d\omega = \frac{1 - \varepsilon_0}{\eta \cdot \alpha_0} \int_{P_{k2}}^{P_{kp}} \left( 1 + \frac{P_k}{P_a} \right)^{\beta-s} dP_k \quad (4.6)$$

i po scałkowaniu:

$$u_1 = \frac{(1 - \varepsilon_0) P_a}{\Delta\omega \cdot \eta \cdot \alpha_0 (1 + \beta - s)} \left( 1 + \frac{P_k}{P_a} \right)^{1+\beta-s} \Bigg|_{P_{k2}}^{P_{kp}} \quad (4.7)$$

Górna granica całkowania w równaniu (4.7) to ciśnienie kompresji panujące w przegrodzie i w jego miejsce podstawia się przekształcone równanie (4.3), natomiast dolna granica to ciśnienie panujące w pierwszym węźle siatki zawierającym obliczoną wartość  $e$ . W celu wyeliminowania z równania ciśnienia  $P_{k2}$  można posłużyć się przekształconym równaniem (4.5):

$$\left(1 + \frac{P_k}{P_a}\right) = \left[\left(1 - \varepsilon_0\right)\left(1 + e\right)\right]^{-\frac{1}{\beta}} \quad (4.8)$$

Ostatecznie otrzymuje się następujące równanie na szybkość wypływu cieczy z przegrody w czasie  $j+1$ :

$$u_{1,j+1} = \frac{(1 - \varepsilon_0)P_a}{\Delta\omega\eta\alpha_0(1 + \beta - s)} \left\{ \left(1 + \frac{P_c - u_{1,j+1}\eta R_p}{P_a}\right)^{1+\beta-s} - \left[\left(1 - \varepsilon_0\right)\left(1 + e_{2,j+1}\right)\right]^{\frac{s-\beta-1}{\beta}} \right\} \quad (4.9)$$

Równanie (4.9) jest uwikłane ze względu na obliczaną wartość  $u_1$  i można je rozwiązać tylko za pomocą obliczeń iteracyjnych.

Pozostałe szybkości przepływu w głównej masie placka filtracyjnego oblicza się w oparciu o zmodyfikowane przez Autorów równanie Darcy'ego scałkowane w granicach od  $\omega_{i-1}$  do  $\omega_{i+1}$  oraz od  $P_{k_{i-1}}$  do  $P_{k_{i+1}}$ :

$$u_i \int_{\omega_{i-1}}^{\omega_{i+1}} d\omega = \frac{1 - \varepsilon_0}{\eta\alpha_0} \int_{P_{k_{i+1}}}^{P_{k_{i-1}}} \left(1 + \frac{P_k}{P_a}\right)^{\beta-s} dP_k \quad (4.10)$$

Całkując równanie (4.10) i stosując analogiczne przekształcenia jak dla równania (4.7) oraz wiedząc, że  $\omega_{i+1} - \omega_{i-1} = 2\Delta\omega$  otrzymuje się następującą zależność:

$$u_{i,j+1} = \frac{(1 - \varepsilon_0)P_a}{2\Delta\omega\eta\alpha_0(1 + \beta - s)} \left\{ \left[\left(1 - \varepsilon_0\right)\left(1 + e_{i-1,j+1}\right)\right]^{\frac{s-\beta-1}{\beta}} - \left[\left(1 - \varepsilon_0\right)\left(1 + e_{i+1,j+1}\right)\right]^{\frac{s-\beta-1}{\beta}} \right\} \quad (4.11)$$

Wartości w węzłach siatki zawierających przestrzeń swobodną  $e$  wylicza się w oparciu o równanie (3.12), w którym przyrosty nieskończenie małe zastąpione są odpowiednimi przyrostami skończonymi:

$$\frac{\Delta e}{\Delta \tau} = \frac{\Delta u}{2\Delta \omega} \quad (4.12)$$

gdzie:

$$\Delta e = e_{i,j} - e_{i,j+1} \quad (4.13)$$

$$\Delta u = \bar{u}_{i-1} - \bar{u}_{i+1} \quad (4.14)$$

stąd

$$e_{i,j+1} = e_{i,j} - \frac{\bar{u}_{i-1} - \bar{u}_{i+1}}{2\Delta\omega} \Delta\tau \quad (4.15)$$

W równaniach (4.14) i (4.15) występuje średnia wartość szybkości przepływu przez warstwę  $i-1$  oraz  $i+1$ . Sørensen ze współpracownikami [35] proponuje, by obliczać ją jako średnią arytmetyczną szybkości przepływu na tych warstwach w czasie  $j$  i  $j+1$ :

$$\bar{u}_i = \frac{u_{i,j} + u_{i,j+1}}{2} \quad (4.16)$$

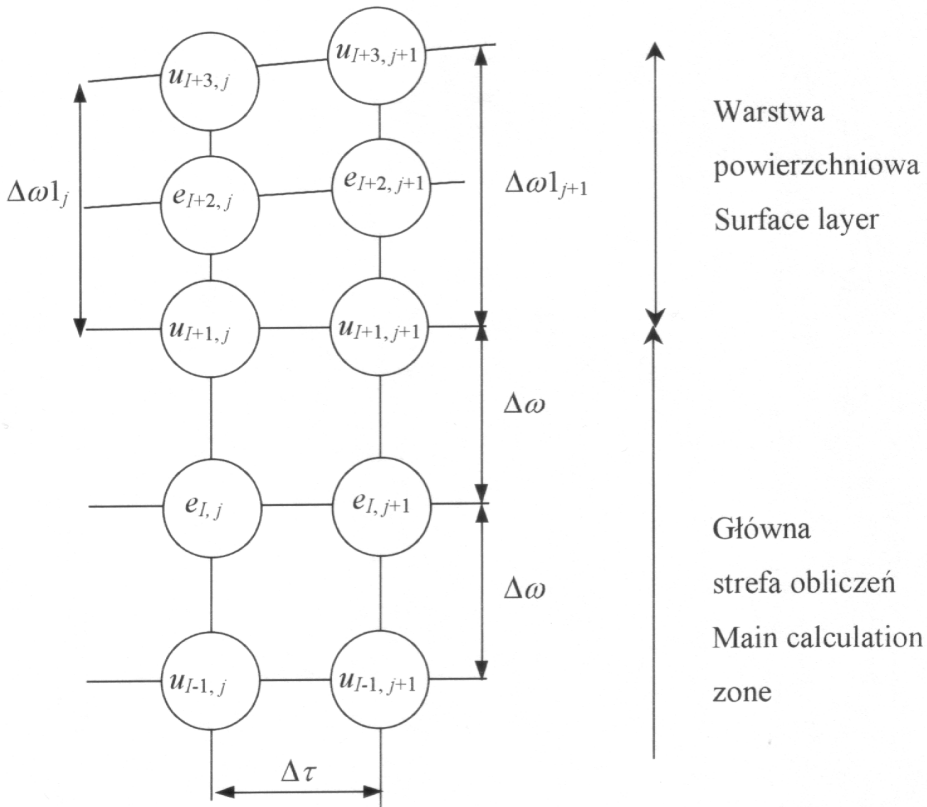
Osobnego rozpatrzenia wymaga warstwa powierzchniowa osadu znajdująca się poza główną strefą obliczeń. W głównej strefie odległość pomiędzy warstwami, których ilość wynosi  $I$  jest stała (wynosi  $\Delta\omega$ ). Inaczej jest na powierzchni osadu. Przyczyna tego leży w tym, że na skutek ciągłego narastania osadu zmienia się grubość tej warstwy, którą oznaczono  $\Delta\omega_l$  (rys. 4.3).

W chwili rozpoczęcia obliczeń dla nowej warstwy powierzchniowej jej grubość wynosi 0 i z każdym kolejnym krokiem obliczeń  $\Delta\tau$  narasta. Po osiągnięciu grubości równej  $2\Delta\omega$  warstwa powierzchniowa zostaje włączona do głównej strefy obliczeń, której grubość zwiększa się wówczas o  $2\Delta\omega$  a ilość obliczanych wartości w węzłach siatki  $I$  rośnie o 2. Jednocześnie pojawia się nowa warstwa powierzchniowa, której grubość  $\Delta\omega_l$  jest ponownie równa 0.

Grubość warstwy powierzchniowej w czasie  $j+1$  oblicza się za pomocą równania (3.15), w którym przyrosty nieskończenie małe zamieniono przyrostami skończonymi:

$$\Delta\omega_l_{j+1} = \Delta\omega_l_j + \frac{\bar{u}_{I+1}}{e_0 - e_z} \Delta\tau \quad (4.17)$$

przy czym średnia szybkość przepływu  $\bar{u}_{I+1}$  obliczona jest zgodnie z równaniem (4.16).



**Rys. 4.3.** Przyrost grubości osadu w czasie  $\Delta\tau$   
**Fig. 4.3.** The increase of the thickness in the time  $\Delta\tau$

Szybkość przepływu ciecży przez skrajną warstwę  $u_{I+3,j+1}$  można wyliczyć z równania Darcy'ego, całkując je w zakresie od ciśnienia kompresji równego 0 panującego na warstwie  $I+3$  do panującego na warstwie  $I+2$ :

$$u_{I+3} \int_{1/2\Delta\omega_{1j+1}}^{\Delta\omega_{1j+1}} d\omega = \frac{1 - \varepsilon_0}{\eta\alpha_0} \int_0^{P_{k,I+2}} \left(1 + \frac{P_k}{P_a}\right)^{\beta-s} dP_k \quad (4.18)$$

Po scałkowaniu i odpowiednich przekształceniach otrzymuje się:

$$u_{I+3,j+1} = \frac{2(1-\varepsilon_0)P_a}{\Delta\omega_{j+1}\eta\alpha_0(1+\beta-s)} \left\{ \left[ \left(1-\varepsilon_0\right) \left(1+e_{I+2,j+1}\right) \right]^{\frac{s-\beta-1}{\beta}} - 1 \right\} \quad (4.19)$$

Przestrzeń swobodną w warstwie powierzchniowej  $e_{I+2,j+1}$  można wyznaczyć w oparciu o bilans masy dla cieczy. W czasie  $\tau$  warstwa powierzchniowa ma grubość  $\Delta\omega_j$  i przestrzeń swobodną  $e_{I+2,j}$ . Warstewka zawiesiny znajdująca się nad osadem, która w czasie  $\Delta\tau$  przejdzie do osadu, ma grubość  $\Delta\omega_{j+1} - \Delta\omega_j$  i przestrzeń swobodną zawiesiny  $e_z$ . W czasie  $\tau+\Delta\tau$  warstwa powierzchniowa ma grubość  $\Delta\omega_{j+1}$  i przestrzeń swobodną  $e_{I+2,j+1}$ , a osadzający się osad powoduje wypływ cieczy w ilości  $V_c$ , do głównej masy osadu z szybkością średnią  $\bar{u}_{I+1}$ . Objętość cieczy w czasie  $\tau$  i w czasie  $\tau+\Delta\tau$  musi być taka sama:

$$V_{sw,\tau} = V_{sw,\tau+\Delta\tau} + V_c. \quad (4.20)$$

przy czym:

$$V_{sw,\tau} = e_{I+2,j}\Delta\omega_j F + e_z(\Delta\omega_{j+1} - \Delta\omega_j)F \quad (4.21)$$

$$V_{sw,\tau+\Delta\tau} = e_{I+2,j+1}\Delta\omega_{j+1} F \quad (4.22)$$

$$V_c = \bar{u}_{I+1} F \Delta\tau \quad (4.23)$$

Po podstawieniu równań (4.21-4.23) do równania (4.20) i przekształceniu otrzymuje się zależność na  $e_{I+2,j+1}$ :

$$e_{I+2,j+1} = \frac{e_{I+2,j}\Delta\omega_j + e_z(\Delta\omega_{j+1} - \Delta\omega_j) - \bar{u}_{I+1}\Delta\tau}{\Delta\omega_{j+1}} \quad (4.24)$$

Najbardziej kłopotliwe jest wyznaczenie wartości  $u_{I+1,j+1}$ , gdyż nie leży ona w połowie odległości pomiędzy węzłami  $e_{I,j+1}$  i  $e_{I+2,j+1}$  (rys. 4.3). Sørensen i in. [35] zaproponowali, by wyliczyć pewną hipotetyczną wartość  $u'$ , tak jak w głównej strefie obliczeń i przy pomocy interpolacji liniowej pomiędzy wartościami  $u_{I+3,j+1}$ ,  $u'$  wyznaczyć poszukiwaną  $u_{I+1,j+1}$ .

Wychodząc z równania Darcy'ego:

$$u' \int_{\omega_l}^{\omega_{l+2}} d\omega = \frac{1 - \varepsilon_0}{\eta \alpha_0} \int_{P_{k,l+2}}^{P_{k,l}} \left( 1 + \frac{P_k}{P_a} \right)^{\beta-s} dP_k \quad (4.25)$$

po scałkowaniu i odpowiednich podstawieniach, wiedząc, że  $\omega_{l+2} - \omega_l = \Delta\omega + \frac{1}{2}\Delta\omega_{j+1}$  otrzymuje się:

$$u' = \frac{(1 - \varepsilon_0)P_a}{\left( \Delta\omega + \frac{\Delta\omega_{j+1}}{2} \right) \eta \alpha_0 (1 + \beta - s)} \left\{ \left[ (1 - \varepsilon_0)(1 + e_{l,j+1}) \right]^{\frac{s-\beta-1}{\beta}} - \left[ (1 - \varepsilon_0)(1 + e_{l+2,j+1}) \right]^{\frac{s-\beta-1}{\beta}} \right\} \quad (4.26)$$

Zastosowanie interpolacji liniowej do wyznaczenia równania na  $u_{l+1,j+1}$  prowadzi do następującej zależności:

$$u_{l+1,j+1} = u' + (u_{l+3,j+1} - u') \frac{2\Delta\omega - \Delta\omega_{j+1}}{2(\Delta\omega - \Delta\omega_{j+1})} \quad (4.27)$$

Jak już wspomniano wcześniej, obliczenia danej warstwy powierzchniowej prowadzi się tak długo, aż osiągnie ona grubość  $2\Delta\omega$ . Ze względu na fakt, że zwykle nie uzyskuje się tej wartości dokładnie, w celu uniknięcia znacznych błędów w ostatnim kroku obliczeń tak dobiera się wartość  $\Delta\tau$ , aby z założoną dokładnością spełniony był warunek  $\Delta\omega_l = 2\Delta\omega$ .

W celu zbudowania modelu numerycznego procesu rozdziału zawieszin stałych na przegrodzie konieczne jest jeszcze ustalenie warunków początkowych. Przed rozpoczęciem procesu cały ładunek filtru ciśnieniowego jest jednorodny. Z chwilą przyłożenia ciśnienia rozpoczyna się tworzenie na przegrodzie placka filtracyjnego. W zależności od oporu przegrody, początek procesu można modelować na dwa sposoby [35].

I. Dla niskich oporów przegrody można założyć, że w czasie  $\tau = 0$  od razu powstaje na niej warstwa osadu o grubości  $2\Delta\omega$  i szybkość przepływu cieczy na poziomie  $i = 1$  i  $i = 3$  jest taka sama:  $u_{1,0} = u_{3,0}$ . Stosując równanie (4.6) do wyznaczenia  $u_{1,0}$  oraz równanie (4.18) (lewa strona w granicach całkowania od  $\omega_2$  do  $\omega_3$ ) dla  $u_{3,0}$  uzyskuje się zależność:



$$\frac{1 - \varepsilon_0}{\Delta \omega \eta \alpha_0} \int_{P_{k,2}}^{P_{k,p}} \left(1 + \frac{P_k}{P_a}\right)^{\beta-s} dP_k = \frac{1 - \varepsilon_0}{\Delta \omega \eta \alpha_0} \int_0^{P_{k,2}} \left(1 + \frac{P_k}{P_a}\right)^{\beta-s} dP_k \quad (4.28)$$

Po scałkowaniu:

$$\left(1 + \frac{P_{k,p}}{P_a}\right)^{1+\beta-s} - \left(1 + \frac{P_{k,2}}{P_a}\right)^{1+\beta-s} = \left(1 + \frac{P_{k,2}}{P_a}\right)^{1+\beta-s} - 1 \quad (4.29)$$

i uporządkowaniu ze względu na  $P_{k,2}$ :

$$\left(1 + \frac{P_{k,2}}{P_a}\right)^{1+\beta-s} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{P_{k,p}}{P_a}\right)^{1+\beta-s} \quad (4.30)$$

Przekształcając równanie (4.3) do postaci:

$$P_{k,p} = P_c - u_{3,0} \eta R_p \quad (4.31)$$

i podstawiając za  $u_{3,0}$  scałkowane i zmodyfikowane jak wyżej równanie (4.18) otrzymuje się zależność na ciśnienie kompresji w przegrodzie:

$$P_{k,p} = P_c - \frac{(1 - \varepsilon_0) P_a R_p}{\Delta \omega \alpha_0 (1 + \beta - s)} \left[ \left(1 + \frac{P_{k,2}}{P_a}\right)^{1+\beta-s} - 1 \right] \quad (4.32)$$

które po użyciu w nim zależności (4.30) przyjmuje postać uwikłanej funkcji  $P_{k,p}$ :

$$P_{k,p} = P_c - \frac{(1 - \varepsilon_0) P_a R_p}{\Delta \omega \alpha_0 (1 + \beta - s)} \left[ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{P_{k,p}}{P_a}\right)^{1+\beta-s} - \frac{1}{2} \right] \quad (4.33)$$

W oparciu o to równanie na drodze iteracji można wyliczyć  $P_{k,p}$ , i dalej przy pomocy równania (4.3)  $u_{3,0}$ . Korzystając z zależności (4.8) i (4.30) otrzymuje się wzór na przestrzeń swobodną  $e_{2,0}$ :

$$e_{2,0} = \frac{\left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{P_{k,p}}{P_a} \right)^{1+\beta-s} \right]_{s-\beta-1}^{\beta}}{1 - \varepsilon_0} - 1 \quad (4.34)$$

II. Dla wysokich oporów przegrody można założyć, że w czasie  $\tau = 0$  ciśnienie kompresji w przegrodzie  $P_{k,p}$  jest równe 0, gdyż ilość utworzonego na niej osadu jest znikomo mała. Wówczas szybkość przepływu przez przegrodę dla  $\tau = 0$  można wyliczyć z równania (4.3) podstawiając  $P_c$  w miejsce  $P_h$ :

$$u_{1,0} = \frac{1}{\eta R_p} P_c. \quad (4.35)$$

Dalszy przebieg procesu modeluje się jak dla warstwy powierzchniowej przy zerowej grubości głównej strefy obliczeń, tj. przy  $I = 0$ . Kiedy grubość obliczonej warstwy osiągnie wartość  $2\Delta\omega$  (z ewentualnym dopasowaniem wartości  $\Delta\tau$ ) na przegrodzie tworzy się pierwszy element głównej strefy obliczeń, a  $I$  przyjmuje wartość 2.

Osobny problem stanowi wybór metody obliczeń, tzn. kiedy używa się schematu dla dużych, a kiedy dla małych oporów przegrody. Stwierdzono, że zaproponowana przez Sorensena i in. w pracy [35] metoda oparta na porównaniu szybkości  $u_{1,0}$  obliczonych metodą I i II jest błędna. Podstawowym kryterium wyboru numerycznych obliczeń startowych jest ich stabilność. Na drodze własnych eksperymentów ustalono, że oprócz oporu przegrody na wybór ten wpływa także opór właściwy osadu. Ostatecznie przyjęto, by pierwszy sposób obliczeń stosować, gdy stosunek  $\alpha_0/R_p < 100$ , drugi dla  $\alpha_0/R_p \geq 100$ .

Po zakończeniu filtracji ustaje generowanie filtratu w najwyższej warstwie osadu i prędkość cieczy  $u_{I+3}$  spada do 0. Ilość warstw  $I+3$  jest wówczas równa  $n$ . Od tej chwili filtrat opuszczający placek jest generowany wyłącznie w jego objętości na skutek kompresji warstw. W schemacie obliczeń przestają występować równania opisujące warstwę powierzchniową (4.17, 4.19, 4.24, 4.26 i 4.27), gdyż prędkość  $u_n$  jest wówczas stale równa 0 i mamy do czynienia tylko z główną strefą obliczeń.

Podobnie modeluje się proces rozdziału, jeżeli poddawany jest mu szlam, czyli mieszanina ma koncentrację większą niż taka, gdy drobiny ciała stałego stykają się ze sobą przy ciśnieniu kompresji 0 (oznacza to, że  $e_z \geq e_0$ ). Wówczas mamy do czynienia tylko z kompresją szlamu, który w chwili rozpoczęcia procesu ma parametry jednorodne, tzn.:  $e_i = e_z$ ,  $u_i = 0$ .

Opierając się na równaniach (4.9, 4.11, 4.15, 4.17, 4.19, 4.24, 4.26, 4.27) można utworzyć układ pozwalający na wyznaczenie wartości  $u$  i  $e$  w węzłach siatki rozwiązań. W celu rozwiązania układu równań dla czasu  $j+1$  konieczna jest znajomość wektora rozwiązań dla czasu  $j$ . Poszukiwany wektor rozwiązań dla czasu  $j+1$  oznaczono jako  $\mathbf{X}$  i należy go wstępnie założyć. Odpowiednio przekształcone równania tworzą funkcję wektorową  $F(\mathbf{X})$ , która wygląda następująco:

$$F(\mathbf{X}) = \begin{cases} x_1 - \frac{(1-\varepsilon_0)P_a}{\Delta\omega\eta\alpha_0(1+\beta-s)} \left\{ \left( 1 + \frac{P_c - x_1\eta R_p}{P_a} \right)^{1+\beta-s} - [(1-\varepsilon_0)(1+x_2)]^{\frac{s-\beta-1}{\beta}} \right\} \\ x_2 - \left( z_2 - \frac{\frac{x_1+z_1}{2} - \frac{x_3+z_3}{2}}{2\Delta\omega} \Delta\tau \right) \\ x_3 - \frac{(1-\varepsilon_0)P_a}{2\Delta\omega\eta\alpha_0(1+\beta-s)} \left\{ [(1-\varepsilon_0)(1+x_2)]^{\frac{s-\beta-1}{\beta}} - [(1-\varepsilon_0)(1+x_3)]^{\frac{s-\beta-1}{\beta}} \right\} \\ x_4 - \left( z_4 - \frac{\frac{x_3+z_3}{2} - \frac{x_5+z_5}{2}}{2\Delta\omega} \Delta\tau \right) \\ \dots \\ \dots \\ x_I - \left( z_I - \frac{\frac{x_{I-1}+z_{I-1}}{2} - \frac{x_{I+1}+z_{I+1}}{2}}{2\Delta\omega} \Delta\tau \right) \\ x_{I+1} - u' + (x_{I+3} - u') \frac{2\Delta\omega - \Delta\omega l_{j+1}}{2(\Delta\omega - \Delta\omega l_{j+1})} \\ x_{I+2} - \frac{z_{I+2}\Delta\omega l_j + e_z(\Delta\omega l_{j+1} - \Delta\omega l_j) - \frac{x_{I+1}+z_{I+1}}{2} \Delta\tau}{\Delta\omega l_{j+1}} \\ x_{I+3} - \frac{2(1-\varepsilon_0)P_a}{\Delta\omega l_{j+1}\eta\alpha_0(1+\beta-s)} \left\{ [(1-\varepsilon_0)(1+x_{I+2})]^{\frac{s-\beta-1}{\beta}} - 1 \right\} \end{cases} \quad (4.36)$$

Występujące w funkcji wektorowej (4.36) wartości  $\Delta\omega_l$  oraz  $u'$  oblicza się z przekształconych równań (4.17, 4.26):

$$\Delta\omega_{l_{j+1}} = \Delta\omega_{l_j} + \frac{x_{l_{j+1}} + z_{l_{j+1}}}{e_0 - e_z} \Delta\tau \quad (4.37)$$

$$u' = \frac{(1 - \varepsilon_0)P_a}{\left(\Delta\omega + \frac{\Delta\omega_{l_{j+1}}}{2}\right)\eta\alpha_0(1 + \beta - s)} \left\{ \left[ (1 - \varepsilon_0)(1 + x_l) \right]^{\frac{s-\beta-1}{\beta}} - \left[ (1 - \varepsilon_0)(1 + x_{l+2}) \right]^{\frac{s-\beta-1}{\beta}} \right\} \quad (4.38)$$

Rozwiązanie polega na znalezieniu takiego  $\mathbf{X}$ , dla którego z zadaną dokładnością spełnione jest równanie  $F(\mathbf{X}) = 0$ . Najwygodniej w tym celu jest posłużyć się metodą Newtona rozwiązywania układu  $n$  równań nieliniowych. Metoda ta opiera się na kolejnych przybliżeniach wektora rozwiązań  $\mathbf{X}$ , przy czym  $k+1$  przybliżenie z przybliżeniem  $k$  łączy zależność:

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k - F'^{-1}(\mathbf{X}_k) \cdot F(\mathbf{X}_k) \quad (4.39)$$

gdzie  $F'^{-1}(\mathbf{X})$  to odwrotność macierzy Jacobiego o wymiarze  $(I+3) \times (I+3)$

$$F'(\mathbf{X}) = \frac{\partial F(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \quad (4.40)$$

W zastosowanych w niniejszej pracy programach obliczeniowych do znalezienia wektora rozwiązań zastosowano gotową procedurę rozwiązywania układu równań nieliniowych metodą Newtona, napisaną w Turbo Pascalu 7.0 przez B. Barona [41].

## 5. Podsumowanie

Zaprezentowany model matematyczny procesu rozdziału zawiesin i jego numeryczne rozwiązanie pozwalają na przeprowadzenie symulacji filtracji placzkowej z towarzyszącą jej kompresją powstającego osadu. W drugiej części artykułu zostanie zaprezentowany sposób wyznaczania parametrów potrzebnych do przeprowadzenia tych symulacji oraz doświadczalna weryfikacja modelu.

## Literatura

1. **Koch R., Noworyta A.:** Procesy mechaniczne w inżynierii chemicznej, WNT, Warszawa 1992.
2. **Malinowskaja T. A., Kobrinskij I. A., Kirsanow O. S., Rejnfart W. W.:** Rozdzielanie zawiesin w przemyśle chemicznym, tłum. z j. ros., WNT, Warszawa 1986.
3. **Żużikow W. A.:** Filtracja. Teoria i praktyka rozdzielania zawiesin, tłum. z j. ros., WNT, Warszawa 1985.
4. **Palica M., Kocurek J.:** Wybrane zagadnienia teorii filtracji i kompresji osadów, Wyd. Pol. Śl., Gliwice 2001.
5. **Piecuch T., Anielak A.M.:** Vielstufige Druckfiltration, 17. Diskussionsagung Mechanische Flüssigkeitsabtrennung, Dresden, October 1980.
6. **Anielak A.M., Jasicki W., Piecuch T.:** Badania filtracji ciśnieniowej poflotacyjnych rud cynkowo-olowiowych pod kątem symulacji prasy typu ROW, XIII Konf. Przeróbki Kopalni, Zesz. Nauk. AGH, Kraków 1976.
7. **Piecuch T., Opielka A.:** Technologiczne badania pracy prasy filtracyjnej typu ROW, IX Konf. Przeróbki Kopalni, Zesz. Nauk. AGH, Kraków 1979.
8. **Machej J., Trefler U.:** Ocena przydatności prasy FRANK do filtracji na drodze eksperymentalnej, Inż. Ap. Chem, 3, 1970.
9. **Piecuch T., Opielka A.:** Nowe konstrukcje pras filtracyjnych, Rudy i Metale Nieżelazne, 8/1976.
10. **Piecuch T.:** Technika hydroszlamowa, Wyd. II, Wyd. Ucz. Pol. Koszalińskiej, Koszalin 1999.
11. **Piecuch T.:** A Theoretical Study of the Process of Gravitation Filtration, Polish Association of Friends of Science About the EARTH, Monograph, Częstochowa, May 1984.
12. **Ruth B. F., Montillon G. H., Montonna R. A.:** Studies in Filtration, Ind. Engng Chem., 25, 75, 1933.
13. **Ruth B. F., Montillon G. H., Montonna R. A.:** Studies in Filtration, Ind. Engng Chem., 25, 153, 1933.
14. **Mróz W., Palica M., Zabłocki J.:** Wzór Użytkowy W - 98256
15. **Mróz W., Palica M., Zabłocki J.:** Patent P - 298268
16. **Carman P. C.:** Fluid Flow Through Granular Beds, Trans. Inst. Chem. Engrs, 150, 1937.
17. **Carman P. C.:** Fundamental Principles of Industrial Filtration, Trans. Inst. Chem. Engrs., 16, 168, 1938.
18. **Grace H. P.:** Resistance and Compressibility of Filter Cakes, Chem. Engng Progr., 49, 303, 1953.
19. **Tiller F. M.:** The Role of Porosity In Filtration, Chem. Eng. Progr., 49, 467, 1953.
20. **Ruth B. F.:** Correlating Filtration Theory with Industrial Practice, Ind. Eng. Chem., 38, 564, 1946.

21. **Shirato M., Aragaki T., Mori R., Sawamoto K.:** Predictions of Constant Pressure and Constant Rate Filtrations Based Upon an Approximate Correction for Side Wall Friction in Compression Permeability Cell Data, *J. Chem. Engng Japan*, 1, 86, 1968.
22. **Shirato M., Sambuchi M., Kato H., Aragaki T.:** Internal Flow Mechanism in Filter Cakes, *A.I.Ch.E. J.*, 15, 405, 1969.
23. **Shirato M., Murase T., Negawa M., Senda T.:** Fundamental Studies of Expression Under Variable Pressure, *Journal of Chemical Engineering of Japan*, 3, 105, 1970.
24. **Shirato M., Murase T., Kato H., Fukaya S.:** Fundamental Analysis for Expression under Constant Pressure, *Filtration and Separation*, 7, 277, 1970.
25. **Shirato M., Murase T., Negawa M., Moridera H.:** Analysis of Expression Operations, *J. Chem. Engng Japan*, 4, 263, 1971.
26. **Terzaghi K.:** *Erdbaumechanik auf bodenphysikalischer Grundlage*, Leipzig, 1925.
27. **Terzaghi K., Peck R. B.:** *Soil Mechanics in Engineering Practice*, John Wiley & Sons, Inc. 1948.
28. **Taylor D. W.:** *Fundamentals of Soil Mechanics*, John Wiley & Sons, Inc. 1962.
29. **Shirato M., Aragaki T., Ichimura K., Ootsuji N.:** Porosity Variation in Filter Cake under Constant – Pressure Filtration, *J. Chem. Engng Japan*, 4, 172, 1971.
30. **Atsumi K., Akiyama T.:** A Study of Cake Filtration – Formulation, As A Stefan Problem, *J. Chem. Engng Japan*, 8, 487, 1975.
31. **Kamst G. F., Bruinsma O. S. L., J de Graauw:** Permeability of Filter Cakes of Palm Oil in Relation to Mechanical Expression, *AIChE Journal*, 43, 673, 1997.
32. **Landman K. A., Sirakoff C., White L. R.:** Dewatering of Flocculated Suspensions by Pressure Filtration, *Phys. Fluids*, A 3, 1495, 1991.
33. **Stamatakis K., Chi Tien:** Cake formation and Growth in Cake Filtration, *Chem. Eng. Sci.*, 46, 1917, 1991.
34. **Yanxiang Wu:** An Analysis of Constant-Pressure Filtration, *Chem. Eng. Sci.*, 49, 831, 1994.
35. **Sørensen P. B., Moldrup P., Hansen J.:** Filtration and Expression of Compressible Cakes, *Chem. Engng Sci.* 51, 967-978, 1996.
36. **Tiller F. M., Leu W. F.:** Basic Data Fitting in Filtration, *J. Chinese Inst. Chem. Engrs*, 11, 61-70, 1980.
37. **Kocurek J.:** Badanie strefy kompresji ściśliwych placków filtracyjnych, rozprawa doktorska, praca niepublikowana, Gliwice 2000.
38. **Moldrup P., Yamaguchi T., Hansen J. Aa., Rolston D. E.:** An Accurate And Numerically Stable Model for One-dimensional Solute transport in Soil, *Soil Sci.*, 153, 261, 1992.
39. **Moldrup P., Hansen J. Aa., Rolston D. E., Yamaguchi T.:** Improved Simulation of Unsaturated Soil Hydraulic Conductivity by the Moving Mean Slope (MMS) Approach, *Soil Sci.*, 155, 8, 1993.
40. **Harlow F. H., Welch J. E.:** Numerical Calculation of Time-dependent viscous incompressible Flow of Fluid with Free Surface, *Phys. Fluids* 8, 2182, 1965.
41. **Baron B.:** *Metody numeryczne w Turbo Pascalu*, Helion, Gliwice, 1995.

## Spis oznaczeń, Symbols

$e$	$[m^3/m^3]$	przestrzeń swobodna, stosunek objętości cieczy do objętości ciała stałego void ratio, liquid to solid volume ratio
$e_0$	$[m^3/m^3]$	przestrzeń swobodna w osadzie przy ciśnieniu kompresji 0 [Pa] void ratio in the cake at compression pressure equal to zero
$e_z$	$[m^3/m^3]$	przestrzeń swobodna w zawieszinie void ratio in suspension
$F$	$[m^2]$	powierzchnia przegrody filter medium area
$i$		numer warstwy, indeks przestrzeni layer number, space index
$I$		ilość warstw głównej strefy obliczeń w osadzie w danym czasie (od 0 do $n$ ) number of layers of the main calculation zone in the cake and at given time (from 0 to $n$ )
$j$		indeks czasu time index
$l$	[m]	wysokość ładunku zawiesiny w filtrze testowym na początku procesu filter load at the beginning of the process
$n$		ilość warstw, na które podzielony jest ładunek filtru number of layers for which the load is divided
$P_a$	[Pa]	przelicznik skali w równaniach (3.12) i (3.13) scale factor in equations (3.12) and (3.13)
$P_c$	[Pa]	ciśnienie całkowite total pressure
$P_h$	[Pa]	ciśnienie hydrauliczne hydraulic pressure
$P_{hp}$	[Pa]	ciśnienie hydrauliczne w przegrodzie hydraulic pressure in the filter medium
$P_k$	[Pa]	ciśnienie kompresji (ciśnienie kontaktowe) compression pressure (contact pressure)
$P_{kp}$	[Pa]	ciśnienie kompresji w przegrodzie compression pressure in the filter medium
$R_p$	[1/m]	opór przegrody filter medium resistance
$s$		współczynnik ściśliwości placka filter cake compressibility coefficient
$u$	[m/s]	prędkość przepływu cieczy względem ciała stałego superficial liquid flow due to solid phase

$V$	$[m^3]$	objętość filtratu filtrate volume
$V_s$	$[m^3]$	objętość ciała stałego solid volume
$x$	$[m]$	wymiar liniowy we współrzędnych bezwzględnych linear dimension in real co-ordinates
$X$		wektor kolejnego przybliżenia rozwiązania wektorowej funkcji błędu vector of the next approximation of errors vector function

### **Litery greckie; Greek symbols**

$\alpha$	$[1/m^2]$	opór właściwy osadu specific filter cake resistance
$\alpha_0$	$[1/m^2]$	graniczny opór osadu przy zerowym ciśnieniu kompresji boundary cake resistance at zero compression pressure
$\beta$		współczynnik podatności porowatości osadu na ciśnienie form factor for compressibility with respect to porosity
$\varepsilon$	$[m^3/m^3]$	porowatość porosity
$\eta$	$[Pas]$	współczynnik dynamiczny lepkości filtratu viscosity dynamic coefficient of filtrate
$\rho_s$	$[kg/m^3]$	gęstość ciała stałego solid phase density
$\tau$	$[s]$	czas time
$\Delta\tau$	$[s]$	krok czasu time step
$\omega$	$[m]$	wymiar liniowy we współrzędnych materiałowych linear dimension in material co-ordinates
$\omega_{cal}$	$[m]$	całkowita grubość zawartości filtru we współrzędnych materiałowych total thickness of filter contents in material co-ordinates
$\Delta\omega$	$[m]$	krok w przestrzeni współrzędnych materiałowych space step in material co-ordinates
$\Delta\omega_l$	$[m]$	grubość warstwy powierzchniowej we współrzędnych materiałowych surface layer thickness in material co-ordinates



# Separation Of Solid-Liquid Suspension Using Filtration With Cake Compression I. Theoretical Description Of Filtration With Simultaneous Cake Compression

## Abstract

Different descriptions of cake filtration of solid-liquid suspensions and cake compression are presented in the paper. The mathematical model of mentioned processes based on fundamental equations of flow through porous bed and accompanying mass and forces balances is discussed in details. The model is valid for both processes, which is especially important because they may appear simultaneously during separation. The final set of differential equations has been changed to the form possible to solve using numerical methods.

Mathematical modelling of the suspension separation process in the test pressure filter consists in finding the value of void ratio  $e$  (or porosity  $\varepsilon$ ) and superficial liquid flow due to solid phase in cake  $u$  as a function of linear dimension  $\omega$  and time  $\tau$ .

$$e = e(\omega, \tau)$$

$$u = u(\omega, \tau)$$

These dependencies may be determined using equations (3.6), (3.7), (3.10-3.12), (3.16). Due to their nonlinearity, confounding of variables as well as the fact, that in the case of filtration we deal with moving limit of a calculation range, analytical solution of such system is not possible. It is necessary in such case to use suitable mathematical procedures. Modelling on earlier works [35], method of finite differences was used, in which differential variables increases  $d$  were replaced with finite increases  $\Delta$ . Simple method of finite differences, when determining superficial liquid flow due to solid phase in cake  $u$ , was completed here using in the calculation scheme integrated equation (3.10). This significantly improves accuracy of calculations, especially in the case, when specific filter cake resistance  $\alpha$  changes strongly in function of linear dimension.

Presented mathematical model of suspension separation process and its numerical solution allow to carry out a simulation of cake filtration with accompanying cake compression. In the second part of this paper a method of determining parameters needed for carrying out the simulation and experimental verification of the model is presented.