

Wojciech Burlikowski  
Politechnika Śląska, Gliwice

## ANALIZA PODSTAWOWYCH WŁASNOŚCI ZMODYFIKOWANEJ TRANSFORMACJI PARKA DLA PRĄDOWYCH I STRUMIENIOWYCH ZMIENNYCH STANU

### ANALYSIS OF BASIC PROPERTIES OF MODIFIED PARK TRANSFORMATION FOR CURRENT AND FLUX STATE VARIABLES

**Abstract:** In the paper a modified Park transformation from phase reference frame  $ABC$  to  $dq$  reference frame for wye connected stator winding without neutral wire (Fig.1,2) is presented. A physical two-phase interpretation of obtained voltage equation (Eq.1) is proposed (Fig.3). Using classical transformation matrix  $[T]$  (Eq.2) and constraint matrix  $[C]$  (Eq.3) all variables present in (Eq.1) are transformed to  $dq$  reference frame. In contradiction to classical transformation matrix which  $[T]$  is the same for all variables, in proposed modified transformation its matrices for transformation of currents  $[T_I]$  and fluxes/voltages  $[T_{e\psi}]$  (Fig.4) are different. However they are strongly interconnected which is presented in (Fig.5). This ensures preservation of the most important features of classical transformation. The form of the voltage equation (Eq.18) is the same as in the case of classical transformation [5,8]. The inductance matrix in the  $dq$  reference frame in case of an idealised reluctance motor (Eq.19) is diagonal (Eq.25) [5]. The invariance of power is preserved which is evident in the form of equations (Eq.26), (Eq.27) and (Eq.31). All these features prove mathematical correctness of the proposed transformation.

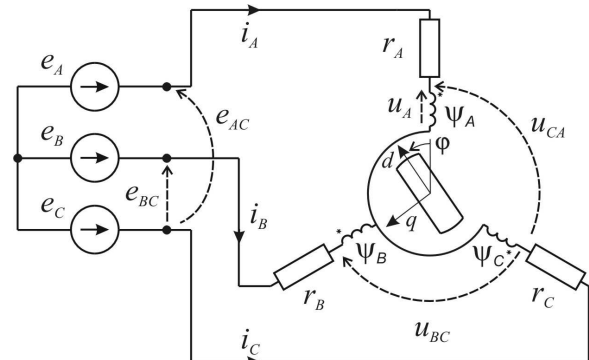
#### 1. Wstęp

W zdecydowanej większości prac dotyczących modelowania matematycznego maszyn elektrycznych wykorzystywany jest schemat zakładający niezależne zasilanie każdego uzwojenia fazowego, odpowiadający połączeniu punktów gwiazdowych źródła zasilania i uzwojenia stojana [8,9]. Również transformacje z układu zmiennych fazowych do układu dwuosiowego w formie tradycyjnej są definiowane dla tak zbudowanego schematu połączeń. Dzieje się tak mimo iż w zastosowaniach praktycznych połączenie takie jest wykorzystywane niezmiernie rzadko. W pracy przedstawiono metodykę pozwalającą na sformułowanie transformacji dwuosiowej dla maszyny z uzwojeniem stojana połączonym w gwiazdę bez przewodu zerowego już w trakcie tworzenia modelu matematycznego.

#### 2. Równanie stanu elektrycznego

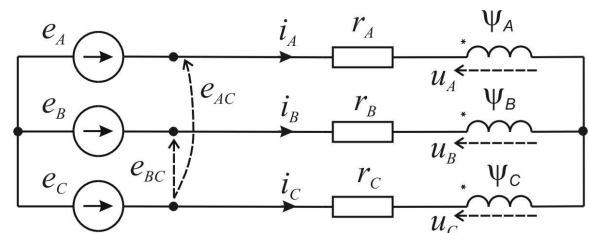
Modele matematyczne przedstawione we wcześniejszych pracach autora umożliwiały przejrzystą interpretację równań więzów prądowych i strumieniowych w modelu matematycznym silnika [2,3]. Równania różniczkowe otrzymane na ich podstawie zawierały jednak niesymetryczne macierze rezystancji i indukcyjności co uniemożliwiało

ich skuteczną transformację do układu dwuosiowego. W celu rozwiązania tego problemu zaproponowano odmienną metodę zapisu równań [4]. Dotyczy on schematu przedstawionego na Rys.1.



Rys.1. Schemat silnika reluktancyjnego

Schemat elektryczny obwodów silnika przedstawiono na Rys.2.



Rys.2. Schemat elektryczny silnika

Otrzymany obwód można opisać stosując metodę prądów oczkowych którymi są  $i_A, i_B$  [1]:

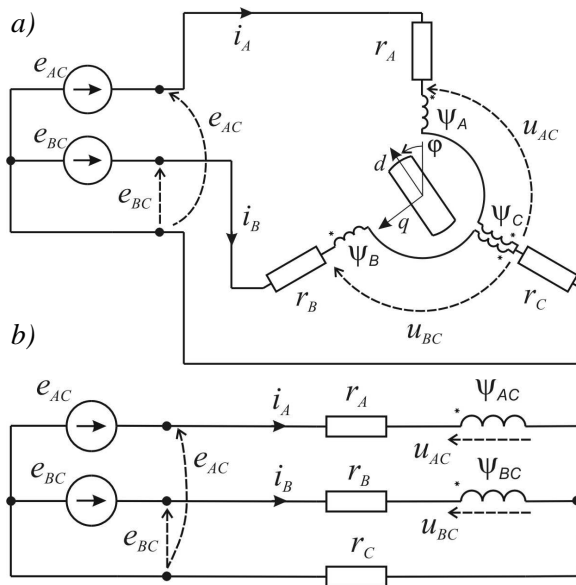
$$\begin{bmatrix} e_{AC} \\ e_{BC} \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_{AC} \\ \psi_{BC} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_A + r_C & r_C \\ r_C & r_B + r_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \end{bmatrix} \quad (1)$$

gdzie:  $\psi_{AC} = \psi_A - \psi_C$ ,  $\psi_{BC} = \psi_B - \psi_C$  (Rys.3).

Różnicę w stosunku do modelu tradycyjnego z galwanicznie izolowanymi uzwojeniami fazowymi [8] (cewkami elementarnymi [9]) stanowi fakt iż w jednym równaniu pojawiają się równocześnie zmienne międzyfazowe (napięcia, strumienie) i fazowe (prądy). Znajdźcie to swoje odbicie w różnej postaci transformacji zmiennych do układu dwuosowego dla strumieni/napięć i prądów.

### 3. Interpretacja fizyczna

Dla równania (1) można zaproponować interpretację fizyczną, przedstawioną na Rys.3. Wyściowa maszyna trójfazowa z uzwojeniem stojana połączonym w gwiazdę bez przewodu zerowego (Rys.1) może być wówczas traktowana jako maszyna dwufazowa, której fazy są zasilane napięciami międzyfazowymi.



Rys.3. Dwufazowy schemat elektryczny silnika (a) i jego obwód zastępczy (b)

Uzwojenia fazowe w tak sformułowanym modelu są ze sobą galwanicznie sprzężone przez rezystancję  $r_C$  zaś w skład obwodu wchodzi umyślone, idealnie sprzężone magnetycznie cewki, których strumienie sprzężone są równe  $\psi_C$  i przez które płyną prądy  $i_A, i_B$ . Odpowiadają one cewce fazy C

w modelu wyjściowym i posiadają identyczną z nią liczbę zwojów i położenie (Rys.1).

### 4. Transformacja zmiennych

Klasyczna, ortogonalna transformacja Parka ma postać [5,8,9]:

$$\begin{bmatrix} W_d \\ W_q \\ W_0 \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} W_A \\ W_B \\ W_C \end{bmatrix} \quad (2)$$

gdzie: macierz transformacji  $[T]$  (Rys.1, 2),

$$[T] = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos(p\varphi) & \cos\left(p\varphi - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(p\varphi + \frac{2\pi}{3}\right) \\ -\sin(p\varphi) & -\sin\left(p\varphi - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(p\varphi + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$p$  – liczba par biegunów,  $W_A, W_B, W_C$  – zmienne fazowe,  $W_d, W_q, W_0$  – zmienne w układzie  $dq0$ .

Zastosowanie transformacji (2) dla prądów przy uwzględnieniu iż (Rys.1):

$$\begin{bmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} = [C] \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} \quad (3)$$

gdzie  $[C]$  stanowi macierz więzów dla tego przypadku [9], prowadzi do następującej relacji między prądami  $i_A, i_B$  a  $i_d, i_q$  [4]:

$$\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} = \sqrt{2} \begin{bmatrix} \sin\left(p\varphi + \frac{\pi}{3}\right) & \sin(p\varphi) \\ \cos\left(p\varphi + \frac{\pi}{3}\right) & \cos(p\varphi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \end{bmatrix} = \dots \\ \dots = [T_I] \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \end{bmatrix} \quad (4)$$

Relacja odwrotna ma formę:

$$\begin{bmatrix} i_A \\ i_B \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos(p\varphi) & -\sin(p\varphi) \\ -\cos\left(p\varphi + \frac{\pi}{3}\right) & \sin\left(p\varphi + \frac{\pi}{3}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} = \dots \\ \dots = [D_I] \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} \quad (5)$$

Obowiązuje zależność (Rys.5):

$$[T_I]^{-1} = [D_I] \quad (6)$$

jednak macierz  $[T_I]$  nie jest macierzą ortogonalną jak macierz  $[T]$  (Rys.5) [9].

W celu otrzymania podobnej transformacji dla napięć i strumieni w równaniu (1) obliczamy:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} W_{AC} \\ W_{BC} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_A \\ W_B \\ W_C \end{bmatrix} = [C]^T \begin{bmatrix} W_A \\ W_B \\ W_C \end{bmatrix} = \dots \\ &\dots = [C]^T [T]^{-1} \begin{bmatrix} W_d \\ W_q \\ W_0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7)$$

Na jej podstawie otrzymujemy związek:

$$\begin{bmatrix} W_{AC} \\ W_{BC} \end{bmatrix} = [D_{e\psi}] \begin{bmatrix} W_d \\ W_q \end{bmatrix} \quad (8)$$

gdzie macierz transformacji ma postać:

$$[D_{e\psi}] = \sqrt{2} \begin{bmatrix} \sin\left(p\varphi + \frac{\pi}{3}\right) & \cos\left(p\varphi + \frac{\pi}{3}\right) \\ \sin(p\varphi) & \cos(p\varphi) \end{bmatrix} \quad (9)$$

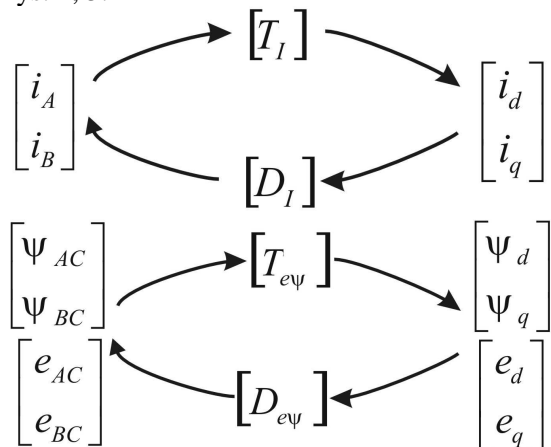
Macierz odwrotna w tym przypadku ma formę:

$$[T_{e\psi}] = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos(p\varphi) & -\cos\left(p\varphi + \frac{\pi}{3}\right) \\ -\sin(p\varphi) & \sin\left(p\varphi + \frac{\pi}{3}\right) \end{bmatrix} \quad (10)$$

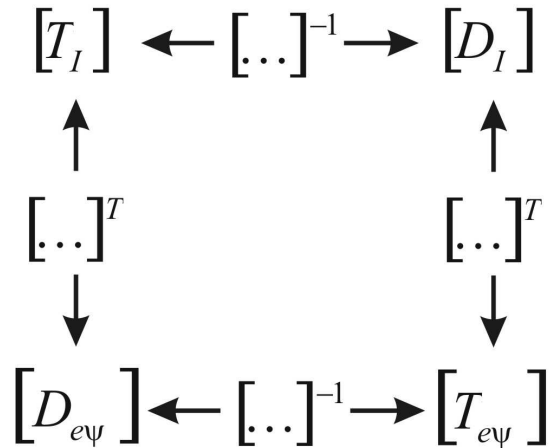
i dotyczy związku (Rys.4):

$$\begin{bmatrix} W_d \\ W_q \end{bmatrix} = [T_{e\psi}] \begin{bmatrix} W_{AC} \\ W_{BC} \end{bmatrix} \quad (11)$$

Między macierzami reprezentującymi transformacje proste  $[T_I]$ ,  $[T_{e\psi}]$  i odwrotne  $[D_I]$ ,  $[D_{e\psi}]$  istnieją związki które przedstawiono na Rys. 4, 5.



Rys.4. Transformacja prądów, napięć i strumieni dla transformacji zmodyfikowanej



Rys.5. Transformacje zmiennych dla transformacji zmodyfikowanej i ich zależności

$[...]^T, [...]^{-1}$  - transpozycja i inwersja macierzy,

### 5. Transformacja równań napięciowych

Równanie (1) należy przetransformować korzystając z zależności (5) i (8):

$$\begin{aligned} [D_{e\psi}] \begin{bmatrix} e_d \\ e_q \end{bmatrix} &= \frac{d}{dt} \left\{ [D_{e\psi}] \begin{bmatrix} \psi_d \\ \psi_q \end{bmatrix} \right\} + \dots \\ &\dots + \begin{bmatrix} r_A + r_C & r_C \\ r_C & r_B + r_C \end{bmatrix} [D_I] \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

Mnożąc równanie (12) lewostronnie przez macierz  $[T_{e\psi}]$  i przyjmując symetrię rezystancji fazowych silnika  $r_k=r_f$  ( $k=A,B,C$ ) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} e_d \\ e_q \end{bmatrix} &= [T_{e\psi}] \left\{ \frac{d}{dt} [D_{e\psi}] \right\} \begin{bmatrix} \psi_d \\ \psi_q \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_d \\ \psi_q \end{bmatrix} + \dots \\ &\dots + r_f [T_{e\psi}] \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} [D_I] \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

Występująca w pierwszym składniku (I) prawej strony równania macierz ma postać:

$$\begin{aligned} [T_{e\psi}] \left\{ \frac{d}{dt} [D_{e\psi}] \right\} &= [T_{e\psi}] \left\{ \frac{d}{d\varphi} [D_{e\psi}] \right\} \frac{d\varphi}{dt} = \dots \\ &\dots = [T_{e\psi}] \left\{ \frac{d}{d\varphi} [D_{e\psi}] \right\} \omega_r \end{aligned} \quad (14)$$

gdzie:  $\omega_r$  - prędkość kątowa wirnika (Rys.1), zaś

$$\frac{d}{d\varphi} [D_{e\psi}] = \sqrt{2} p \begin{bmatrix} \cos\left(p\varphi + \frac{\pi}{3}\right) & -\sin\left(p\varphi + \frac{\pi}{3}\right) \\ \cos(p\varphi) & -\sin(p\varphi) \end{bmatrix} \quad (15)$$

Macierz w zależności (14) przyjmuje postać:

$$[T_{e\psi}] \left\{ \frac{d}{dt} [D_{e\psi}] \right\} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \omega_e \quad (16)$$

gdzie:  $\omega_e = p\omega_r$  - elektryczna prędkość kątowna wirnika.

W równaniu (13) generuje ona dobrze znany składnik zwany napięciem rotacji [5]. Drugi składnik (II) równania (13) stanowi napięcie transformacji. Składnik (III) upraszcza się do postaci:

$$r_f [T_{e\psi}] \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} [D_I] = r_f \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Ostateczna forma równania napięciowego w układzie dwuosowym  $dq$  ma postać:

$$\begin{bmatrix} e_d \\ e_q \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_d \\ \psi_q \end{bmatrix} + \omega_e \begin{bmatrix} -\psi_q \\ \psi_d \end{bmatrix} + r_f \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} \quad (18)$$

Postać równania jest identyczna jak w przypadku ortogonalnej transformacji Parka z pominięciem składowej zerowej która w tym przypadku nie istnieje. Pokazuje to iż nie istnieje konieczność rozważania równania dla składowej zerowej napięcia w przypadku połączenia bez przewodu zerowego niezależnie od rozpatrywanego sposobu zasilania [10].

## 6. Diagonalizacja wyidealizowanej macierzy indukcyjności stojana

Fundamentalną własnością klasycznej transformacji Parka w przypadku silnika reluktancyjnego o wyidealizowanej macierzy indukcyjności stojana przedstawionej zależnością (19) jest jej diagonalizacja [8,9].

$$[L_s(\varphi)] = \begin{bmatrix} L_{ls} + L_A & -0.5L_A & -0.5L_A \\ -0.5L_A & L_{ls} + L_A & -0.5L_A \\ -0.5L_A & -0.5L_A & L_{ls} + L_A \end{bmatrix} + \dots \quad (19)$$

$$\dots + L_B \begin{bmatrix} \cos 2p\varphi & \cos 2(p\varphi - \pi/3) & \cos 2(p\varphi + \pi/3) \\ \cos 2(p\varphi - \pi/3) & \cos 2(p\varphi - 2\pi/3) & \cos 2p\varphi \\ \cos 2(p\varphi + \pi/3) & \cos 2p\varphi & \cos 2(p\varphi + 2\pi/3) \end{bmatrix}$$

gdzie:  $L_{ls}$  - indukcyjność rozproszenia fazowego,  $L_A$  - wartość średnia indukcyjności fazowej głównej,  $L_B$  - amplituda składowej zmiennej indukcyjności fazowej głównej.

Macierz (19) definiuje zależność strumieni i prądów fazowych:

$$\begin{bmatrix} \psi_A \\ \psi_B \\ \psi_C \end{bmatrix} = [L_s(\varphi)] \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \end{bmatrix} \quad (20)$$

W przypadku równania (1) konieczne jest na wstępie określenie na jego podstawie związku

$$\begin{bmatrix} \psi_{AC} \\ \psi_{BC} \end{bmatrix} = [L_M(\varphi)] \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \end{bmatrix} \quad (21)$$

Macierz  $[L_M]$  można łatwo wyprowadzić wykorzystując zależności (3) dla prądów oraz (7) dla strumieni:

$$[L_M(\varphi)] = [C]^T [L_s(\varphi)] [C] \quad (22)$$

Stosując zależności (8) i (4) otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} \psi_d \\ \psi_q \end{bmatrix} = [T_{e\psi}] [L_M(\varphi)] [D_I] \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} \quad (23)$$

Pozwala to ostatecznie zdefiniować macierz indukcyjności w układzie  $dq$ :

$$[L_{dq}(\varphi)] = [T_{e\psi}] [L_M(\varphi)] [D_I] \quad (24)$$

W przypadku maszyny idealizowanej opisanej zależnością (19) macierz ta ma postać:

$$[L_{dq}(\varphi)] = \begin{bmatrix} L_{ls} + \frac{3}{2}(L_A + L_B) & 0 \\ 0 & L_{ls} + \frac{3}{2}(L_A - L_B) \end{bmatrix} \quad (25)$$

co jest zgodne z wynikiem uzyskanym przy użyciu transformacji klasycznej [5].

## 7. Inwariantność mocy

Ortogonalna transformacja Parka zdefiniowana zależnością (2) zachowuje postaci wzoru na moc [8,9]. W przypadku zaproponowanej transformacji zmodyfikowanej należy sprawdzić czy cecha ta jest zachowana. Dla analizowanego na Rys.2 schematu moc pobierana ze źródła jest zdefiniowana zależnością:

$$P(t) = \begin{bmatrix} e_A & e_B & e_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \end{bmatrix} \quad (26)$$

który upraszcza się do postaci (Rys.3b):

$$P(t) = \begin{bmatrix} e_{AC} & e_{BC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \end{bmatrix} \quad (27)$$

Korzystając z zależności (5) i (8) otrzymujemy:

$$P(t) = \left\{ \begin{bmatrix} D_{e\psi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_d \\ e_q \end{bmatrix} \right\}^T \left\{ \begin{bmatrix} D_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} \right\} \quad (28)$$

Dokonując transpozycji:

$$P(t) = \begin{bmatrix} e_d & e_q \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} D_{e\psi} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} D_I \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} \quad (29)$$

i uwzględniając iż między macierzami transformacyjnymi istnieje zależność (Rys.5):

$$[T_I] = [D_{e\psi}]^T = [D_I]^{-1} \quad (30)$$

otrzymujemy:

$$P(t) = \begin{bmatrix} e_d & e_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} = e_d i_d + e_q i_q \quad (31)$$

Dowodzi to zachowania przez proponowaną transformację niezmienniczości mocy w obwodzie zastępczym.

## 8. Wnioski

W artykule przedstawiono zmodyfikowaną transformację dwuosiową z układu zmiennych fazowych  $ABC$  do układu  $dq$  dla uzwojenia połączonego w gwiazdę bez przewodu zerowego. Transformację tą można traktować jako złożenie klasycznej transformacji Parka z transformacją wynikającą z więzów narzuconych na obwód zasilania silnika przez sposób połączenia jego uzwojeń fazowych [6]. W jej wyniku otrzymano zestaw dwóch różnych transformacji dla prądów  $[T_I]$ ,  $[D_I]$  oraz strumieni/napięć  $[T_{e\psi}]$ ,  $[D_{e\psi}]$  (Rys.4,5) które pozwalają na całkowite pominięcie składowej zerowej w równaniach napięciowych dla układu  $dq$ . Proponowana transformacja dwuosiowa zachowuje wszystkie istotne cechy transformacji klasycznej, w tym formę równania napięciowego, inwariantność mocy oraz diagonalizację macierzy indukcyjności dla wyidealizowanej maszyny reluktancyjnej. Własności te potwierdzają matematyczną poprawność proponowanej transformacji.

Możliwość wykorzystania tego typu transformacji, zróżnicowanej dla prądów i napięć/strumieni, jest obecna w literaturze [8]. Jej wykorzystanie zostało jednak dotychczas ograniczone do operacji sprowadzenia wielkości opisujących obwody wirnika na

stronę stojana. Transformacja napięć międzyfazowych do układu dwuosiowego była wykorzystywana, choć w ograniczonym zakresie, w pracach związanych z modelowaniem silników bezszczotkowych z magnesami trwałymi [7].

Korzyść z zastosowania proponowanej modyfikacji stanowić może fakt, iż prądy i napięcia występujące w równaniu (1) są pomiarowo dostępne co umożliwia zastosowanie transformacji także w przypadku gdy założenie o sinusoidalności rozkładu pola nie może być wykorzystane [7]. Ponadto, mimo większej liczby macierzy transformacyjnych niż w przypadku klasycznym, w ich skład wchodzi tylko 4 parametry trygonometryczne dla danego kąta położenia wirnika w przeciwieństwie do 6 w macierzy  $[T]$ .

## Literatura

- [1]. Bolkowski S.: *Teoria obwodów elektrycznych*, WNT W-wa, 2006.
- [2]. Burlikowski W.: *Mathematical model of an electromechanical actuator using flux state variables applied to reluctance motor*. COMPEL, Vol.25, No.1, 2006, pp. 169-180.
- [3]. Burlikowski W.: *Porównanie różnych metod realizacji modelu symulacyjnego silnika reluktancyjnego*. Przegląd Elektrotechniczny, 2006, nr 12, str.57-60.
- [4]. Burlikowski W.: *Koncepcja uproszczonej transformacji dwuosiowej dla prądowych i strumieniowych zmiennych stanu na przykładzie silnika reluktancyjnego z uzwojeniem połączonym w gwiazdę bez przewodu zerowego*. XIII Symposium "Fundamental Problems of Power Electronics, Electromechanics and Mechatronics" PPEEm'2009, Wisła, Poland, pp. 229-233.
- [5]. Krause P.: *Analysis of Electric Machinery*, McGraw-Hill, 1986.
- [6]. Kron G.: *Tensors for Circuits*, Dover, New York, 1959.
- [7]. Ozturk S. B., Toliyat H. A.: *Sensorless Direct Torque and Indirect Flux Control of Brushless DC Motor with Non-sinusoidal Back-EMF*, in *Proc. IEEE-IECON Annu. Meeting*, Orlando, 2008, pp. 1373-1378.
- [8]. Paszek W.: *Dynamika maszyn elektrycznych prądu przemiennego*, Gliwice : Helion, cop. 1998.
- [9]. Sobczyk T.J.: *Metodyczne aspekty modelowania matematycznego maszyn indukcyjnych*, WNT W-wa, 2004.
- [10]. Stumberger G., Stumberger B., Dolinar D.: *Identification of Linear Synchronous Reluctance Motor Parameters*, IEEE Transactions on Industry Applications, Vol. 40, No. 5, September/October 2004, pp. 1317-1324.

**Autor**

dr inż. Wojciech Burlikowski, Politechnika Śląska,  
Wydział Elektryczny, Katedra Mechatroniki,  
ul. Akademicka 10a, 44-100 Gliwice, tel. (032) 237 26 77,  
email: wojciech.burlikowski@polsl.pl

*„Praca naukowa finansowana ze środków na naukę  
w latach 2008-2010 jako projekt badawczy  
N N510 348434”*

**Recenzent**

*Prof. dr hab. inż. Marian Łukaniszyn*