

*maszyna synchroniczna, stan ustalony, widmo Fouriera  
analiza spektralna, metoda bilansu harmoniczych*

Michał RADZIK\*, Tadeusz J. SOBCZYK\*\*

## **ANALIZA PRACY MASZYNY SYNCHRONICZNEJ PRZY ZABURZENIACH MOMENTU MECHANICZNEGO ZALEŻNYCH OD KĄTA OBROTU**

Analiza ustalonej odpowiedzi maszyny synchronicznej na pulsacje momentu zależne od kąta położenia wirnika ma duże znaczenie praktyczne, z uwagi na napędy tłokowe. W pracy wykorzystano metodę bilansu harmoniczych do wyznaczania stanu ustalonego w maszynie synchronicznej przy wymuszeniu momentem mechanicznym zawierającym okresową składową przemienną będącą funkcją kąta obrotu. Amplitudę kołysań mechanicznych, jak i prądy maszyny obciążonej takim momentem wyznaczano dotychczas najczęściej poprzez całkowanie numerycznie równań dynamiki maszyny i współpracującego z nią układu mechanicznego. Wymagało to „przechodzenia” w trakcie obliczeń każdorazowo przez stan nieustalony, wywołany pojawieniem się składowej okresowej. Zastosowana w pracy metoda pozwala bezpośrednio przewidzieć harmoniczne całek szczególnych układu nieliniowych równań różniczkowych opisujących maszynę synchroniczną pod warunkiem, że maszyna zachowa prędkość synchroniczną oraz że znany jest przebieg okresowo zmiennego momentu mechanicznego. W wyniku zostaną określone widma Fouriera prądów stojana i wzbudzenia oraz klatek, a także widmo Fouriera wahań kąta mocy i prędkości obrotowej.

### 1. WSTĘP

Obciążenie silników synchronicznych kompresorami tłokowymi bądź napędzanie generatorów synchronicznych przez silniki tłokowe (np. Diesla) powoduje powstanie nierównomiernego w czasie, lecz okresowo zmiennego momentu na wale maszyny synchronicznej [1]. Moment ten wynika przede wszystkim z pulsującego charakteru siły działającej na tłoki cylindrów i zależy od kąta obrotu wału maszyny tłokowej. Oscylacje momentu mechanicznego powodują wahania prędkości kątowej maszyny synchronicznej, co wpływa bezpośrednio na zmienność kąta obciążenia (kąta mocy).

---

\* Zespół Placówek Kształcenia Zawodowego, ul. Zamenhofska 1, 33-300 Nowy Sącz.

\*\* Politechnika Krakowska, Instytut Elektromechanicznych Przemian Energii, ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków,

Zmieniająca się w czasie wielkość kąta mocy wywołuje oscylacje amplitud prądów w uzwojeniach maszyny. Wzajemne oddziaływanie wielkości mechanicznych (kąt obrotu, prędkość kątowna) na wielkości elektryczne (prądy, strumienie skojarzone) skutkuje tym, że równania obwodów elektrycznych maszyny muszą być rozwiązywane łącznie z równaniem mechanicznym. Sprowadza to problem wyznaczenia stanu ustalonego dla takiego układu elektromechanicznego do rozwiązania, w najprostszym przypadku, układu sześciu nieliniowych równań różniczkowych [3]. W pracy [2] zostały sformułowane formuły matematyczne umożliwiające bezpośrednio określenie rozwiązań ustalonych w takich przypadkach z wykorzystaniem metody bilansu harmonicznego, przy podstawowym założeniu, że istnieje rozwiązanie okresowe.

Do analizy wybrano problem poszukiwania stanu ustalonego silnika synchronicznego jawno-biegunowego obciążonego momentem mechanicznym z okresową składową pulsacyjną zależną od kąta obrotu wirnika  $\varphi$ , nie powodującym wypadnięcia silnika z synchronizmu. Założono liniowość obwodu magnetycznego maszyny i budowę czyniącą zasadnym obwodowy opis, z dwuosiową reprezentacją obwodów tłumiących wirnika. Ponadto przyjęto typowy układ zasilania, a więc trójfazowy układ napięć na uzwojeniach stojana i napięcie stałe na uzwojeniu wzbudzenia. W tym przypadku można skorzystać z metody bilansu harmonicznego.

## 2. METODA BILANSU HARMONICZNYCH W ZASTOSOWANIU DO UKŁADU RÓWNAŃ OPISUJĄCYCH SILNIK SYNCHRONICZNY

Równania silnika synchronicznego zapisano w układzie współrzędnych wirujących (0, +, -). Mają one, przy pominięciu równania dla składowej zerowej o zerowym rozwiązaniu, postać (1a, b). Użyte w zależnościach (1a, b) oznaczenia są ogólnie przyjętymi w maszynach elektrycznych i wynikają z wybranego układu współrzędnych.

$$\begin{bmatrix} u^+ \\ u^- \\ U_f' \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s \cdot i^+ \\ R_s \cdot i^- \\ R_f' \cdot i_f' \\ R_D' \cdot i_D' \\ R_Q' \cdot i_Q' \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi^+ \\ \psi^- \\ \psi_f' \\ \psi_D' \\ \psi_Q' \end{bmatrix} + j \cdot \Omega_s \begin{bmatrix} \psi^+ \\ -\psi^- \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1a)$$

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + D \frac{d\varphi}{dt} = j \cdot p \cdot (i^- \cdot \psi^+ - i^+ \cdot \psi^-) + T_m(\varphi) \quad (1b)$$

Transformację obrotu na płaszczyźnie zespolonej dobrano w taki sposób, aby symetryczny układ napięć zasilających fazy stojana był odwzorowany przez napięcia stałe

w czasie. W celu skorzystania z metody bilansu harmonicznych zmodyfikowano równanie (1b) do postaci (2) wykorzystując związek  $\varphi(t) = (\Omega_s / p) \cdot t + \Delta\varphi(t)$ ,

$$J \frac{d^2 \Delta\varphi}{dt^2} + D \frac{d\Delta\varphi}{dt} = j \cdot p \cdot (i^- \cdot \psi^+ - i^+ \cdot \psi^-) + T_m(\varphi) - D \frac{\Omega_s}{p} \quad (2)$$

a następnie zapisano obydwie zależności (1a) i (2) w postaci jednego równania wektorowego (3) w którym  $\mathbf{x} = [i^+ \quad i^- \quad i'_f \quad i'_D \quad i'_Q \quad \Delta\varphi]^T$  jest wektorem poszukiwanych rozwiązań.

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{F}_2(\mathbf{x}) + \frac{d}{dt} \mathbf{F}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{F}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (3)$$

Wektor rozwiązań  $\mathbf{x}$ , podobnie jak i wektory funkcji  $\mathbf{F}_0$ ,  $\mathbf{F}_1$  i  $\mathbf{F}_2$  przewiduje się w postaci szeregów Fouriera (4) o nieznanym okresie  $T_x$  i podstawia do zależności (3).

$$\mathbf{x} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{X}_k \cdot e^{jk\Omega_x t}; \quad \mathbf{F}_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{F}_{n,k} \cdot e^{jk\Omega_x t} \quad \text{gdzie: } n \in \{0, 1, 2\}, \quad \Omega_x = 2\pi / T_x \quad (4)$$

Korzystając z właściwości jednoznaczności szeregów Fouriera dokonuje się ich bilansowania po obu stronach równania (3), co prowadzi do utworzenia układu nieskończenie wielu nieliniowych równań algebraicznych o nieskończonej ilości zmiennych (5) wiążących zależności między współczynnikami szeregów Fouriera funkcji  $\mathbf{F}_0$ ,  $\mathbf{F}_1$  i  $\mathbf{F}_2$ .

$$-\text{diag} \begin{bmatrix} \vdots \\ \Omega^2 \\ \mathbf{0} \\ \Omega^2 \\ \vdots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{F}_{2,1} \\ \mathbf{F}_{2,0} \\ \mathbf{F}_{2,-1} \\ \vdots \end{bmatrix} + \text{diag} \begin{bmatrix} \vdots \\ j\Omega \\ \mathbf{0} \\ -j\Omega \\ \vdots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{F}_{1,1} \\ \mathbf{F}_{1,0} \\ \mathbf{F}_{1,-1} \\ \vdots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{F}_{0,1} \\ \mathbf{F}_{0,0} \\ \mathbf{F}_{0,-1} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (5)$$

gdzie:  $\Omega = \Omega_x \cdot E = 2\pi f_x \cdot E$ ;  $E$  – macierz jednostkowa o wymiarze  $[6 \times 6]$ .

Wykorzystanie notacji tzw. wektorowych reprezentacji szeregów Fouriera [4] pozwala na sprowadzenie układu równań (5) do postaci (6), co ułatwi zapisy formalne w dalszej części pracy.

$$-(\Omega)^2 \cdot \mathbf{F}_2(\mathbf{x}) + j \cdot \Omega \cdot \mathbf{F}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{F}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (6)$$

W celu wyznaczenia okresu  $T_x$  poszukiwanego rozwiązania założono w rozpatrywanym przypadku, że moment na wale silnika synchronicznego jest sumą momentu o wartości stałej  $T_0$  i momentu mono-harmonicznego o amplitudzie  $T_1$ .

$$T_m(\varphi) = T_0 + T_1 \cdot \cos(K \cdot \varphi) \quad (7)$$

Zgodnie z przyjętymi we wstępie założeniami, prędkość kątowna silnika w stanie ustalonym będzie się wahać okresowo z częstotliwością  $f_x$  składowej przemiennej momentu mechanicznego. Okresowość momentu obciążenia  $T_m(\varphi)$  względem kąta można sprowadzić do okresowości względem czasu  $T_m(t) = T_m(t + T_x)$ , co oznacza, że po upływie określonego czasu  $T_x$ , będzie powtarzał się przebieg momentu mechanicznego na wale silnika. Sytuacja taka jest możliwa wtedy, gdy:

$$T_x = (p/K) \cdot T_s; \quad T_s - \text{okres zmian napięcia w sieci trójfazowej} \quad (8)$$

### 3. ROZWIĄZYWANIE UKŁADU RÓWNAŃ ALGEBRAICZNYCH OPISUJĄCYCH STAN USTALONY

Nieliniowość równania (6) sprawia, że znalezienie rozwiązania jest możliwe w oparciu o metody numeryczne. Do tego celu wybrano procedurę iteracyjną Newtona–Raphsona o postaci (9). Pozwala ona na wyznaczenie rozwiązania z zadaną dokładnością, przy ograniczeniu ilości branych pod uwagę równań do rozmiarów skończonych.

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - \mathbf{J}(\mathbf{x}_n)^{-1} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}_n) \quad (9)$$

gdzie:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -(\boldsymbol{\Omega})^2 \cdot \mathbf{F}_2(\mathbf{x}) + j \cdot \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{F}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{F}_0(\mathbf{x}); \quad \mathbf{J}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \quad (10)$$

### 4. WYNIKI OBLICZEŃ NUMERYCZNYCH

Implementacji numerycznej opisanych powyżej zależności matematycznych dokonano przy użyciu komercyjnego pakietu MATLAB. Do obliczeń wykorzystano dane konstrukcyjne silnika typu GAe-148s o danych znamionowych  $P_N = 1250$  kW,  $U_N = 6$  kV,  $n_0 = 750$  obr/min,  $\cos\varphi_N = 0,9$ . Przyjęto, że przebieg momentu mechanicznego na wale silnika synchronicznego opisywany jest zależnością  $T_m(\varphi) = T_N + 0,1T_N \cdot \cos(2 \cdot \varphi)$ . W rezultacie w stanie ustalonym prąd stojana fazy „a”, prąd wzbudzenia, prądy klatek, a także kąt mocy i prędkość kątowna wirni-

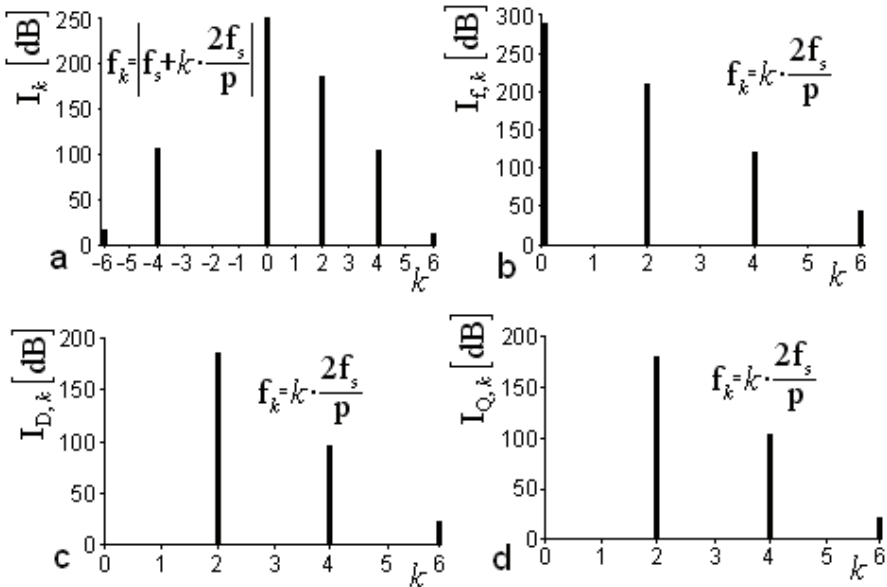
ka silnika synchronicznego zostały przewidziane w postaci następujących szeregów Fouriera:

$$i_a(t) = \sum_{k=-N}^N I_k \cdot \cos \left[ 2\pi \left( f_s + k \cdot \frac{2f_s}{p} \right) t + \alpha_k^+ \right]; \quad i_f'(t) = I_{f,0} + \sum_{k=1}^N I_{f,k} \cdot \cos \left[ 2\pi \left( k \cdot \frac{2f_s}{p} \right) t + \beta_k \right]$$

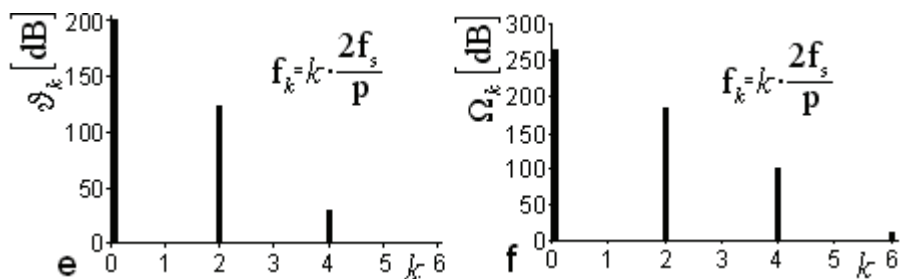
$$i_D'(t) = \sum_{k=1}^N I_{D,k} \cdot \cos \left[ 2\pi \left( k \cdot \frac{2f_s}{p} \right) t + \chi_k \right]; \quad i_Q'(t) = \sum_{k=1}^N I_{Q,k} \cdot \cos \left[ 2\pi \left( k \cdot \frac{2f_s}{p} \right) t + \lambda_k \right]$$

$$g(t) = g_0 + \sum_{k=1}^N g_k \cdot \cos \left[ 2\pi \left( k \cdot \frac{2f_s}{p} \right) t + \nu_k \right]; \quad \omega(t) = \Omega_0 + \sum_{k=1}^N \Omega_k \cdot \cos \left[ 2\pi \left( k \cdot \frac{2f_s}{p} \right) t + \gamma_k \right] \quad (11)$$

Na wykresach przedstawiono w skali decybelowej widma amplitudowe powyższych wielkości, ograniczając się do zamieszczenia tylko kilku kolejnych harmonicznych.



Rys. 1. Widma Fouriera: a) prądu stojana, b) prądu wzbudzenia, c, d) prądów klatek  
Fig. 1. Fourier spectrum of a: a) stator current, b) rotor current, c, d) cage currents



Rys. 1. Widma Fouriera: e) kąta mocy, f) prędkości kątovej wirnika

Fig. 1. Fourier spectrum of a: e) power angle, f) angular velocity

## 5. WNIOSKI

Opisany algorytm pozwala na bezpośrednie, precyzyjne i jednoznaczne wyznaczenie harmonicznyc wielkości opisujących maszynę synchroniczną w przypadkach, gdy maszyna zachowa prędkość synchroniczną, a moment mechaniczny jest opisywany przez jawną funkcję kąta obrotu wirnika.

## LITERATURA

- [1] ANUSZCZYK J., *Maszyny elektryczne w energetyce. Zagadnienia wybrane*, WNT, Warszawa, 2005, 124–126.
- [2] RADZIK M., *Algorytm bezpośredniego określania stanów ustalonych w maszynach synchronicznych z uwzględnieniem równania ruchu*, Rozprawa doktorska, Instytut Elektromechanicznych Przemian Energii, Politechnika Krakowska, Kraków 2011, 90–103.
- [3] SKWARCZYŃSKI J., TERTIL Z., *Maszyny elektryczne, Część druga: Teoria*, Wydawnictwa AGH, Kraków, 1997, 100.
- [4] SOBCZYK T.J., *Metodyczne aspekty modelowania matematycznego maszyn indukcyjnych*, WNT, Warszawa 2004, 192–193.

## ANALYSIS OF SYNCHRONOUS MACHINE AT LOAD TORQUE PERTURBATIONS BOUND UP WITH ANGLE OF ROTATION

This paper presents an algorithm for direct determination of steady-state solutions of synchronous machine equations when some perturbations occur in a mechanical load and bound up with angle of rotation. Algorithm allows to determine directly, precisely and clearly the Fourier spectra of machine currents and angular velocity. Exemplary computations are done for a synchronous motor running synchronously and loaded by a mechanical torque with a periodic ac component.