

Henryk Banach
Politechnika Lubelska

SPRAWNOŚĆ MAKSYMALNA INDUKCYJNEGO SILNIKA KLATKOWEGO

MAXIMUM EFFICIENCY OF AN INDUCTION SQUIRREL-CAGE MOTOR

Abstract: This article presents considerations on the condition of the occurrence of maximum efficiency in the three-phase induction motor supplied by a constant voltage value. A relationship was derived, which allows to calculate with great accuracy the location of maximum efficiency. Comparison of laboratory results with the results of efficiency calculations confirmed the possibility of analytical determination of the output power for maximum efficiency. A general condition for the occurrence of maximum efficiency was formulated, which speaks about the approximate equality of no-load losses and losses in the windings of the rotor current. Calculation tests performed for the two groups losses for maximum efficiency point confirmed the general condition of maximum efficiency. Laboratory studies were conducted using the squirrel-cage motor with rated power $P_N = 1.1$ kW and rated speed $n_N = 1415$ rpm.

1. Wstęp

Rozważania dotyczą trójfazowego silnika indukcyjnego klatkowego przyłączonego bezpośrednio do sieci i zasilanego napięciem o stałej wartości, najczęściej napięciem znamionowym.

Wiadomo, że krzywa sprawności jest zazwyczaj tak ukształtowana, że jej maksimum przypada dla obciążenia mniejszego od znamionowego, najczęściej w przedziale $(0,6 - 1,0)P_N$. Na ten przedział wskazują wyniki badań przeprowadzone na wielu silnikach indukcyjnych.

W literaturze nadal brakuje dokładnej zależności warunkującej występowanie maksimum sprawności, sformułowanej w oparciu o dokładny zapis strat. Rozważania ograniczają się zwykle do powierzchniowej analizy strat i najczęściej warunek ten zostaje sprowadzony do równości strat stałych i strat zmiennych.

W artykule posłużono się pojęciami: maksimum sprawności oraz sprawność maksymalna, które są tożsame i będą używane zamiennie.

2. Dotychczasowy pogląd na zagadnienie

Ogólny zapis warunku na występowanie maksimum sprawności mówi o równości strat stałych i strat zmiennych. Jako straty stałe przyjmowano straty jałowe P_o będące sumą strat w żelazie P_{Fe} i strat mechanicznych P_m

$$P_o = P_{Fe} + P_m \quad (1)$$

Jako straty zmienne przyjmowano straty w uzwojeniach P_w i przedstawiano je jako proporcjonalne do kwadratu prądu stojana [2]

$$P_w \approx mI_s^2(R_s + R_r) \quad (2)$$

gdzie: m - ilość faz, R_s - rezystancja uzwojenia stojana, R_r - rezystancja uzwojenia wirnika sprowadzona na stronę stojana.

Nürnberg w [1] wprowadził korektę do zapisu strat stałych dodając trzeci składnik w postaci strat w uzwojeniu stojana od prądu magnesującego I_m

$$P_o = P_{Fe} + P_m + 3R_s I_m^2 \quad (3)$$

Straty zmienne w tym przypadku byłyby to straty w uzwojeniach silnika proporcjonalne do mocy wydawanej P . Tak są również przedstawiane w [3]. Obaj autorzy nie powiązali jednak tych strat z prądem wirnika.

3. Warunek na występowanie sprawności maksymalnej

Poszukiwania warunku na maksimum sprawności powinny uwzględniać wszystkie straty występujące zarówno w stojanie, jak i w wirniku. Sprawność silnika zdefiniowana zostanie jako stosunek mocy wydawanej do sumy mocy wydawanej i strat całkowitych silnika

$$\eta = \frac{P}{P + P_t} \quad (4)$$

Straty całkowite P_t będą równe

$$P_t = P_{Fe} + P_m + 3R_s I_s^2 + 3R_r I_r^2 \quad (5)$$

Zakładając ortogonalność prądu wirnika i prądu magnesującego wyrażenie na prąd stojana (6) przybierze postać

$$I_s = \sqrt{I_m^2 + (I_{Fe} + I_r)^2} \quad (6)$$

Po podstawieniu zależności (6) do wyrażenia (5) otrzymuje się po przekształceniach

$$P_t = P_{Fe} + P_m + 3R_s I_o^2 + 3(R_s + R_r)I_r^2 + 6R_s I_r I_{Fe} \quad (7)$$

W celu uproszczenia dalszych zapisów suma rezystancji uzwojenia stojana i sprowadzonej rezystancji uzwojenia wirnika może być zastąpiona rezystancją R_k .

$$R_k = R_s + R_r \quad (8)$$

Straty całkowite będą równe

$$P_t = P_{Fe} + P_m + 3R_s I_o^2 + 3R_k I_r^2 + 6R_s I_r I_{Fe} \quad (9)$$

Przy założeniu, że napięcie zasilania pozostaje stałe $U_s = \text{const.}$ oraz napięcie indukowane także $U_i = \text{const.}$, z powyższego wyrażenia można wyodrębnić straty biegu jałowego niezależne od obciążenia

$$P_{ino} = P_{Fe} + P_m + 3R_s I_o^2 \quad (10)$$

Pomija się tutaj niewielką składową prądu wirnika występującą przy biegu jałowym, która dodaje się do prądu I_{Fe} . Pominięcie tej składowej prądu biegu jałowego praktycznie nie ma istotnego wpływu na wartość prądu I_o , gdyż o jego wartości decyduje składowa magnesująca I_m .

Po podstawieniu wyrażenia na straty całkowite dostaje się wyrażenie na sprawność

$$\eta = \frac{P}{P + P_{ino} + 3R_k I_r^2 + 6R_s I_r I_{Fe}} \quad (11)$$

Prąd wirnika związany jest z mocą obciążenia zależnością wyprowadzoną w [5] o postaci

$$I_r = \frac{3U_i - \sqrt{9U_i^2 - 12R_r(P + P_m)}}{6R_r} \quad (12)$$

Pochodna sprawności po mocy wydawanej będzie równa

$$\frac{d\eta}{dP} = \frac{P + P_{ino} + 3R_k I_r^2 + 6R_s I_r I_{Fe}}{M^2} - \frac{P(1 + 6R_k I_r I_r' + 6R_s I_r' I_{Fe})}{M^2} \quad (13)$$

gdzie:

I_r' - pochodna prądu wirnika po mocy P ,
 M – mianownik wyrażenia na sprawność.

Po przyrównaniu do zera i przekształceniach oraz redukcji wyrażen podobnych otrzymuje się równanie o postaci

$$P_{ino} = 3R_k I_r^2 \left(2P \frac{I_r'}{I_r} - 1 \right) + 6R_s I_r I_{Fe} \left(P \frac{I_r'}{I_r} - 1 \right) \quad (14)$$

Aby móc właściwie zinterpretować otrzymany wynik należy oszacować jaką wartość mogą przybierać wyrażenia w kolejnych nawiasach. W tym celu należy wyznaczyć pochodną prądu wirnika I_r po mocy P występującą w wyrażeniach umieszczonych w nawiasach

$$\frac{dI_r}{dP} = -\frac{-12R_r}{12R_r \sqrt{9U_i^2 - 12R_r(P + P_m)}} = \frac{1}{\sqrt{9U_i^2 - 12R_r(P + P_m)}} \quad (15)$$

Pierwsze analizowane wyrażenie w nawiasie w równaniu (14) można oznaczyć jako G_k

$$2P \frac{I_r'}{I_r} - 1 = G_k \quad (16)$$

Wstawiając wyrażenie na prąd wirnika i jego pochodną do (16) otrzymuje się

$$G_k = 2P \frac{1}{\sqrt{9U_i^2 - 12R_r(P + P_m)}} \times \quad (17)$$

$$\times \frac{6R_r}{3U_i - \sqrt{9U_i^2 - 12R_r(P + P_m)}} - 1$$

Po kolejnych przekształceniach dochodzi się do zależności

$$G_k = \frac{P}{P + P_m} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{12R_r(P + P_m)}{9U_i^2}}} + 1 \right\} - 1 \quad (18)$$

Wyrażenie pod pierwiastkiem bliskie jest jedności. Aby to wykazać można się posłużyć przykładem obliczonym dla badanego silnika klatkowego Sg 90 4S.

Dane do obliczeń:

$P = 950$ W (moc obciążenia dla maksimum sprawności przy $U = U_N = 380$ V)
 $P_m = 33$ W straty mechaniczne
 $U_i = 197$ V (napięcie indukowane wyliczone dla obciążenia $P = 950$ W)
 $R_r = 4,9$ Ω rezystancja uzwojenia wirnika sprowadzona na stronę stojana

Wyrażenie podpierwiastkowe będzie równe

$$1 - \frac{12 \times 4,9(950 + 33)}{9 \times 197^2} = 1 - 0,165 = 0,835$$

Odwrotność pierwiastka wyniesie

$$\frac{1}{\sqrt{0,835}} = 1,09$$

Z powyższego przykładu wynika, że analizowane wyrażenie bliskie jest jedności, a całość wyrażenia w nawiasie będzie w przybliżeniu równa dwa. Przy takim założeniu wyrażenie G_k przybierze postać

$$G_k \approx \frac{2P}{P + P_m} - 1 \approx \frac{P - P_m}{P + P_m} \quad (19)$$

Przeanalizowania wymaga również drugie wyrażenie H_k z zależności (14) o postaci

$$P \frac{I_r'}{I_r} - 1 = H_k \quad (20)$$

Po wstawieniu odpowiednich wyrażeń dostaje się

$$H = P \frac{1}{\sqrt{9U_i^2 - 12R_r(P + P_m)}} \times \quad (21)$$

$$\times \frac{6R_r}{3U_i - \sqrt{9U_i^2 - 12R_r(P + P_m)}} - 1$$

Po kilku przekształceniach dochodzi się do zależności

$$H_k = \frac{P}{2(P + P_m)} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{12R_r(P + P_m)}{9U_i^2}}} + 1 \right\} - 1 \quad (22)$$

Podobnie jak w przypadku zależności G_k , wartość wyrażenia w nawiasie będzie w przybliżeniu równa 2, wobec tego

$$H_k \approx \frac{2P}{2(P + P_m)} - 1 \approx \quad (23)$$

$$\approx \frac{P}{P + P_m} - 1 \approx -\frac{P_m}{P + P_m}$$

Po uwzględnieniu przekształconych wyrażeń G i H , równanie (15) można przedstawić w postaci

$$P_{ino} = 3R_k I_r^2 \frac{P - P_m}{P + P_m} - \quad (24)$$

$$+ 6R_s I_r I_{Fe} \frac{P_m}{P + P_m}$$

Ze względu na małą wartość prądu I_{Fe} oraz niewielką wartość wyrażenia H_k drugi człon równania może być pominięty i wówczas

$$P_{ino} \approx 3R_k I_r^2 \frac{P - P_m}{P + P_m} \quad (25)$$

Z wartości podanych w przykładzie jednoznacznie wynika, że ze względu na relatywnie dużą wartość mocy P i niewielką wartość strat mechanicznych P_m wyrażenie G_k praktycznie bliskie jest jedności. Wobec tego równanie przybierze bardzo prostą postać

$$P_{ino} \approx 3R_k I_r^2 \quad (26)$$

Ponieważ iloczyn po prawej stronie równania jest praktycznie równy stratom w uzwojeniach od prądu wirnika, równanie to można przedstawić jako

$$P_{ino} \approx 3(R_s + R_r) I_r^2 \quad (27)$$

Z wyprowadzonej zależności wynika, że maksimum sprawności dla silnika pracującego przy stałym napięciu zasilającym wystąpi przy takim obciążeniu, dla którego straty biegu jałowego będą w przybliżeniu równe stratom w uzwojeniach od prądu wirnika. Otrzymana zależność jest identyczna jak w pracy [4] mimo, iż znajdujące się tam wyprowadzenie zostało dokonane z zastosowaniem większych uproszczeń. Należy dodać, że identyczną zależność można wyprowadzić dla transformatora [6]. Świadczy to o tym, że obraz zjawisk związany z relacją strat dla maksymalnej sprawności jest dla obu maszyn bardzo podobny. Podobnie jak dla transformatora, można zdefiniować współczynnik względnego obciążenia dla którego wystąpi maksimum sprawności.

Zakładając, że moc na wale jest proporcjonalna do prądu wirnika

$$P \approx k_e I_r \quad (28)$$

oraz dla mocy znamionowej

$$P_N \approx k_e I_{rN}, \quad (29)$$

to współczynnik względnego obciążenia będzie można zdefiniować następująco

$$k_p = \frac{P}{P_N} \approx \frac{I_r}{I_{rN}} \quad (30)$$

Równanie na maksimum sprawności może być przedstawione jako

$$P_{ino} \approx 3R_k (k_p I_{rN})^2 \quad (31)$$

Wyliczona wartość względnego obciążenia

$$k_p \approx \sqrt{\frac{P_{ino}}{3R_k I_{rN}^2}} \approx \sqrt{\frac{P_{ino}}{P_{wN}}} \quad (32)$$

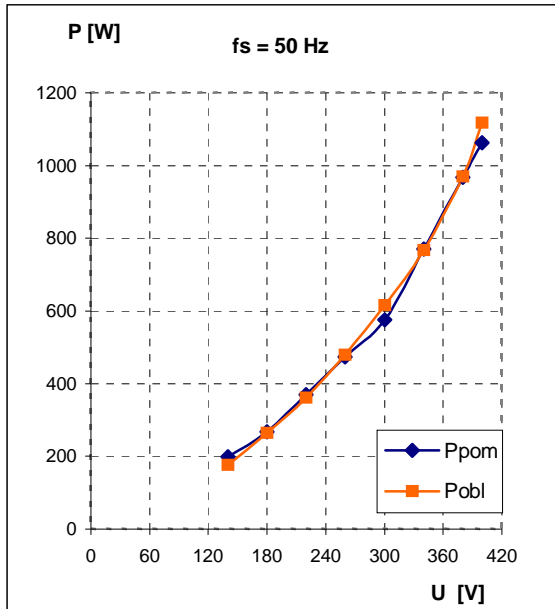
gdzie:

- P_{ino} - straty biegu jałowego przy zasilaniu napięciem znamionowym,
- P_{wN} - straty w uzwojeniach przy znamionowym prądzie wirnika.

Z powyższej zależności wynika wniosek, że na podstawie pomiaru strat biegu jałowego i obliczonych strat w uzwojeniach przy znamionowej wartości prądu wirnika można oszacować wartość względnego obciążenia przy którym wystąpi maksimum sprawności.

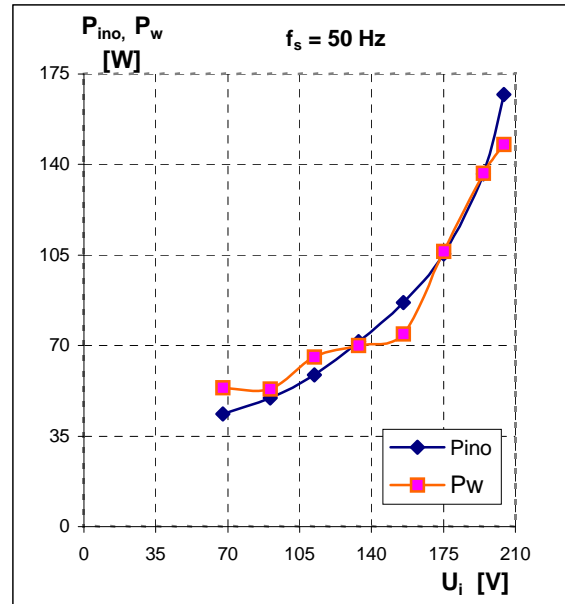
Wyprowadzona wcześniej dokładna zależność (14) stwarza możliwość relatywnie ścisłego wyznaczenia mocy obciążenia dla maksymalnej sprawności. Może ona znaleźć zastosowanie praktyczne, szczególnie w odniesieniu do silników średniej i dużej mocy dla których przeprowadzenie próby obciążenia połączonej z dokładnym wyznaczeniem przebiegu krzywej sprawności może być utrudnione. Sprawdzenie słuszności wzoru (14) pozwalającego na wyznaczenie mocy obciążenia silnika klatkowego dla maksymalnej sprawności przy zasilaniu napięciem o stałej wartości zostało dokonane przy przyjęciu tej samej wartości napięcia indukowanego. Na podstawie pomiarów przeprowadzonych dla kilku wybranych wartości napięcia zasilającego otrzymano określone wartości mocy obciążenia P_{pom} dla sprawności maksymalnej i dla nich obliczono wartości napięcia indukowanego. Następnie dla wyliczonych napięć indukowanych określono wartości strat biegu jałowego na podstawie sporządzonych charakterystyk biegu jałowego. Wyliczone wartości napięć indukowanych, jak również inne parametry wstawiono do równania (14) i rozwiązano je ze względu na moc obciążenia P . Pomierzone P_{pom} i wyliczone P_{obl} wartości mocy dla maksimum sprawności przedstawiono na rys. 1 i rys. 2. Otrzymane wykresy pokazują dobrą zgodność wyników

otrzymanych na drodze pomiarowej i analitycznej, co wskazuje na poprawność wyprowadzonej zależności i możliwości jej zastosowania do analitycznego wyznaczenia położenia maksimum sprawności.

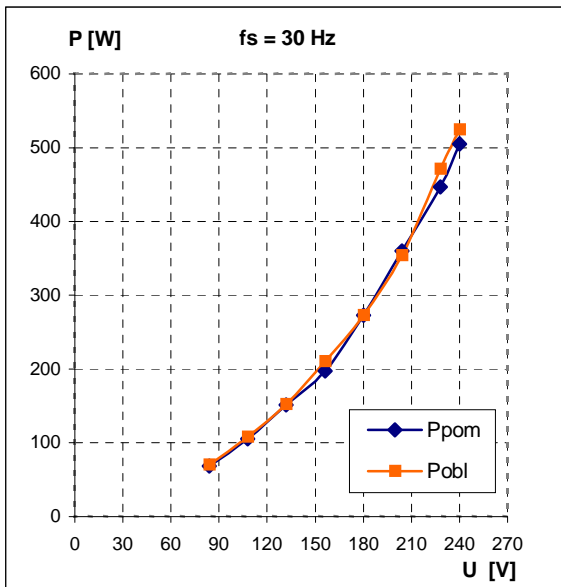


Rys.1. Wartości mocy odpowiadające maksymalnej sprawności dla różnych napięć zasilania otrzymane na podstawie obliczeń P_{obl} i pomiarów P_{pom} dla $f_s = 50$ Hz.

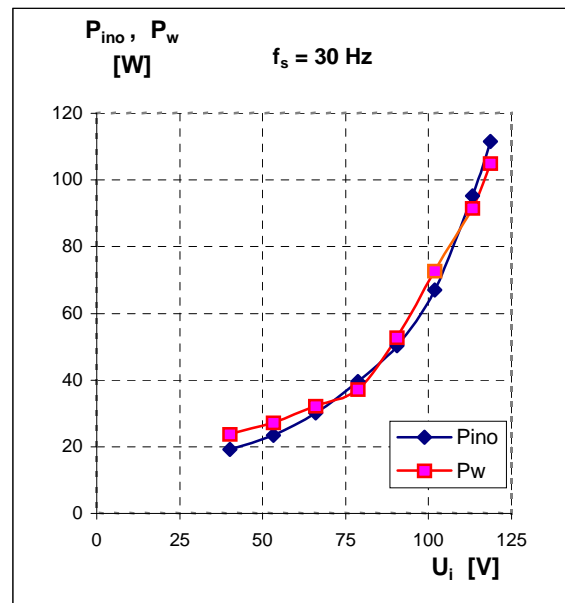
Kolejnej weryfikacji należało poddać wyprowadzoną zależność mówiącą o równości strat biegu jałowego i strat w uzwojeniach od prądu wirnika dla maksymalnej sprawności. Posłużono się tutaj wynikami z badań laboratoryjnych.



Rys.3. Porównanie strat biegu jałowego P_{ino} i strat w uzwojeniach P_w dla obciążeń, dla których występuje maksimum sprawności dla częstotliwości $f_s = 50$ Hz.



Rys.2. Wartości mocy odpowiadające maksymalnej sprawności dla różnych napięć zasilania otrzymane na podstawie obliczeń P_{obl} i pomiarów P_{pom} dla $f_s = 30$ Hz.



Rys.4. Porównanie strat biegu jałowego P_{ino} i strat w uzwojeniach P_w dla obciążeń, dla których występuje maksimum sprawności dla częstotliwości $f_s = 30$ Hz.

Dla każdej wartości mocy obciążenia odpowiadającej maksimum sprawności, wyliczono wartość napięcia indukowanego i odpowiednie straty biegu jałowego P_{ino} . Następnie z prądu stojana dla rozpatrywanego punktu pracy wydzielono analitycznie wartość sprowadzonego prądu wirnika i wyliczono straty w uzwojeniach P_w . Wykresy przedstawione na rys.3 i rys.4 potwierdzają słuszność wyprowadzonej zależności. Rozbieżności pomiędzy stratami biegu jałowego i stratami w uzwojeniach są raczej niewielkie. Należy podkreślić, że dokładność wyznaczenia strat w uzwojeniach w bardzo istotny sposób zależy od przyjętych wartości rezystancji uzwojeń stojana i wirnika. Do weryfikacji pomiarowej użyto silnika klatkowego małej mocy o następujących parametrach:

Typ Sg 90 S4

$P_N = 1,1$ kW

$U_N = 220/380$ V

$I_N = 4,9/2,8$ A

$n_N = 1415$ obr./min.

$\cos\phi = 0,8$

praca S1

4. Wnioski

Przeprowadzone rozważania teoretyczne poparte wynikami badań przedstawionymi w formie wykresów prowadzą do następujących wniosków:

- sprawność maksymalna w indukcyjnym silniku klatkowym zasilanym napięciem o stałej wartości występuje przy takim obciążeniu, dla którego straty biegu jałowego będą praktycznie równe stratom w uzwojeniach od prądu wirnika,
- interesującym jest, że powyższy warunek przedstawiony również w [4] daje się uzyskać poprzez znacznie uproszczone rozważania,
- wskazanym byłoby, aby wyprowadzony warunek mówiący o przybliżonej równości strat biegu jałowego i strat w uzwojeniach od prądu wirnika został wprowadzony do treści podręcznikowych jako element podstawowej wiedzy o maszynach indukcyjnych,
- wyprowadzona zależność (14) pozwala na względnie dokładne wyznaczenie wartości mocy silnika indukcyjnego dla której wystąpi maksimum sprawności i może wykazać swą przydatność dla

silników średniej i dużej mocy, dla których przeprowadzenie próby obciążenia może być trudne bądź niemożliwe,

- duży wpływ na dokładność wyznaczenia mocy odpowiadającej sprawności maksymalnej będą miały wartości rezystancji uzwojeń stojana i wirnika podstawiane do zależności (14), które powinny odpowiadać rezystancjom występującym podczas pracy maszyny.

Literatura

- [1] Nürnberg W.: *Die Asynchronmaschine*. Springer-Verlag Berlin 1976
- [2] Dubicki B.: *Maszyny elektryczne. Tom III. Silniki indukcyjne*. WNT Warszawa 1964
- [3] Auinger H.: *Consideration About the Determination and Designation of the Efficiency of Electric Machines*. Energy Efficiency Improvements in Electric Motors and Drives Springer 1997, pp.284 – 304.
- [4] Banach H.: *Wyznaczanie charakterystyki sterowania $U=f(P)$ dla pracy indukcyjnego silnika klatkowego z minimalnymi stratami w szerokim zakresie obciążeń*. XXXV Międzynarodowe Sympozjum Maszyn Elektrycznych SME'99 Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej – Elektryka z.111/1999 str.337-342.
- [5] Banach H.: *Wyznaczanie optymalnych parametrów zasilania dla minimalizacji strat mocy w silnikach indukcyjnych*. Zeszyty Problemowe – Maszyny Elektryczne Nr 84/2009, wyd. BOBRME, Komel, str.107-112
- [6] Banach H.: *Określanie położenia maksimum sprawności w transformatorze*. VIII Konferencja Naukowo – Techniczna „Zastosowania komputerów w elektrotechnice”, Kiekrz - Poznań, 7 – 9.04.2003, str. 549 – 551.

Autor

Dr inż. Henryk Banach
Katedra Napędów i Maszyn Elektrycznych
Wydział Elektrotechniki i Informatyki
Politechnika Lubelska
ul.Nadbystrzycka 38 A, 20-618 Lublin
tel.(0-81) 538-46-06
e-mail: h.banach@pollub.pl

Recenzent

Prof. dr hab. inż. Jerzy Hickiewicz