

Tomasz RYMARCZYK
Stefan F. FILIPOWICZ

IMPLEMENTACJA FUNKCJI ZBIORÓW POZIOMICOWYCH W ALGORYTMACH KONSTRUKCJI OBRAZU TOMOGRAFICZNEGO

STRESZCZENIE *W pracy przedstawiono metodę rozwiązania zagadnienia odwrotnego w tomografii impedancyjnej opartą na idei zbiorów poziomicowych. Algorytm numeryczny rozwiązania jest odpowiednią kombinacją funkcji zbiorów poziomicowych, algorytmu Chan-Vese i wariacyjnych modyfikacjach wymienionych metod. Do rozwiązania zagadnienia prostego została wykorzystana metoda elementów skończonych.*

Słowa kluczowe: *metoda zbiorów poziomicowych, Chan-Vese model, zagadnienie odwrotne, tomografia impedancyjna*

1. WSTĘP

W pracy przedstawiono metodę rozwiązania zagadnienia odwrotnego w tomografii impedancyjnej [3, 10] opartą na idei zbiorów poziomicowych (ang. *Level Set Method*) [7, 8, 9], wariacyjnej wersji funkcji poziomicowej [5]

mgr inż. Tomasz RYMARCZYK
e-mail: tomasz@rymarczyk.com

prof. dr hab. inż. Stefan F. FILIPOWICZ
e-mail: 2xf@nov.iem.pw.edu.pl

Instytut Elektrotechniki

oraz algorytmie Chan-Vese [1, 2, 6]. Wartości konduktywności ustalano rozwiązując zagadnienie proste przy użyciu metody elementów skończonych. Algorytm numeryczny rozwiązania jest odpowiednią kombinacją metod zbiorów poziomicowych, algorytmu Chan-Vese i metody elementów skończonych.

2. TOMOGRAFIA IMPEDANCYJNA

Algorytm konstrukcji obrazu wykonuje ciągłą aproksymację rozkładu współczynnika materiałowego przy użyciu odpowiedniej kombinacji metody zbiorów poziomicowych i metody elementów skończonych [4]. Reprezentacja kształtu brzegu szukanego obiektu i jego ewolucja podczas iteracyjnego procesu rekonstrukcji jest osiągana przy pomocy metody zbiorów poziomicowych. Pochodna kształtu jest bezpośrednio powiązana z pochodną normalną potencjału wzdłuż badanego brzegu. Wartości konduktywności w różnych obszarach są inicjowane po zdefiniowaniu zerowego zbioru poziomicowego. W przedstawionym algorytmie wewnętrzne obiekty opisane są przez funkcję zbiorów poziomicowych, która jest dyskretyzowana na stałej siatce kartezjańskiej. Zakładana jest liniowość pomiędzy punktami siatki. Dodatkowo obliczane są punkty na liniach siatki. Funkcja celu jest zdefiniowana jako średniokwadratowa wartość błędu rekonstrukcji odniesiona do wektora napięć międzyelektrodowych. Dla pojedynczego kroku iteracyjnego k można ją przedstawić następująco:

$$\Phi_1^k = 0.5(\varphi^k - u_o)^2 \quad (1)$$

gdzie:

- Φ – funkcja celu,
- φ – napięcie obliczone,
- u_o – napięcie pomierzone.

Pochodna funkcji celu Φ względem γ wyrażana jest następująco:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} = -\sum_{j=1}^p \nabla \varphi_j \nabla \lambda_j \quad (2)$$

gdzie:

- γ – konduktywność,
- p – liczba kątów projekcji,
- λ – potencjał równania sprzężonego.

Funkcja zbiorów poziomicowych w kolejnych krokach jest uaktualniana zgodnie z relacją:

$$\phi^{k+1} = \phi^k - \mu \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \quad (3)$$

gdzie:

ϕ – funkcja zbioru poziomicowego, współczynnik $\mu > 0$.

Pochodną funkcji celu Φ względem ϕ określamy:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} = \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \phi} = \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} (\gamma_I - \gamma_{II}) \delta(\phi) \quad (4)$$

Pochodna funkcji celu Φ względem γ_I i γ_{II} przedstawia się następująco:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_I} = \int_{\Omega} \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \gamma_I} ds = \int_{\Omega} \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} \mathbf{H}(\phi) ds \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{II}} = \int_{\Omega} \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \gamma_{II}} ds = \int_{\Omega} \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} (1 - \mathbf{H}(\phi)) ds \quad (5)$$

Konduktywności obliczane są wg następujących wzorów:

$$\gamma_I^{k+1} = \gamma_I^k - \beta \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_I} \quad \gamma_{II}^{k+1} = \gamma_{II}^k - \beta^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{II}} \quad (6)$$

gdzie:

β – współczynnik $\beta > 0$,
 γ_I, γ_{II} – konduktywności obszarów.

Ostatecznie funkcja zbioru poziomicowego przyjmie następującą postać:

$$\phi^{k+1} = \phi^k - \mu (\nabla \lambda_k \cdot \nabla \phi_k) (\gamma_I - \gamma_{II}) \delta(\phi) \quad (7)$$

Algorytm numeryczny rekonstrukcji obrazu składa się z następujących kroków:

- inicjalizacja zerowego zbioru poziomicowego,
- rozwiązanie równanie Laplace'a w badanym obszarze,
- rozwiązywanie równania sprzężonego do równania stanu,
- wyznaczenie składowej normalnej prędkości,
- uaktualnienie funkcji zbioru poziomicowego,

- reinicjalizacja,
- sprawdzanie warunku zbieżności.

W metodzie wariacyjnej rekonstrukcji obiektów nie używa się reinicjalizacji. Eliminuje to konieczność rozwiązywania dodatkowego równania poprawiając przez to szybkość obliczeń. Algorytm konstrukcji obrazu w tym przypadku jest połączeniem wariacyjnej metody zbiorów poziomicowych oraz metody elementów skończonych. Za pomocą odpowiednio zmodyfikowanej funkcji zbiorów poziomicowych w procesie iteracyjnym dokonywana jest reprezentacja kształtu brzegu i jego ewolucji.

Do obliczenia zagadnienia prostego oraz określenia składowej potencjału i składowej zmian krzywizny wykorzystywana jest metoda elementów skończonych. Wewnętrzne obiekty badanej przestrzeni opisane są funkcją zbiorów poziomicowych, podobnie jak w poprzednim algorytmie. Funkcja celu zdefiniowana jest jako średniokwadratowa wartość błędu rekonstrukcji odniesiona do wektora napięć międzyelektrodowych.

Dla metody wariacyjnej równanie przedstawia się następująco:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \mu \left[\Delta \phi - \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) \right] + (\nabla \lambda \cdot \nabla \varphi) \delta(\phi) \quad (8)$$

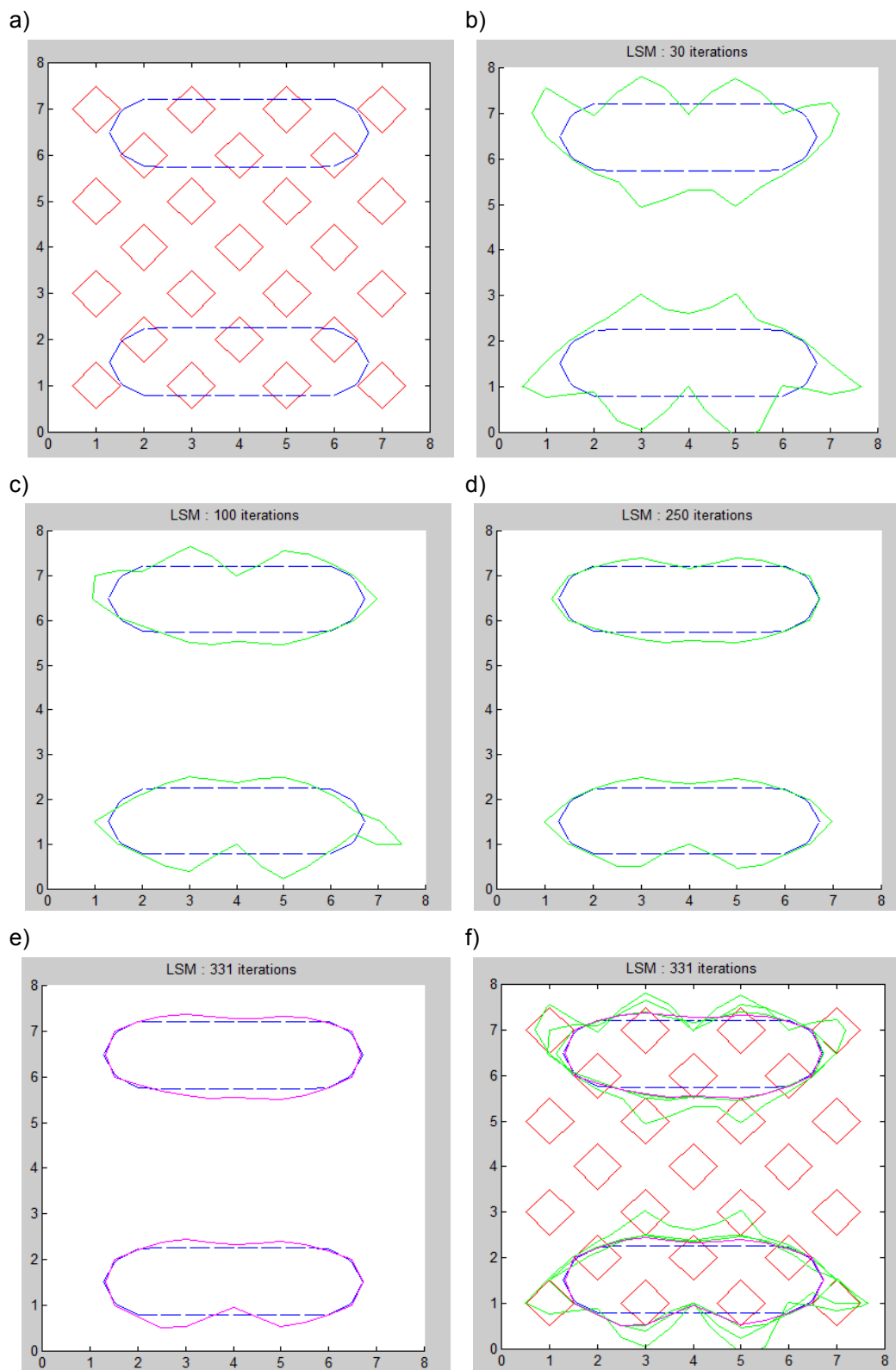
Algorytm numeryczny rekonstrukcji obrazu:

- inicjalizowanie zerowego zbioru poziomicowego funkcji $\phi(x, y)$ obejmującego nieznaną kształt,
- rozwiązanie równanie Laplace'a w badanym obszarze,
- obliczanie różnicy pomiędzy wartością napięcia obliczoną, a pomierzoną,
- rozwiązywane jest równanie sprzężone do równania stanu,
- wyznaczanie składowej normalnej prędkości,
- uaktualnianie funkcji zbioru poziomicowego:

$$\phi_t^{k+1} = \phi_t^k - \Delta t \left[\mu \left(\Delta \phi - \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) \right) + (\nabla \lambda_k \cdot \nabla \varphi_k) \delta(\phi) \right] \quad (9)$$

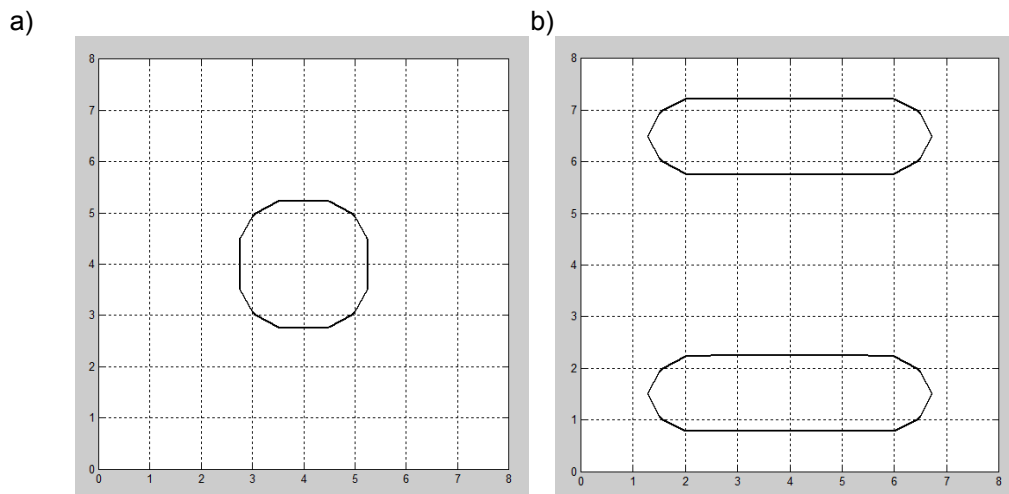
Proces rozwiązania powtarzany jest do momentu aż zostaną osiągnięte zadawalające warunki zbieżności.

Na rysunku 1 przedstawiono rekonstrukcję obrazu przy rozdzielczości 16×16 pikseli. Zerowy zbiór poziomicowy reprezentowany jest przez funkcję przedstawioną na rysunku 1a. Kolejne etapy ewolucji przedstawiają rysunki 1b-1d. Poszukiwany obiekt obramowany jest przerywaną linią. Na rysunku 1e został przedstawiony zrekonstruowany obraz.

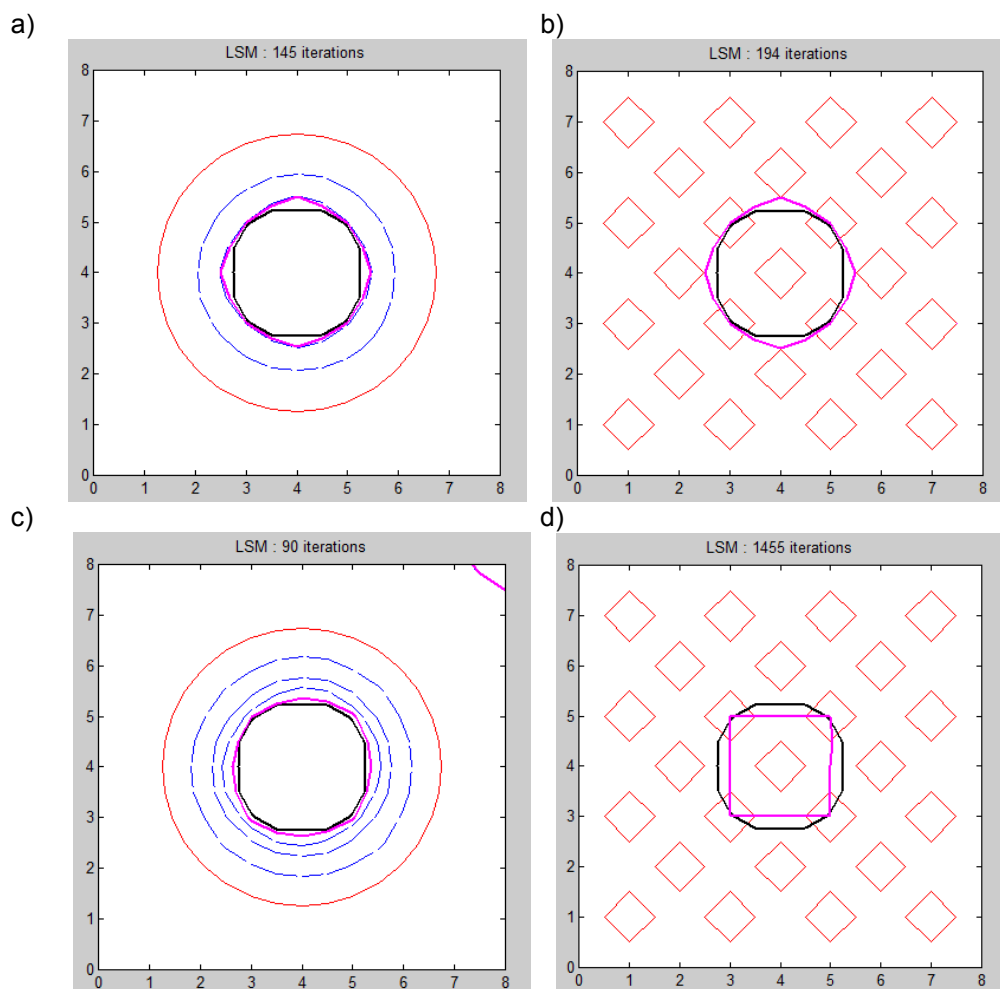


Rys. 1. Rekonstrukcja obrazu:

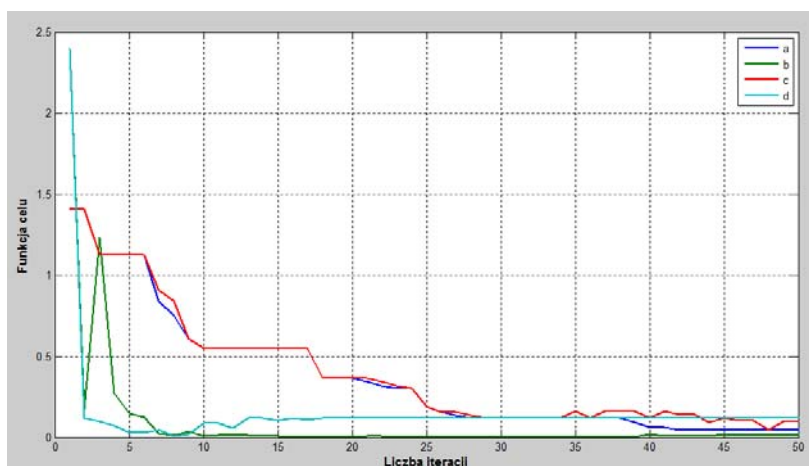
a) oryginalny obiekt i zerowa funkcja zbioru poziomicowego, b) funkcja zbioru poziomicowego po 30 iteracjach, c) po 100 iteracjach, d) po 250 iteracjach, e) końcowa rekonstrukcja, f) proces rekonstrukcji



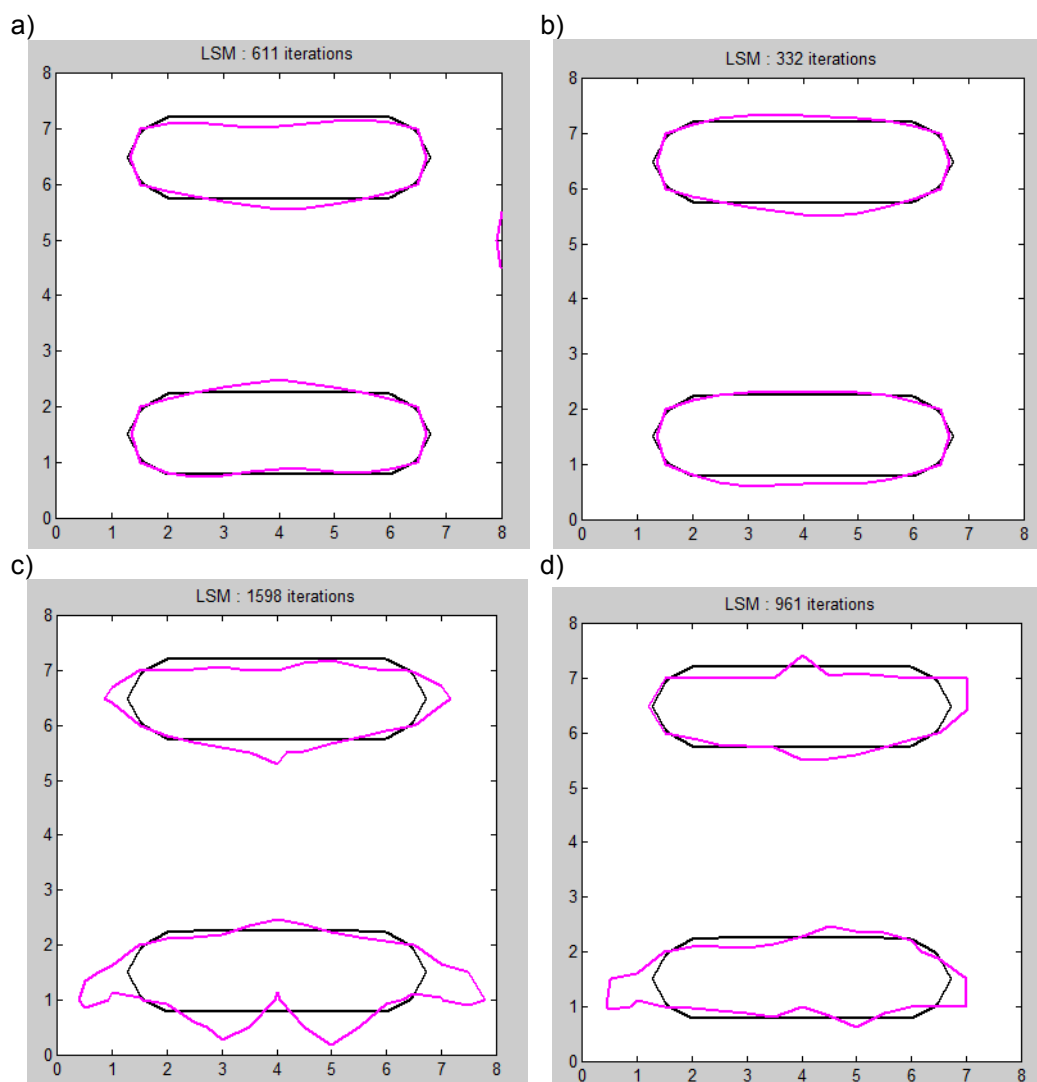
Rys. 2. Modele obiektu:
a) jeden obiekt, b) dwa obiekty



Rys. 3. Porównanie metod dla jednego obiektu:
a) metoda zbiorów poziomicowych, b) model Mumforda-Shaha, c) wariacyjna metoda zbiorów poziomicowych, d) wariacyjna metoda zbiorów poziomicowych z modelem Mumforda-Shaha

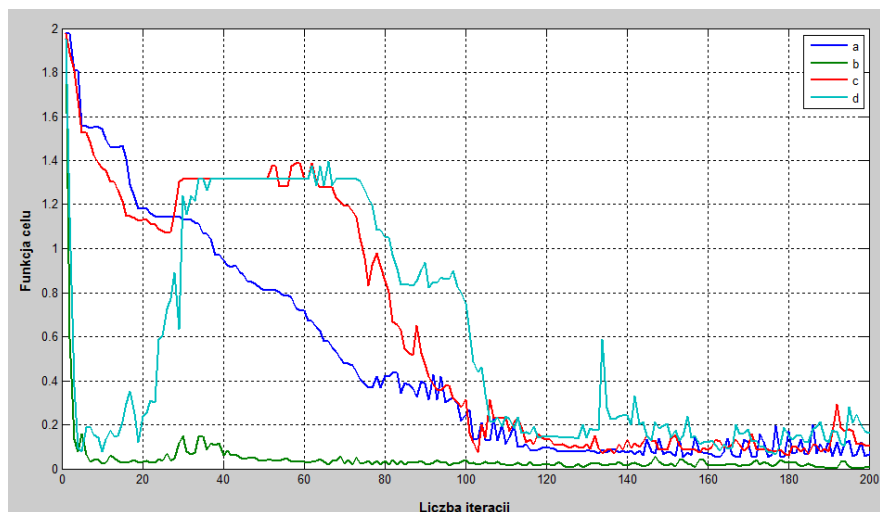


Rys. 4. Funkcja celu dla jednego obiektu – porównanie metod



Rys. 5. Porównanie metod konstrukcji obrazu dla dwóch obiektów:
 a) metoda zbiorów poziomicowych, b) model Mumforda-Shaha, c) wariacyjna metoda zbiorów poziomicowych, d) wariacyjna metoda zbiorów poziomicowych z modelem Mumforda-Shaha

Głównym kryterium wyboru określonego algorytmu obliczeniowego jest czas i dokładność odtworzonego obrazu. W pracy została porównana jakość odtwarzania obrazu kilku wybranych metod. Przyjęty obiekt wzorcowy (rys. 2), złożony z jednego i dwóch elementów umieszczony wewnątrz badanego obiektu. Zadanie polegało na prawidłowej identyfikacji położenia i rozmiarów obiektów. Obraz obiektu otrzymany różnymi metodami przedstawiono na rysunku 3. Natomiast wykres funkcji celu dla tych metod obrazuje rysunek 4. Można zaobserwować, że metoda zbiorów poziomicowych oraz jej postać wariacyjna z modelem Mumforda-Shaha (algorytm Chan-Vese) szybciej osiągają stabilność w procesie rekonstrukcji. Metoda zbiorów poziomicowych precyzyjniej odtwarza obraz przy rozdzielczości 16x16 pikseli, natomiast wariacyjna jej postać z modelem Mumforda-Shaha szybciej minimalizuje funkcję celu, biorąc pod uwagę rozdzielczość, jakość i czas rekonstrukcji. Dla dwóch obiektów (rys. 5 i 6) najlepszy efekt daje wariant metody zbiorów poziomicowych z modelem Mumforda-Shaha. W tabeli 1 przedstawiono porównanie wartości funkcji celu dla różnych algorytmów rekonstrukcji obrazów tomograficznych.



Rys. 6. Funkcja celu dla dwóch obiektów – porównanie metod

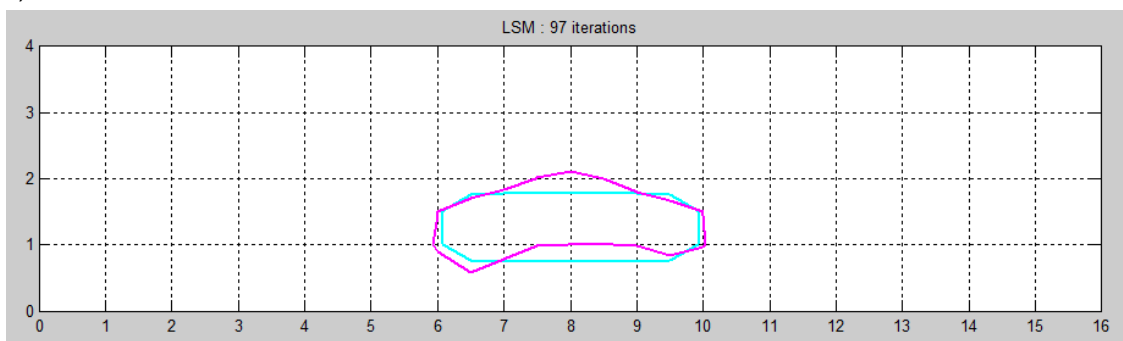
TABELA 1

Wartości funkcji celu dla różnych algorytmów rekonstrukcji

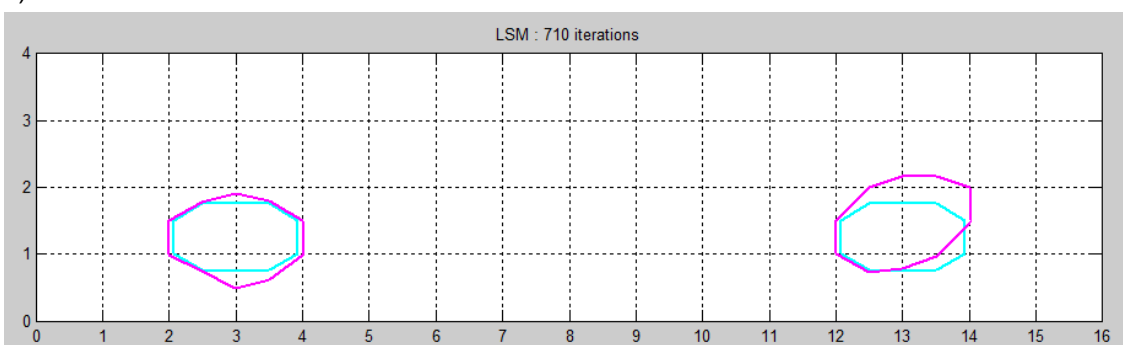
ALGORYTM	Funkcja celu (minimum)	
	1 obiekt	2 obiekty
Metoda zbiorów poziomicowych	145	611
Model Mumford-Shaha	194	332
Wariacyjna metoda zbiorów poziomicowych	90	1598
Wariacyjna metoda zbiorów poziomicowych z modelem Mumford-Shaha	1455	961

Na rysunku 7 przedstawiono rekonstrukcję obrazu chodnika wydobywczego w kopalni miedzi. Zarówno położenie defektu jak i jego wymiary zostały określone poprawnie. Rekonstrukcji dokonano wykorzystując funkcję zbiorów poziomicowych. Na rysunku 8 pokazano zbieżność algorytmu przy kolejnych iteracjach.

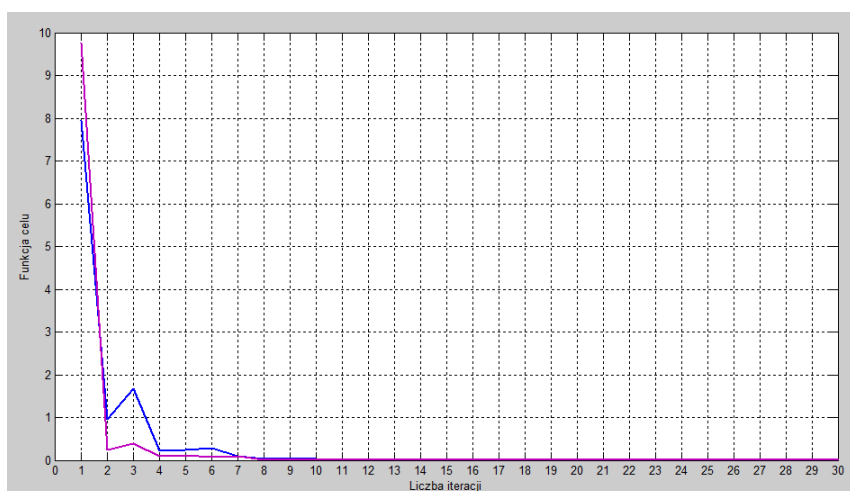
a)



b)



Rys. 7. Rekonstrukcja położenia szczeliny w chodniku metodą zbiorów poziomicowych:
a) jeden obiekt, 2) dwa obiekty



Rys. 8. Zbieżność algorytmu rekonstrukcji

3. WNIOSKI

Rekonstrukcja obrazów została oparta na odpowiedniej kombinacji różnych wariantów metody zbiorów poziomicowych, metody granicy podobszarów i metody elementów skończonych. Na jakość obrazów i szybkość ich rekonstrukcji duży wpływ mają elementy algorytmu oraz parametry poszczególnych równań. Wybór rodzaju rozwiązania ma decydujący wpływ na zbieżność algorytmu i jakość otrzymywanych wyników. Metoda zbiorów poziomicowych w przedstawionych przypadkach udowadnia swoją wyższość w porównaniu do innych sposobów modelowania.

LITERATURA

1. Chan T., Vese L., "Active contours without edges", IEEE Trans. Imag. Proc., vol. 10, pp. 266-277, 2001.
2. Chan T., Vese L.: *A level set algorithm for minimizing the Mumford- Shah functional in image processing*. Proceedings of IEEE Workshop on Variational and Level Set Methods in Computer Vision, pp. 161-168, Vancouver, Canada, 2001.
3. Filipowicz S.F., Rymarczyk T.: Tomografia Impedancyjna, pomiary, konstrukcje i metody tworzenia obrazu. BelStudio, Warsaw 2003.
4. Filipowicz S.F., Rymarczyk T., Sikora J.: Level Set Method for inverse problem solution in electrical impedance tomography. XII ICEBI & V EIT Conference. Gdańsk 2004.
5. Li C., Xu C., Gui C., and M. D. Fox. *Level set evolution without re-initialization: A new variational formulation*. In IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), volume 1, pages 430–436, 2005.
6. Mumford D., Shah J.: Optimal approximation by piecewise smooth functions and associated variational problems. *Comm. Pure Appl. Math.*, (42):577–685, 1989.
7. Osher S., Fedkiw R.: *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*. Springer, New York 2003.
8. Osher S., Sethian J.A.: Fronts Propagating with Curvature Dependent Speed: Algorithms Based on Hamilton-Jacobi Formulations. *J. Comput. Phys.* 79, 12-49, 1988.
9. Sethian J.A.: *Level Set Methods and Fast Marching Methods*. Cambridge Univeristy Press 1999.
10. Sikora J.: *Algorytmy numeryczne w tomografii impedancyjnej i wiroprowodowej*. WPW, Warszawa 2000.

TOPOLOGICAL CHANGE OF THE SHAPE
THE LEVEL SET FUNCTION
IN THE IMAGE RECONSTRUCTION

Tomasz RYMARCZYK,
Stefan F. FILIPOWICZ

ABSTRACT *The problem of the image reconstruction in Electrical Impedance Tomography (EIT) is a highly ill-posed inverse problem. There are mainly two categories of image reconstruction algorithms, the direct algorithm and the iterative algorithm which was used in this publication. The representation of the shape of the boundary and its evolution during an iterative reconstruction process is achieved by the level set function and Chan-Vese model or by the variational level set method. The forward problem was solved by the finite element method.*

