

**Jerzy Podhajecki, Sławomir Szymaniec**  
**Politechnika Opolska**

## WYZNACZANIE DRGAŃ WŁASNYCH STOJANA SILNIKA INDUKCYJNEGO

### DETERMINATION NATURAL FREQUENCIES OF STATOR INDUCTION MACHINE

**Abstract:** In this paper three different methods of determination natural frequencies of stator of induction machine SF 80-4A is presented and results are compared. The first one is analytical, the second one uses Finite Element Program. The third is experimental method make use Hammer test and magnetic excitation technique. Usage converter to supply the machine brings as a consequence wide range of exciting magnetic forces and resonance may occur. Prediction natural frequencies may help to avoid resonance and associated phenomena such as vibrations and noise.

#### 1. Wstęp

W artykule przedstawiono analityczne, numeryczne i eksperymentalne sposoby wyznaczenia drgań własnych stojana silnika indukcyjnego klatkowego małej mocy, na przykładzie silnika typu SF 80-4A (0,55 kW) firmy Besel w Brzegu.

Silniki indukcyjne wraz z zastosowaniem przekształtników energoelektronicznych (PWM) do ich zasilania stały się popularne w zastosowaniach wymagających zmiennej prędkości obrotowej z powodu dużej sprawności i niezawodności w porównaniu do konwencjonalnych silników prądu stałego. Praca w szerokim zakresie prędkości obrotowych skutkuje zmiennym poziomem drgań i hałasu, może on być duży, szczególnie wtedy jeśli częstotliwości harmonicznych sił wprowadzonych przez przekształtnik PWM są bliskie częstotliwości drgań własnych struktury mechanicznej silnika. W celu redukcji drgań i hałasu mogą być rozpatrywane dwa podejścia: pierwsze sprowadza się do eliminacji niepożądanych harmonicznych z zasilania poprzez zastosowanie tzw. programowego lub losowego sterowania (PWM), drugie polega na odpowiednim projektowaniu budowy mechanicznej silnika w taki sposób, aby „odstroić” silnik od rezonansu.

W celu ograniczenia zagrożeń wibroakustycznych konieczne jest wyznaczenie częstotliwości drgań własnych poszczególnych części maszyny, aby było możliwe uniknięcie zjawiska rezonansu wskutek pobudzenia ich przez częstotliwość pracy zasilacza energoelektronicznego.

Znając drgania własne stojana maszyny można w nowoczesnych przekształtnikach określić pasma zabronione częstotliwości unikając w ten sposób niepożądanego wzrostu drgań i emisji hałasu.

#### 2. Drgania własne w silniku indukcyjnym

Procesy dynamiczne zachodzące w silniku pod wpływem sił elektromagnetycznych mają charakter drgań wymuszonych. W związku z tym w analizie drgań silnika należy zwrócić szczególną uwagę na określenie częstotliwości drgań własnych silnika zarówno stojana jak i wirnika.

Pobudzenie drgań własnych stojana wynika z działania sił elektromagnetycznych w szczelinie powietrznej. W zależności od konstrukcji silnika mogą dominować drgania o kształcie radialnym o różnej liczbie węzłów na obudowie silnika.

Liczba par węzłów jest nazywana rzędem drgań  $r$ . Szczególnym przypadkiem jest liczba par węzłów wynosząca ( $r = 0$ ), mówi się wówczas o drganiach rzędu zerowego. Rząd drgań wyznaczony jest rzędem sił wywołujących te drgania. Jeżeli  $P_r(\alpha, t)$  oznacza siłę promieniową równą 
$$P_r = \sum_r A_r \cos(r\alpha - \Omega_r t)$$

to siła ta wywołuje drgania stojana o liczbie węzłów  $2r$  z częstotliwością kątową  $\Omega_r$ .

Gdzie:  $A_r$  - amplituda składowej siły o rzędzie  $r$ , natomiast  $\Omega_r$  - częstotliwość kątowa składowej siły rzędu  $r$ .

Składowe siły wywołują drgania silnika, a także odkształcenia powierzchni stojana. Odkształcenia rdzenia silnika stojana  $D$  są w

przybliżeniu odwrotne proporcjonalne do czwartej potęgi liczby określającej rząd składowej siły przy tej samej amplitudzie siły:

$$D \cong \frac{1}{r^4} [1]. \text{ Z praktycznego punktu widzenia}$$

największe znaczenie mają składowe sił niskiego rzędu  $r = 1, 2, 3, 4, 5$  [1].

### 3. Wyznaczenie drgań własnych stojana dla modelu dwuwymiarowego

Przeprowadzono obliczenia analityczne i numeryczne drgań własnych stojana modelu dwuwymiarowego stojana dla różnych stopni uszczegółowienia modelu. W modelu numerycznym stworzonym w programie Ansys założono, że rdzeń składa się z stali elektrotechnicznej, a obudowa jest aluminiowa. Uzwojenia zostały uwzględnione przez zwiększenie gęstości rdzenia [2]. Założono warunki brzegowe na łapach obudowy silnika przyjmując, że w miejscach zamocowania dla obu kierunkach przemieszczenie ma wartość zero.

Analityczne wzory Jordana określają częstotliwości własne przy pewnych upraszczających założeniach. Częstotliwość własna drgań promieniowych rzędu  $r = 0$  można wyznaczyć za pomocą wzoru:

$$F_0 = \frac{1}{2\pi \cdot N} \sqrt{\frac{E_{sj}}{\rho_{sj} \cdot \Delta}} \quad (1)$$

gdzie:

$F_0$  - częstotliwość drgań stycznych obwodowych rzędu  $r = 0$ ,  $Hz$

$E_{sj} = 2.1 \cdot 10^{11} Pa$  - moduł Younga materiału rdzenia,

$\rho_{sj} = 7.26 \cdot 10^3 kg \cdot m^{-3}$  - gęstość materiału rdzenia,

$N = 54.7 \cdot 10^{-3} m$  - średni promień jarzma stojana,

$\Delta$  - współczynnik określający wpływ uzwojeń równy:

$$\Delta = \frac{m_{sj} + m_{sz} + m_u}{m_{sj}} \quad (2)$$

gdzie:

$m_{sj} = 1.59 kg$  - masa jarzma stojana,

$m_{sz} = 0.81 kg$  - masa zębów stojana,

$m_u = 0.36 kg$  - masa części żłobkowej uzwojenia.

Natomiast dla częstotliwości własnych drgań promieniowych  $F_{br}$  dla rzędu  $r \geq 2$ :

$$F_{br} = F_0 \frac{i \cdot r(r^2 - 1)}{\sqrt{r^2 + 1}} \quad (3)$$

w którym:

$$i = \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{h_{sj}}{N} \quad (4)$$

gdzie:

$h_{sj} = 10.6 \cdot 10^{-3} m$  - wysokość jarzma stojana.

Zakładając, że w rzeczywistości stojan przez łapy związany jest ze stałym punktem w przestrzeni i rezonans drgań promieniowych rzędu  $r = 1$  może mieć miejsce. Częstotliwość własna dla tego rzędu wyraża się zależnością:

$$F_{br} = F_0 \cdot i \cdot C \quad (5)$$

gdzie:

$C$  - jest współczynnikiem zależnym od kąta  $\beta$  rozstawienia łap silnika.

W literaturze podaje się wzory bardziej precyzyjne uwzględniające wpływ uzwojenia na te częstotliwości [1].

$$F_{br} = F_0 \frac{i \cdot r(r^2 - 1)}{\sqrt{r^2 + 1}} \cdot \varphi_n \quad (6)$$

$$\varphi_n = \left\{ 1 + i^2 \frac{(r^2 - 1)[r^2(4 + \frac{\Delta_m}{\Delta})]}{r^2 + 1} \right\}^{-\frac{1}{2}} \quad (7)$$

$$\Delta_m = 1 + \frac{6Z_1}{\pi \cdot N} \left( \frac{h_{zs}}{h_{sj}} \right)^3 b_z \cdot \frac{m_{sz} + m_u}{m_{sz}} \quad (8)$$

$$\Theta = \frac{1}{3} + \frac{h_{sj}}{2h_{zs}} + \left( \frac{h_{sj}}{2h_{zs}} \right)^2 \quad (9)$$

gdzie:

$h_{sj} = 10.6 \cdot 10^{-3} m$  - wysokość jarzma stojana,

$h_{zs} = 1.29 \cdot 10^{-2} m$  - wysokość zęba,

$Z_1 = 24$  - liczba żłobków stojana,

$b_z = 6 \cdot 10^{-3} m$  - zastępcza szerokość zęba.

Przeprowadzając analogiczne rozważania można wyznaczyć drgania obudowy. W celu obliczenia drgań własnych całego stojana można traktować rdzeń stojana i obudowę jako drgające oddzielnie swobodne cienkie pierścienie. Układ rdzeń stojana-korpus aproksymuje się dwoma współśrodkowymi

pierścieniami sztywno ze sobą związanymi. Wzór na częstotliwość takiego układu jest następujący:

$$f_{skr} = \sqrt{f_{sr}^2 \frac{Ng_s}{Ng_s + R_k g_k} + f_{kr}^2 \frac{R_k g_k}{Ng_s + R_k g_k}} \quad (10)$$

$f_{skr}$  - częstotliwość drgań układu rdzeń-stojana

– korpus (obudowa)  $r$ -tego rzędu  $Hz$ ,

$f_{sr}$  - częstotliwość drgań własnych obudowy stojana  $r$ -tego rzędu  $Hz$ ,

$f_{kr}$  - częstotliwość drgań własnych rdzenia stojana  $r$ -tego rzędu  $Hz$ ,

$N = 54.7 \cdot 10^{-3} m$  - średni promień jarzma stojana,

$R_k = 61.75 \cdot 10^{-3} m$  - średni promień jarzma korpusu,

$g_s = 6.97 kg \cdot m^{-1}$ ,  $g_k = 1.98 kg \cdot m^{-1}$  - gęstość stojana i korpusu na jednostkę objętości [1].

Tabela 1. Drgania własne: rdzeń

	Częstotliwości drgań własnych (Hz)			
	r=1	r=2	r=3	r=4
MES	-	1825	4834	8546
Analityczna	-	1912	5415	10388

Tabela 2. Drgania własne: rdzeń + uzwojenia

	Częstotliwości drgań własnych (Hz)			
	r=1	r=2	r=3	r=4
MES	-	1527	4043	7148
Analityczna	-	1704	4484	7838

Tabela 3. Drgania własne: obudowa + warunki brzegowe

	Częstotliwości drgań własnych (Hz)			
	r=1	r=2	r=3	r=4
MES	330	888	1754	5405
Analityczna	283	798	1522	4896

Tabela 4. Drgania własne: rdzeń + obudowa + uzwojenia + warunki brzegowe

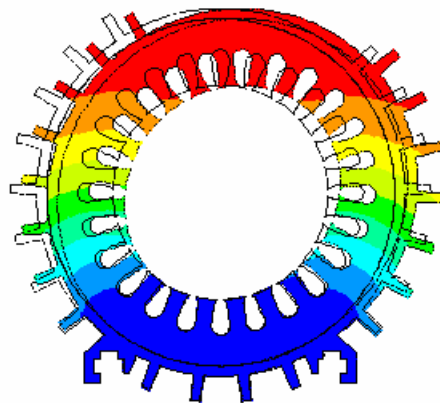
	Częstotliwości drgań własnych (Hz)			
	r=1	r=2	r=3	r=4
MES	697	1727	5084	8961
Analityczna	580	1556	4407	8454

W celu określenia wpływu poszczególnych części konstrukcyjnych wykonano obliczenia częstotliwości drgań własnych  $n$  dla różnych stopni uszczegółowienia modelu stojana. Wyniki przedstawiono w tabelach nr 1- 4.

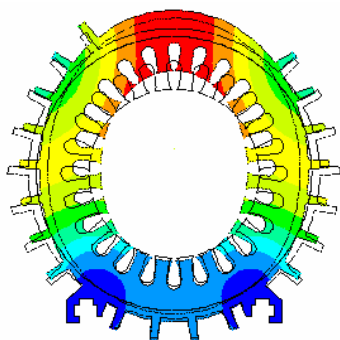
Wyniki analityczne i uzyskane MES dla modelu dwuwymiarowego różnią się przede wszystkim z braku możliwości uwzględnienia szczegółów konstrukcyjnych w metodach analitycznych. Metody analityczne zakładają założenia upraszczające m.in., że obudowa maszyny jest symetryczna i równomierna oraz nie uwzględniają łap. Ma to wpływ na różnice otrzymanych rezultatach.

Rząd drgań o numerze  $r = 1$  pojawia się wraz z zadaniem warunków brzegowych na łapach silnika, jego kształt to kołysanie stojana w łapach (rys.1).

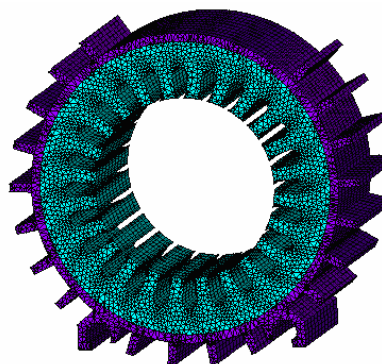
Na rys 2 i 3 przedstawiono odpowiednio kształty deformacji stojana o numerach rzędów:  $r = 2$  i  $r = 4$  dla zadanych warunkach brzegowych na łapach silnika. Uwzględnienie uzwojeń powoduje obniżenie częstotliwości własnych, należy jednak pamiętać, że w modelu numerycznym dwuwymiarowym nie zostało uwzględnione usztywniające działanie czoł uzwojeń oraz tarcz łożyskowych, które powodują zwiększenie częstotliwości drgań własnych. Nieuwzględnienie tarcz łożyskowych może również mieć istotne znaczenie na wartości częstotliwości.



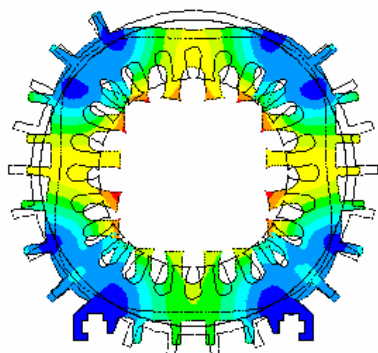
Rys. 1. Drgania własne: rdzeń i obudowa stojana rzędu  $r=1$  ( $f=697 Hz$ )



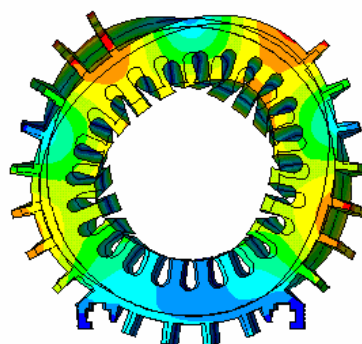
Rys. 2. Odkształcenia radialne rdzenia stojana rzędu  $r=2$  ( $f=1726$  Hz)



Rys. 4. Trójwymiarowy model numeryczny stojana



Rys. 3. Odkształcenia radialne rdzenia i obudowy stojana rzędu  $r=4$  ( $f=4253$  Hz)



Rys. 5. Drgania własne: radialne ( $r=3$ ) i zginające ( $m=1$ ) ( $f=5793$  Hz)

#### 4. Wyznaczenie drgań własnych stojana dla modelu trójwymiarowego

Wykonano również obliczenia numeryczne dla modelu trójwymiarowego. W tym przypadku oprócz deformacji radialnej tak jak w modelu dwuwymiarowym dodatkowo występują tutaj drgania własne o kształtach zginających oraz mieszanych, będących ich kombinacją [3]. Rząd drgań zginających zależy od kształtu deformacji rdzenia stojana na powierzchni bocznej.

Interpretacja wyników obliczeń jest nieco trudniejsza, pojawiają się dodatkowe drgania własne wynikające z specyfiki konstrukcji (np. żebra) oraz niesymetrii występujących w silniku. Najbardziej istotne z punktu widzenia zagrożeń wibroakustycznych są kształty deformacji radialnej, wynika to z tego że siły magnetyczne będące przyczyną pobudzenia drgań mają rozkład przestrzenny najbardziej zbliżony do radialnego [1-5].

#### 5. Doświadczalne wyznaczenie drgań własnych stojana

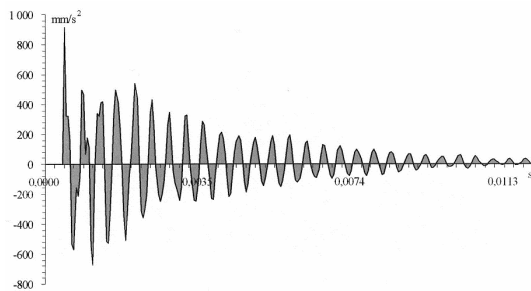
W literaturze poświęconej pomiarom drgań własnych i rezonansowych silnika przedstawiono szereg metod. Różnice między poszczególnymi polegają na sposobie pobudzenia do drgań silnika kompletnego lub jego poszczególnych części. Metody można pogrupować w zależności od sposobu wzbudzenia drgań na:

- metodę przy wzbudzeniu udarem mechanicznym,
- metodę przy wzbudzaniu elektrodynamicznym.

W wykonanych badaniach eksperymentalnych pierwszą metodą pobudzenia drgań własnych była metoda przy wzbudzaniu udarem mechanicznym – uderzenie specjalnym młotkiem w obudowę stojana [1]. Drugim sposobem pobudzenia drgań własnych było pobudzenie silnika udarem prądowym o określonych parametrach.

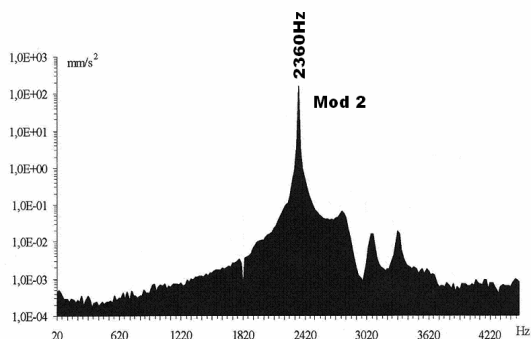
Udar prądowy może być podawany na jedno uzwojenie fazowe lub na dwa albo trzy połączone szeregowo, równoległe lub

szeregowo-równoległe. Źródłem uderów prądowych był specjalny generator uderowy. Sposób połączenia uzwojeń stojana wpływa wyraźnie na poziom ujawniających się dominant. Ustalono, że najkorzystniejszym jest połączenie równoległe, poziom dominant jest wówczas największy i dla takiego połączenie uzwojeń fazowych przeprowadzono pomiary [1].



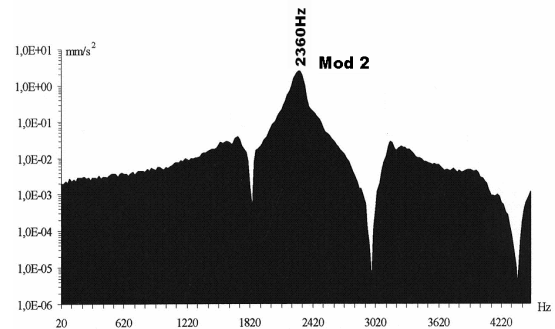
Rys. 6. Przebieg czasowy przyspieszenia drgań obudowy silnika uzyskany w wyniku uderzenia młotkiem w korpus

Na rys.6 przedstawiono odpowiednio przebieg czasowy przyspieszenia drgań obudowy silnika uzyskany w wyniku wzbudzenia udarem mechanicznym, natomiast rys. 7 przedstawia widmo sygnału drganiowego w zakresie częstotliwości do 5000Hz. Z pomiarów wynika, że częstotliwości własne stojana bez uzwojeń w zakresie do 5000Hz są następujące: 2360 Hz (2119) (2112). W nawiasach podano wynik analizy numerycznej przeprowadzone dla założenia braku zadanych warunków brzegowych dla modelu dwu i trójwymiarowego. Badania eksperymentalne wykonano dla stojana zawieszono na sprężynach.



Rys.7. Widmo przyspieszenia drgań obudowy stojana uzyskane w wyniku pobudzenia mechanicznego stojan bez uzwojeń:  $f=2360$  Hz

Porównując rezultaty pomiarów przyspieszenia drgań na rys.7 (stojan bez uzwojeń) i 8 (stojan uzwojony) można dojść do wniosku, że uzwojenia nie mają dużego wpływu na wartości drgań własnych. Otrzymane rezultaty sugerują, że dla najniższych częstotliwości wpływ masy uzwojenia i usztywniającego działania czoł uzwojeń wzajemnie się kompensuje.



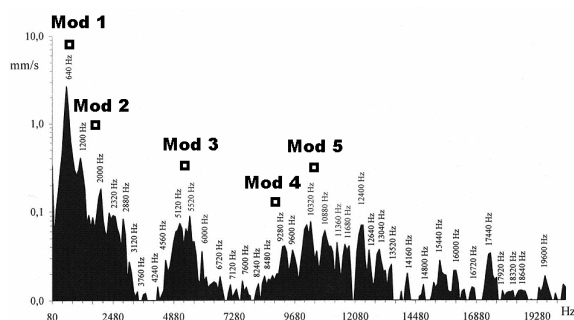
Rys.8. Widmo przyspieszenia drgań uzyskane w wyniku pobudzenia mechanicznego uzwojonego stojana:  $f=2300$  Hz

Zostały również wykonane pomiary częstotliwości drgań własnych przy wymuszeniu elektromagnetycznym [1]. W tym przypadku pomiar wykonano dla pełnego silnika zamontowanego na sprężystym podłożu. Metoda pobudzenia elektromagnetycznego ze względu na sposób wymuszenia, jest zbliżona do rzeczywistych warunków działania sił magnetycznych podczas pracy silnika. Pomiary przeprowadzone na silniku zamocowanym do podłoża (rys.8). Drgania mierzono na obudowie stojana. Zidentyfikowano następujące częstotliwości drgań: 640 (697), 1200, 2000 (1726), 2320, 2880, 5120, (5084), 5520, 9280 (8960), 9600, 10320, 10880, (10837).

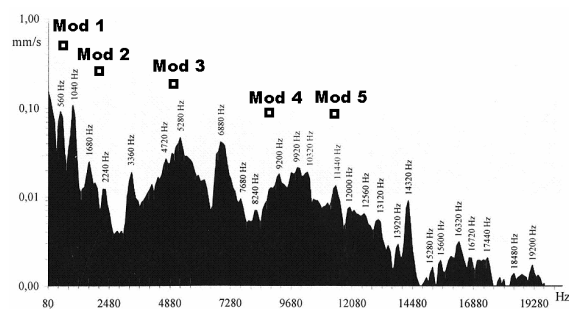
W nawiasach podano wyniki numeryczne radialnych drgań własnych stojana dla kolejnych rzędów drgań:  $r = 1, 2, 3, 4, 5$ , dla modelu dwuwymiarowego.

Dla modelu trójwymiarowego odpowiednio otrzymano rezultaty obliczeń: 640 (827), 1200 (1056), 2000 (1850), 2320 (2152), 2880, 5120 (5039), 9280 (9350). Obliczenia wykonano przy założeniu warunków brzegowych na łapach silnika. Różnice w wynikach mogą być spowodowane wpływem wirnika i tarcz łożyskowych oraz faktem przyjęcia uproszczonego modelu łap. Na rysunkach poniżej przedstawiono widma przyspieszenia drgań uzyskane z pomiarów. Na rysunkach umieszczono również wartości częstotliwości

drgań własnych o kształcie deformacji radialnej dla kolejnych rzędów wyznaczone numerycznie.



Rys. 9. Widmo przyspieszenia drgań obudowy stojana w zakresie do 20000 Hz, uzyskane przy pobudzeniu elektromagnetycznym



Rys. 10. Widmo przyspieszenia drgań obudowy stojana w zakresie do 20000 Hz, uzyskane podczas pracy silnika na biegu jałowym [6]

Pomiary przeprowadzono podczas pracy silnika na biegu jałowym. W trakcie pomiarów silnik był zamocowany do podłoża. Zarejestrowano przebiegi czasowe i częstotliwościowe (rys.10) zewnętrznego punktu obudowy stojana. Na rysunku umieszczono wartości częstotliwości drgań własnych o deformacji radialnej.

## 6. Wnioski

W artykule omówione zostały sposoby wyznaczania częstotliwości drgań własnych stojana silników indukcyjnych małej mocy. Metoda Elementów Skończonych (MES) może być z powodzeniem stosowana do wyznaczania częstotliwości drgań własnych silników indukcyjnych. W powiązaniu z metodami analitycznymi i eksperymentalnymi może stanowić pomocne narzędzie do diagnostyki wibroakustycznej maszyn elektrycznych.

## Literatura

- [1] Szymaniec S.: *Badania wibroakustyczne silników indukcyjnych trójfazowych*. Praca doktorska, Politechnika Opolska, 1984.
- [2] Gieras J.F., Wang Ch., Lai J.C.: *Noise of Polyphase Electric Motors*, Taylor&Francis Group, LLC, 2006.
- [3] Kasperski M.: *Drgania własne i wymuszone silnika reluktancyjnego przełączalnego*. Praca doktorska, Politechnika Łódzka, 1990.
- [4] Podhajecki J., Korkosz M.: *Analiza drgań własnych stojana silnika BLDC*. Seminarium Maszyn Elektrycznych, Krasiczyn, 2009.
- [5] Lecointe J.-P., Romary R., Brudny F.-F., Czaplą T.: *Five methods of stator natural frequency determination: case of induction and switched reluctance machines*. Mechanical Systems and Signal Processing 18 (2004) 1133-1159.
- [6] Pasiński J., Grzebiński W.: *Metodyka wyznaczania częstotliwości drgań własnych maszyn elektrycznych*, Praca magisterska, Politechnika Opolska, 2003.

## Autorzy

dr hab. inż. Sławomir Szymaniec, prof. P.O.  
mgr inż. Jerzy Podhajecki  
Politechnika Opolska, Wydział Elektrotechniki,  
Automatyki i Informatyki, Instytut Układów  
Elektromechanicznych i Elektroniki Przemysłowej  
ul. Luboszycka 7, 45-036 Opole  
e-mail: [s.szymaniec@po.opole.pl](mailto:s.szymaniec@po.opole.pl)

## Recenzent

Prof. dr hab. inż. Bronisław Drak