

Tomasz GRZYWACZ  
Jan SIKORA  
Stefan WÓJTOWICZ

## ZASTOSOWANIE DEKOMPOZYCJI OBSZAROWEJ W DYFUZYJNEJ TOMOGRAFII OPTYCZNEJ

**STRESZCZENIE** *Dyfuzyjna Tomografia Optyczna (DTO) wykorzystuje własności optyczne żywej tkanki poddanej działaniu światła podczerwonego o długości 760 – 830 nm. W tym zakresie fala elektromagnetyczna jest niejonizująca, a więc bezpieczna nawet w przypadku długoterminowych ekspozycji. W ludzkim ciele jest pochłaniana i rozpraszana, co pozwala na różnicowanie tkanek. Co ważne, jedną z substancji najbardziej pochłaniających światło o tej długości fali jest hemoglobina we krwi. Głównym z zastosowań DTO jest monitoring krwotoków śródmózgowych u wcześniaków. W tym przypadku jest to jedyna technologia pozwalająca na monitorowanie wcześniaka pozostającego wewnątrz inkubatora.*

**Słowa kluczowe:** *dekompozycja obszarowa, metoda elementów brzegowych, dyfuzyjna tomografia optyczna*

---

**mgr inż. Tomasz GRZYWACZ, prof. dr hab. inż. Jan SIKORA**  
e-mail: t.grzywacz@iel.waw.pl, j.sikora@iel.waw.pl

**dr inż. Stefan WÓJTOWICZ**  
e-mail: s.wójtowicz@iel.waw.pl

Zakład Systemów Pomiarowo – Diagnostycznych,  
Instytut Elektrotechniki

PRACE INSTYTUTU ELEKTROTECHNIKI, zeszyt 245, 2010

## 1. WSTĘP

---

Celem Dyfuzyjnej Tomografii Optycznej (DTO) w zastosowaniach medycznych jest pozyskanie optycznych własności tkanki biologicznej na podstawie wielopunktowego pomiaru przetransmitowanego światła. Takie pomiary mogą być użyte do określenia przestrzennego rozkładu współczynników absorpcji i rozpraszania wewnątrz obiektu, a w konsekwencji do stworzenia obrazów odpowiadających obszarom o różnej objętości krwi i różnym stopniu jej natlenienia.

Głównym celem jest zatem opracowanie wydajnej metody obliczania natężenia światła przetransmitowanego lub odbitego od badanego obiektu. W przypadku gdy obiekt wykazuje wystarczająco duże własności rozpraszające dobrym modelem transportu światła jest równanie dyfuzji [1]. Istnieją deterministyczne i stochastyczne metody rozwiązania tego problemu. Pierwsze obejmują albo analityczne rozwiązanie oparte na funkcji Greena [2] albo metody numeryczne takie jak metoda elementów skończonych, czy metoda elementów brzegowych. Drugie opierają się na symulacji zdarzeń rozpraszania i absorpcji w odniesieniu do pojedynczych fotonów.

Badany czterowarstwowy model sferyczny posiada stałe własności optyczne w każdym z regionów, ale własności te mogą się różnić między regionami. Do rozwiązania równania dyfuzji została wykorzystana metoda elementów brzegowych wymagająca relatywnie łatwej do uzyskania siatki powierzchniowej. Niestety prowadzi ona do utworzenia algebraicznego układu równań o pełnej i niesymetrycznej macierzy, a w konsekwencji do bardzo dużych wymagań odnośnie adresowalnej pamięci operacyjnej komputera. Jedną z dróg złagodzenia tego problemu jest metoda dekompozycji obszarowej, która bardzo dobrze nadaje się do tego rodzaju aplikacji. Zatem oryginalny problem został podzielony na podproblemy zdefiniowane na podobszarach i granicach pomiędzy nimi przy użyciu metod dekompozycji obszarowej. Wykorzystano przy tym algorytm dekompozycji gdzie podobszary zachodzą na siebie oraz algorytm, w którym podobszary oddzielone są granicami – jedynie przylegają do siebie.

## 2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

---

W tomografii optycznej ogólnie przyjętym modelem propagacji światła jest równanie transportu promieniowania (ang. Radiative Transfer equation

RTE), które jest pierwszym przybliżeniem równania transportu. Analityczne rozwiązanie równania transportu jest możliwe tylko dla bardzo prostych geometrii, zaś rozwiązania numeryczne zwykle prowadzą do skomplikowanych problemów obliczeniowych. Zatem równanie transportu jest zbyt skomplikowane aby mogło być stosowane w praktyce i dlatego stosuje się modele przybliżone. W ośrodkach silnie rozpraszających światło, takich jak tkanka biologiczna, teoria transportu jest zastępowana teorią opisującą zjawisko dyfuzji. Równanie transportu promieniowania jest aproksymowane równaniem dyfuzji, które w dziedzinie częstotliwości przyjmuje następującą postać:

$$-\nabla \cdot \kappa(r)\nabla \Phi(r; \omega) + \mu_a(r)\Phi(r; \omega) + \frac{i\omega}{c}\Phi(r; \omega) = q(r; \omega) \quad (1)$$

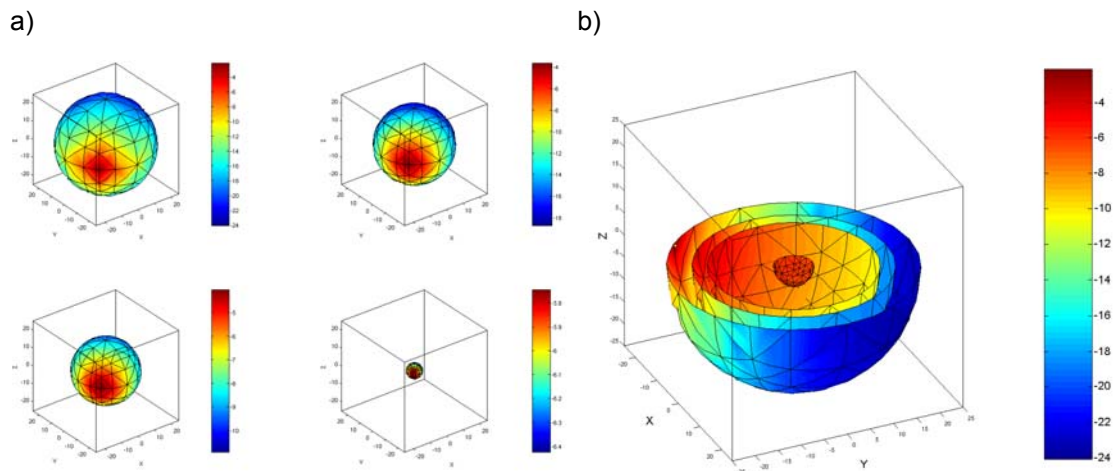
a z warunkami Robina:

$$\Phi(m; \omega) + 2\alpha\kappa(m)\frac{\partial\Phi(m; \omega)}{\partial\nu} = h^-(m; \omega) \quad (2)$$

gdzie  $\omega \in R^+$  jest częstotliwością,  $\Phi$  to radiancja,  $c$  jest prędkością światła,  $q$  stanowi wewnętrzne źródło światła w danym medium,  $h^-$  jest strumieniem wchodzącym,  $\alpha$  jest zmienną uwzględniającą współczynnik załamania na granicy tkanka – powietrze,  $\nu$  jest pochodną normalną skierowaną na zewnątrz brzegu  $\Gamma$ ,  $\kappa$  i  $\mu_a$  są współczynnikami dyfuzji i absorpcji. Definiuje się współczynnik dyfuzji o postaci  $\kappa = \frac{1}{3(\mu_a + \mu_s)}$ . Zmienna  $r$  określa pozycję wektora w przestrzeni, zaś zmienna  $m$  pozycję wektora w odniesieniu do powierzchni.

Przedmiotem badań jest czterowarstwowy sferyczny model głowy. Modelowanymi warstwami są: skóra, kość czaszki, nierozpraszający światła płyn rdzeniowo – mózgowy i mózg. Do rozwiązania układu równań  $Kf=b$  otrzymanego z MEB została użyta uogólniona metoda najmniejszego residuum (ang. GMRES).  $K$  jest lewą stroną macierzowego układu równań opisującego rozkład funkcji stanu,  $b$  jest wektorem znanych współczynników związanych ze źródłem światła. Dodatkowo macierz  $K$  jest blokowo – pełną macierzą niesymetryczną.

Przykładowe rozwiązanie jest pokazane na rysunku 1. Przedstawia ono logarytm amplitudy gęstości fotonów na granicach między obszarami. Źródło światła jest izotropowym źródłem punktowym umieszczonym w odległości  $\frac{1}{\mu_s}$  od brzegu regionu. Amplituda modelowanego rozkładu maleje w miarę oddalania się od źródła światła, zaś jego faza wzrasta, co zostało pokazane na rysunku 3b.



Rys. 1. Logarytm amplitudy gęstości fotonów przy jednakowym rozkładzie parametrów optycznych w każdym z regionów (a) oraz przekrój poprzeczny rozpatrywanego modelu z zaznaczonym położeniem źródła światła (b)

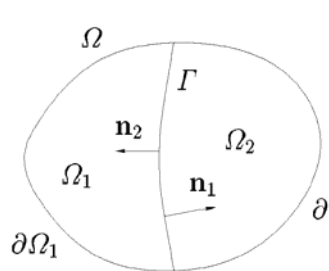
### 3. DEKOMPOZYCJA BEZ NAKŁADANIA W CZTEROWARSTWOWYM MODELU SFERYCZNYM

Metody dekompozycji obszarowej są klasyfikowane według kilku kryteriów. W metodach z nakładaniem stosunkowo łatwo jest uaktualniać warunki brzegowe na granicach regionów. Dzieje się to kosztem dodatkowych obliczeń przypadających na każdą iterację. Metody dekompozycji bez nakładania pomiędzy regionami nie posiadają tej wady. Niestety cechują się niską zbieżnością, zwłaszcza przy rozwiązywaniu słabo uwarunkowanych problemów brzegowych.

Jest wiele algorytmów [3], [4] wykorzystywanych w metodach bez nakładania. Rozróżnia się je w zależności od typu przenoszonych warunków brzegowych. Wykorzystany w niniejszej pracy algorytm Dirichlet – Neumann może być opisany w następujący sposób. Zaczynamy z wartością początkową  $u_r^0$ . Jako pierwszy rozwiązujemy problem Dirichleta w obszarze pierwszym z wartością początkową  $u_r^0$  na brzegu  $\Gamma$ . Następnie szukamy rozwiązania mieszanego problemu Neumann – Dirichlet w obszarze drugim z warunkiem Neumanna na granicy  $\Gamma$  określonym przez rozwiązanie z poprzedniego kroku w obszarze pierwszym i z warunkami Dirichleta na reszcie brzegu obszaru drugiego. Nowa iteracja  $u_r^1$  jest wyliczana jako liniowa kombinacja (5) tego – aktualnego rozwiązania i poprzedniego  $u_r^0$  z użyciem odpowiednio dobranego parametru relaksacyjnego  $\Theta$ .

Sposoby wyznaczenia wartości początkowej  $u_{\Gamma}^0$  jak i parametru  $\theta$  zostały szeroko omówione w [4] i [5].

Matematyczny zapis poszczególnych kroków algorytmu Dirichlet – Neumann jest przedstawiony na rysunku 2.



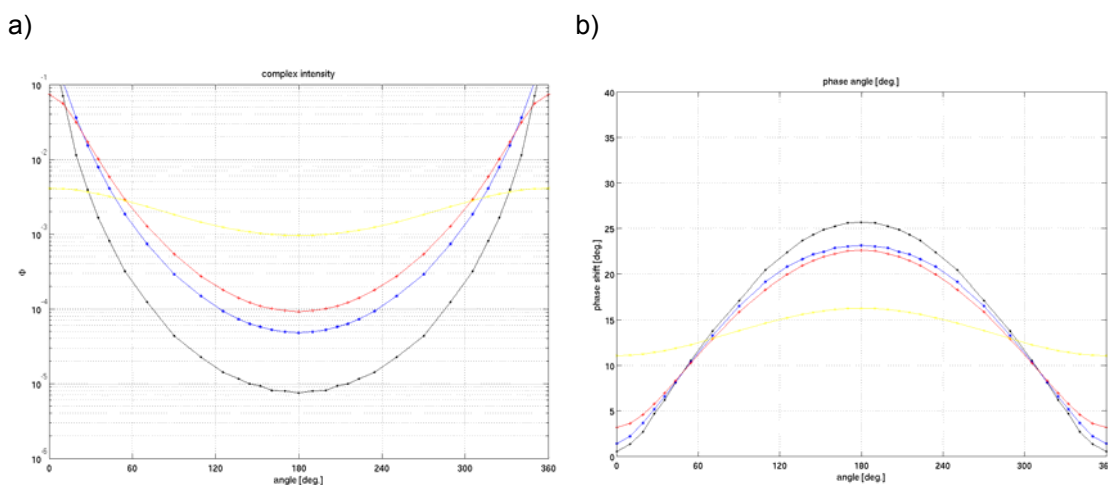
$$(D) \begin{cases} -\Delta u_1^{n+1/2} = f & \text{in } \Omega_1, \\ u_1^{n+1/2} = 0 & \text{on } \partial\Omega_1 \setminus \Gamma, \\ u_1^{n+1/2} = u_{\Gamma}^n & \text{on } \Gamma, \end{cases} \quad (3)$$

$$(N) \begin{cases} -\Delta u_2^{n+1} = f & \text{in } \Omega_2, \\ u_2^{n+1} = 0 & \text{on } \partial\Omega_2 \setminus \Gamma, \\ \frac{\partial u_2^{n+1}}{\partial n_2} = -\frac{\partial u_1^{n+1/2}}{\partial n_1} & \text{on } \Gamma, \end{cases} \quad (4)$$

$$u_{\Gamma}^{n+1} = \theta u_2^{n+1} + (1 - \theta) u_{\Gamma}^n \text{ on } \Gamma, \quad (5)$$

Rys. 2. Podział domeny na dwa nie nakładające się podobszary oraz zapis równań algorytmu przenoszenia warunków brzegowych typu Dirichlet – Neumann

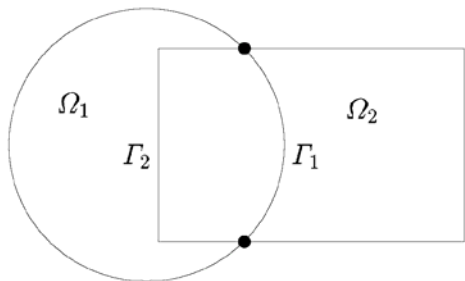
Wyniki symulacji uzyskane przy użyciu powyżej opisanego algorytmu zostały pokazane na rysunku 3. Przykładowy model był w tym przypadku złożony z 386 węzłów co dawało 192 elementy brzegowe przypadające na każdą warstwę. W celu przedstawienia poniższych wyników (rys. 3), punkty pomiarowe zostały umieszczone na obwodzie modelu.



Rys. 3. Logarytm amplitudy (a) oraz przesunięcie fazowe (b) gęstości fotonów w funkcji kąta detekcji wewnątrz analizowanego obszaru

#### 4. DEKOMPOZYCJA Z NAKŁADANIEM W CZTEROWARSTWOWYM MODELU SFERYCZNYM

W dekompozycji z nakładaniem algorytm zakłada dwa częściowe kroki odpowiadające dwóm zachodzącym na siebie regionom  $\Omega_1$  i  $\Omega_2$  oryginalnego obszaru. Na początku zakładamy wartość (rozwiązania)  $u_2^0$  na wewnętrznym brzegu  $\Gamma_1$ . Następnie iteracyjnie dla  $n = 1, 2, 3, \dots$ , rozwiązujemy równanie brzegowe (6) i uzyskujemy rozwiązanie w obszarze pierwszym  $u_1^n$ . Teraz rozwiązujemy problem brzegowy w drugim obszarze z wartościami na brzegu  $\Gamma_2$  wziętymi z rozwiązania w poprzednim regionie (rys. 4).

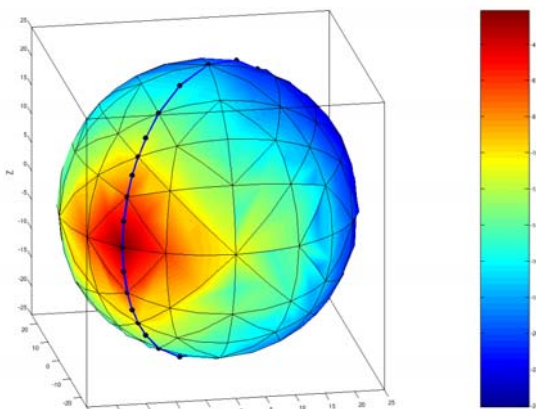


$$\begin{cases} -\Delta u_1^n = f & \text{in } \Omega_1, \\ u_1^n = g & \text{on } \partial\Omega_1 \setminus \Gamma_1, \\ u_1^n = u_2^{n-1}|_{\Gamma_1} & \text{on } \Gamma_1. \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} -\Delta u_2^n = f & \text{in } \Omega_2, \\ u_2^n = g & \text{on } \partial\Omega_2 \setminus \Gamma_2, \\ u_2^n = u_1^n|_{\Gamma_2} & \text{on } \Gamma_2. \end{cases} \quad (7)$$

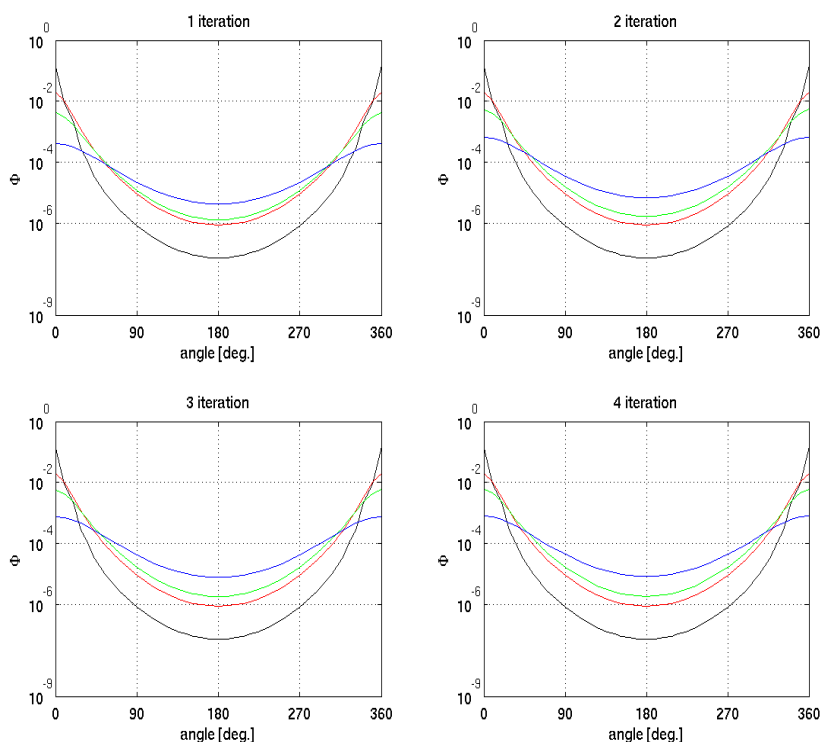
Rys. 4. Przykład dekompozycji obliczeń w przypadku gdy analizowane obszary zachodzą na siebie oraz równania naprzemiennej metody Schwarz'a

Reasumując, w każdym cząstkowym kroku przedstawionej tu metody Schwarz'a rozwiązujemy zagadnienie brzegowe w podobzdarze  $\Omega_i$  z danymi warunkami brzegowymi na zewnętrznym brzegu obszaru i z poprzednim aproksymowanym rozwiązaniem na brzegu wewnętrznym.



Rys. 5

Wyniki symulacji uzyskane przy użyciu powyżej opisanego algorytmu zostały pokazane na rysunku 4. Przykładowy model zbudowany z czterech koncentrycznie osadzonych sfer (patrz rys. 1) składał się w tym przypadku z 768 elementów przypadających na każdą sferę co dawało w sumie 6152 węzłów. W celu przedstawienia poniższych wyników (rys. 6), punkty pomiarowe zostały umieszczone na obwodzie modelu (rysunek obok).



**Rys. 6. Logarytm amplitudy gęstości fotonów na granicach obszarów analizowanego modelu w funkcji kąta detekcji**

## 5. WYNIKI

Celem pracy było opracowanie metod przyspieszenia obliczeń w DOT. Autorzy zdecydowali się na metody dekompozycji obszarowej z uwagi na możliwość współpracy tych metod z modelem zagadnienia opracowanym w MEB.

Zgodnie z wynikami prac nad dekompozycją obliczeń rozkładu pola elektrostatycznego w warstwowym kondensatorze walcowym wskazaniem byłoby użycie wydajniejszych metod dekompozycji bez nakładania. Należy tu zaznaczyć, wydajniejszych dla prostego problemu Laplace'a. Inaczej bowiem sprawa się ma, gdy metody dekompozycji zastosujemy w modelu opisanym równaniem dyfuzji. W konkretnym przypadku sferycznego modelu czterowarstwowego dekompozycja bez nakładania jest metodą niestabilną i zbiega się tylko w ściśle określonych warunkach, dodatkowo po osiągnięciu stosunkowo dużej liczby iteracji (min. 25, błąd względny na poz. 5%). Wynikać to może z bardzo ubogiej liczby informacji wstępnych jakie dostarczamy w formie warunków brzegowych.

Zadowalające wyniki dla przypadku badanego w tej pracy daje metoda dekompozycji obszarowej z nakładaniem. Otóż, już 4 iteracje dwustopniowego algorytmu metody naprzemiennej pozwalają na zbliżenie się do rzeczywistego rozwiązania na odległość 2%-go błędu względnego. W tej konkretnej aplikacji dekompozycja z nakładaniem znacznie lepiej się zbiega, a rozwiązanie nie doznaje tak dużych fluktuacji w trakcie pracy algorytmu, jak dzieje się w przypadku metod pracujących na sąsiadujących, nienakładających się regionach. Oczywiście każdy z algorytmów jest tak samo dobry. Wszystko zależy od doboru odpowiedniej metody do rozwiązania konkretnego problemu.

Kolejną z przebadanych przez autorów metod podniesienia wydajności obliczeń DTO jest wygenerowanie macierzy widoczności dla ośrodków o zerowym, bądź bliskim zeru współczynnika rozpraszania i absorpcji światła [8].

## LITERATURA

1. Zacharopoulos A.D., Arridge S.R., Dorn O., Kolehmainen V., Sikora J.: Three-dimensional reconstruction of shape and piecewise constant region values for optical tomography using spherical harmonic parametrization and a boundary element method. *Inverse Problems*, vol. 22, 1509-1532, 2006.
2. Sikora J., Zacharopoulos A.D., Douiri A., Schweiger M., Horesh L., Arridge S.R., Ripoll J.: Diffuse photon propagation in multilayered geometries. *Physics In Medicine and Biology*, vol. 51, 497-516, 2006.
3. Toselli A., Widlund O.: *Domain Decomposition Methods – Algorithms and Theory*. Springer, 2005.
4. Sikora J.: *Boundary Element Method for Impedance and Optical Tomography*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, 2007.
5. Sikora J., Wieleba P.: *Biblioteka MEB dla dyfuzyjnej tomografii optycznej realizowana na licencji GNU*, Przegląd Elektrotechniczny, (2), 2007.
6. Grzywacz T., Sikora J., Wójtowicz S.: Visibility Matrix for Diffusive Optical Tomography – algorithm comparison with regular and octree space subdivision, XXIX IC-SPETO, 2006.

*Rękopis dostarczono, dnia 26.04.2010 r.*

**Opiniował: prof. dr hab. inż. Maciej Rafałowski**



APPLICATION OF THE DOMAIN DECOMPOSITION  
METHODS IN DIFFUSE OPTICAL TOMOGRAPHY

Tomasz GRZYWACZ, Jan SIKORA  
Stefan WÓJTOWICZ

**ABSTRACT** *Diffuse Optical Tomography (DTO) uses optical properties of human tissue stimulated with near-infrared light at wavelength of 760-830 nm. In this range the electromagnetic wave is non-ionizing thus very safe even in case of long time/lasted expositions. Human tissue has absorption and scattering properties for near-infrared light which allows differentiate between soft tissues. A haemoglobin is the most scattering substance for this wavelength. DTO may provide a bedside system to identify infant at risk of brain injury as well as to diagnose and monitor treatment.*

