

Antoni RÓŻOWICZ  
Mariusz DELĄG  
Sebastian RÓŻOWICZ

## MODEL MATEMATYCZNY NISKOCIŚNIENIOWEJ RTĘCIOWEJ LAMPY WYŁADOWCZEJ ZASILANEJ RÓŻNĄ CZĘSTOTLIWOŚCIĄ

**STRESZCZENIE** Dla prawidłowego projektowania układów pracy niskoprężnych rtęciowych lamp wyładowczych (lampa, układ stabilizacyjno-zapłonowy) konieczna jest dobra znajomość charakterystyk prądowo-napięciowych lampy oraz ich opis matematyczny. Opracowany model matematyczny o dużej wiarygodności odwzorowania, jak pokazano wyżej, pozwoli na optymalne projektowanie układu pracy lampy, jest to bardzo ważne w aspekcie zwiększenia efektywności energetycznej układu. Do opracowania modelu wykorzystano wyniki pomiarów na grupie lamp wyładowczych oraz wyniki symulacji komputerowych. Weryfikacja wyników symulacji potwierdziła wysoką zgodność z danymi pomiarowymi. Oznacza to, że przedstawiony model może zostać użyty w trakcie projektowania układów zasilania lamp.

**Słowa kluczowe:** *lampa wyładowcza, lampa rtęciowa, model matematyczny*

---

**dr hab. inż. Antoni RÓŻOWICZ, prof. PŚk, mgr inż. Mariusz DELĄG**  
e-mail: rozowicz@tu.kielce.pl, e-mail: m.delag@tu.kielce.pl

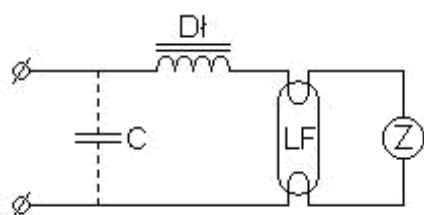
**mgr inż. Sebastian RÓŻOWICZ**  
e-mail: s.rozowicz@tu.kielce.pl

Wydział Elektrotechniki, Automatyki i Informatyki,  
Katedra Urządzeń Elektrycznych i Techniki Świetlnej,  
Politechnika Świętokrzyska w Kielcach

PRACE INSTYTUTU ELEKTROTECHNIKI, zeszyt 245, 2010

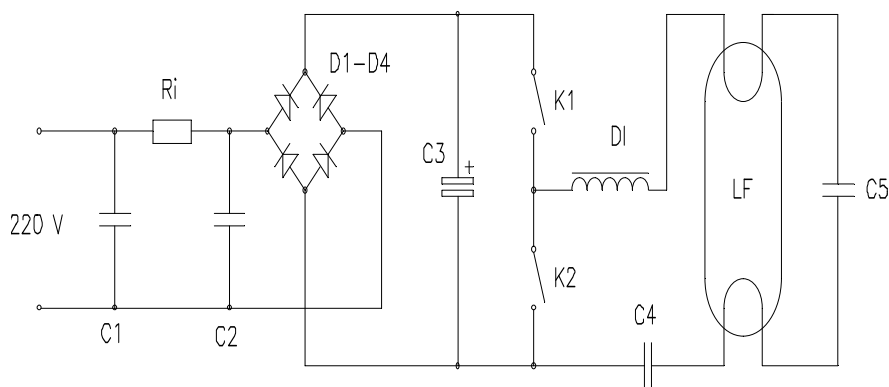
## 1. WSTĘP

Najbardziej rozpowszechnioną niskociśnieniową rtęciową lampą wyładowczą jest lampa fluorescencyjna. Zasada jej działania opiera się na wyładowaniu elektrycznym w parach rtęci o małym ciśnieniu. Lampa fluorescencyjna



**Rys. 1. Układ zasilania lampy fluorescencyjnej ze statecznikiem magnetycznym**

ma ujemną nieliniową charakterystykę napięciowo-prądową. Cecha ta nie pozwala na pracę tych lamp w obwodzie elektrycznym bez dodatkowego urządzenia, służącego do ograniczenia prądu lampy do określonej wartości. Najczęściej w tym celu stosuje układy pracy lamp ze statecznikami elektromagnetycznymi (rys. 1) lub układy pracy lamp ze statecznikami elektronicznymi (rys. 2).



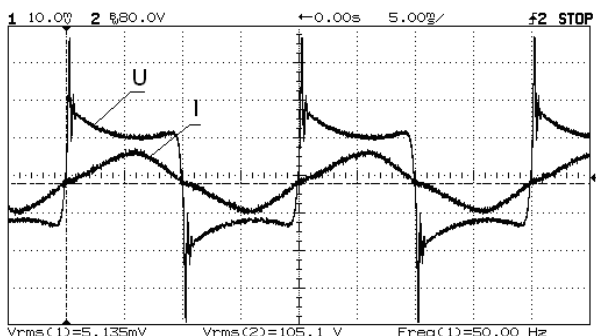
**Rys. 2. Układ zasilania lampy fluorescencyjnej ze statecznikiem elektronicznym**

Układy zasilania niskociśnieniowych lamp wyładowczych, przedstawione na rysunkach 1 i 2, zasadniczo różnią się między sobą układem sprzężenia lampy z zasilaniem oraz częstotliwością prądu w obwodzie lampy.

Konfiguracja w/w układów zasilania lamp w sposób istotny wpływa na parametry świetlne, jak i na poziom oraz rodzaj generowanych zakłóceń do sieci [9].

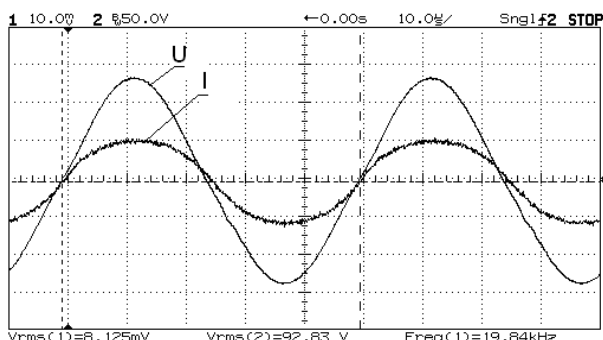
Układy pracy niskociśnieniowych rtęciowych lamp wyładowczych ze statecznikiem magnetycznym a więc zasilanych częstotliwością 50 Hz, nie są najodpowiedniejsze ze względu na parametry energetyczno-optyczne [11]. Przy częstotliwości 50 Hz elektrony i zjonizowane atomy mają wystarczający czas,

by rekombinować, przy każdej zmianie kierunku prądu; z tego powodu wyładowanie jest zapalane dwa razy w każdym okresie. Efektem tego jest występowanie pików napięcia ponownego zapalenia, które są nawet kilkadziesiąt procent wyższe od normalnego napięcia wyładowania, które jest praktycznie stałe w półokresie (rys. 3).



Rys. 3. Przebiegi czasowe prądu i napięcia lampy zasilanej częstotliwością sieciową

Praca lamp zasilanych prądem o podwyższonej częstotliwości dość znacznie różni się od pracy lamp zasilanych prądem o częstotliwości 50 Hz. Różnica ta wynika z faktu, iż przy wzroście częstotliwości prądu w obwodzie lampy powyżej 1 kHz [8] skraca się czas dejonizacji plazmy wyładowania, a więc zwiększa się gęstość elektronów – w konsekwencji zmniejszają się modulacje charakterystyk wyładowania, a więc wyładowanie w lampie dąży do równowagi dynamicznej. Oznacza to, iż przy wzroście częstotliwości prądu w obwodzie lampy proces ponownego zapłonu lampy trwa coraz krócej. Krótszy czas ponownego zapłonu lampy prowadzi do zmniejszenia, a następnie zaników pików zapłonowych w krzywej napięcia lampy (rys. 4). Zanik pików napięcia ponownego zapalenia oznacza, że lampę można traktować niemal jako element rezystancyjny. Większość producentów lamp dostarcza dane lampy tylko dla pracy przy niskiej częstotliwości, gdzie lampa zachowuje się jako kwadrat fali napięcia źródła.

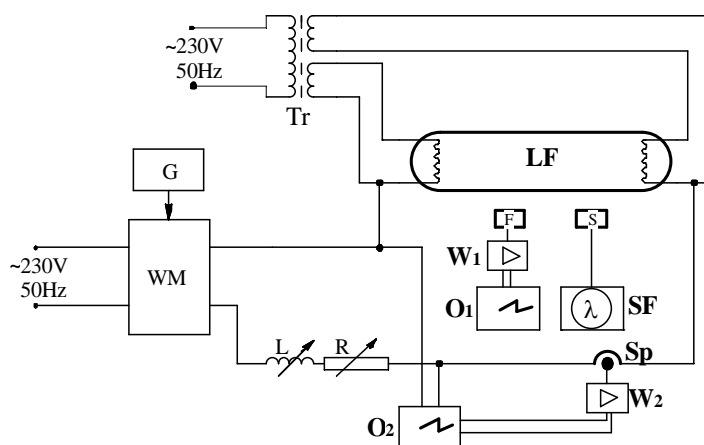


Rys. 4. Przebiegi czasowe prądu i napięcia lampy zasilanej częstotliwością 20 kHz

Jak widać z powyższego przykładu, przy projektowaniu układu stabilizacyjno-zapłonowego lampy zasilanej wyższą częstotliwością, lampę można modelować jako rezystor; założenie takie nie jest możliwe dla lamp zasilanych częstotliwością poniżej 1 kHz. Dlatego dla prawidłowego projektowania układów pracy niskoprężnych rtęciowych lamp wyładowczych (lampa, układ stabilizacyjno-zapłonowy) konieczna jest dobra znajomość charakterystyk teoretycznych i eksperymentalnych pracy lampy oraz ich opisu matematycznego.

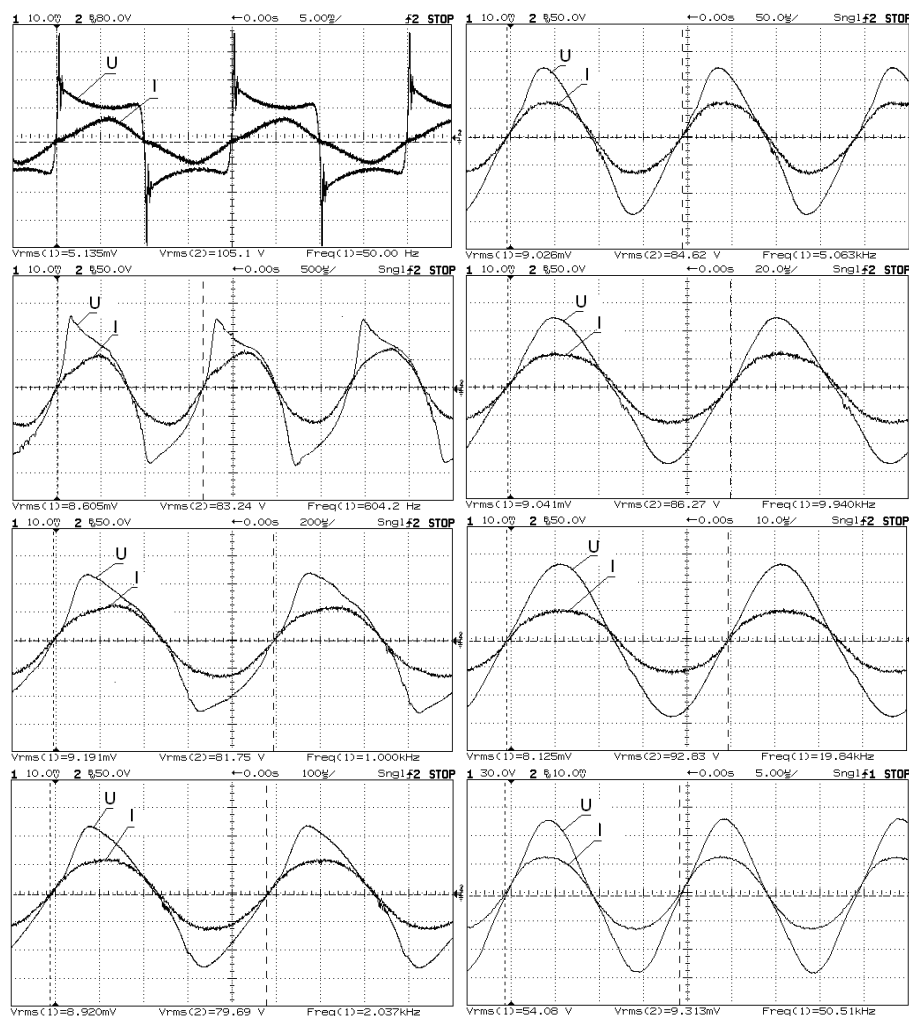
## 2. PRZEBIEGI PRĄDU I NAPIĘCIA W OBWODZIE LAMP ZASILANYCH RÓŻNĄ CZĘSTOTLIWOŚCIĄ

W spotykanych rozwiązaniach przyjmuje się, że częstotliwość prądu lampy powinna wynosić nie więcej niż 50 kHz [3], choć istnieją także poglądy, iż można ją zwiększyć do 100 kHz [9]. Wykorzystywanie tak szerokiego zakresu częstotliwości prądu w obwodzie lampy wydaje się niecelowe z kilku powodów. Po pierwsze trzecia harmoniczna prądu powinna być mniejsza od 150 kHz (najniższa częstotliwość radiofonii) [3]; po drugie zwiększanie wartości częstotliwości prądu może nie wpływać na poprawę wielkości parametrów eksploatacyjnych lampy [10]. Badaniami objęto typoszereg niskociśnieniowych rtęciowych lamp wyładowczych różnych klas o mocy od 36 W zasilanych częstotliwością od 50 Hz do 50 kHz. Badania przeprowadzono przy zasilaniu napięciem nieodkształconym (odkształcenie nie przekraczało 2%) w układzie przedstawionym na rysunku 5.



Rys. 5. Układ pomiarowy badania charakterystyk prądowo-napięciowych lamp zasilanych różną częstotliwością

Przykładowe wyniki przeprowadzonych badań poszczególnych grup lamp zasilanych prądem o różnej częstotliwości, przedstawiono na rysunku 6.



Rys. 6. Przebiegi czasowe prądu i napięcia lampy zasilanej prądem o różnych częstotliwościach

### 3. MODEL MATEMATYCZNY NISKOCIŚNIENIOWEJ RTĘCIOWEJ LAMPY WYŁADOWCZEJ

W literaturze [1, 2, 8, 12] prezentowanych jest wiele wariantów i koncepcji modeli. Cechują się one jednak zróżnicowaną dokładnością odwzorowania charakterystyki napięciowo-prądowej lampy (rozbieżności sięgają niekiedy nawet 75%). Szczególnie niewystarczająco odzwierciedlają charakterystyki lamp dla pracy przy niskich częstotliwościach. Niedokładności opisanych w literaturze modeli lamp zasilanych napięciem o częstotliwości sieciowej powodują, iż w dalszym ciągu należy poszukiwać modelu, który pozbawiony byłby tych wad. Opracowanie modelu matematycznego o dużej wiarygodności odwzoro-

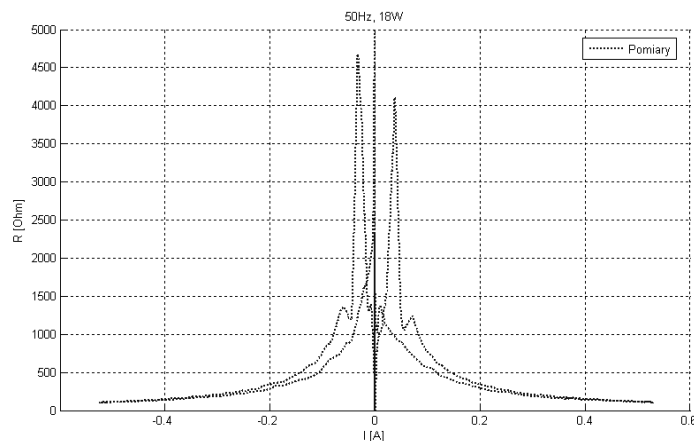
wania, jak pokazano wyżej, pozwoli na optymalne projektowanie układu pracy lampy; jest to bardzo ważne w aspekcie zwiększenia efektywności energetycznej układu.

Mając na uwadze powyższe wskazania podjęto próby poszukiwania opisu matematycznego lampy, który dobrze odwzoruje charakterystyki lampy, zarówno przy niskich, jak i podwyższonych częstotliwościach zasilania.

Dla potrzeb konstrukcji modelu matematycznego przyjęto charakterystyki impedancji lampy w funkcji prądu lampy, przy następujących założeniach upraszczających:

- charakterystyka impedancyjno-prądowa lampy ma kształt symetryczny względem osi odciętych;
- wartość chwilowa impedancji osiąga wartość maksymalną dla zerowej wartości prądu lampy [2].

Przykładową charakterystykę impedancji lampy w zależności od prądu płynącego przez lampę zasilaną częstotliwością sieciową przedstawiono na rysunku 7.



Rys. 7. Rzeczywista zależność rezystancji lampy od prądu lampy, dla  $f = 50$  Hz

Korzystając z analizy przebiegów eksperymentalnych oraz oprogramowania MATLAB dokonano opisu matematycznego zmian napięcia lampy w funkcji częstotliwości i prądu lampy. Jako model matematyczny opisujący zależności napięcia na lampie a częstotliwością i prądem w obwodzie lampy wybrano opis równaniami:

- dla  $f \leq 200$  Hz:

$$U_{(i,f)} = \frac{a_2}{|r_{(i)}| + a_2} i(t) + b_1 e^{1 - b_2 \sin^2[\omega(t - t_2)]^2} \cos(\omega t) + c_1 e^{1 - c_2 \sin^2[\omega(t - t_2)]^2} \cos(\omega t) - d_1 \sin(\omega t)$$

(1)

- dla  $f > 200$  Hz:

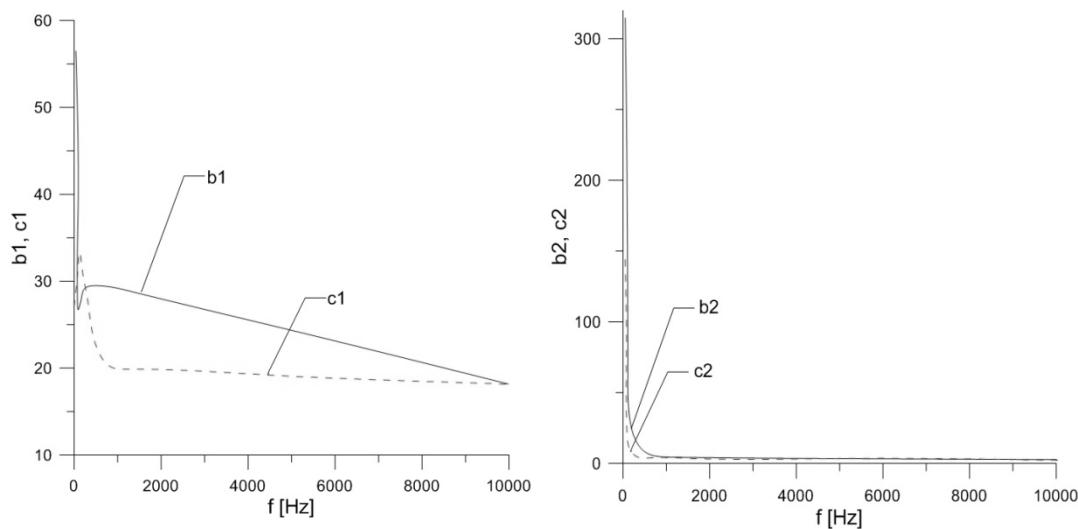
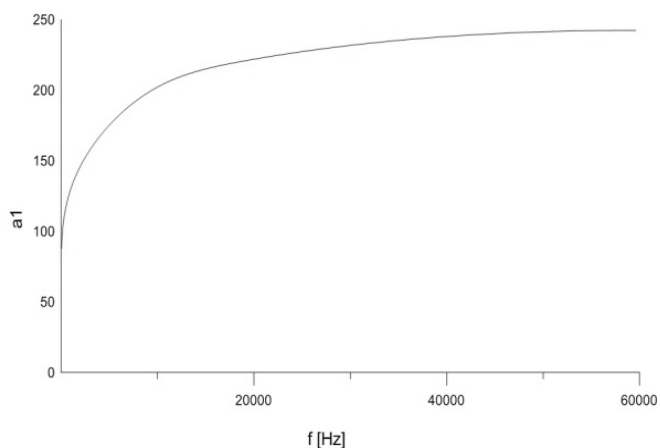
$$U_{(i,f)} = a_1 i(t) + b_1 e^{1-b_2 \sin[\omega(t-b_3)]^2 \cos(\omega t)} + c_1 e^{1-c_2 \sin[\omega(t-c_3)]^2 \cos(\omega t)} - a_1 \sin(\omega t) \quad (2)$$

gdzie:

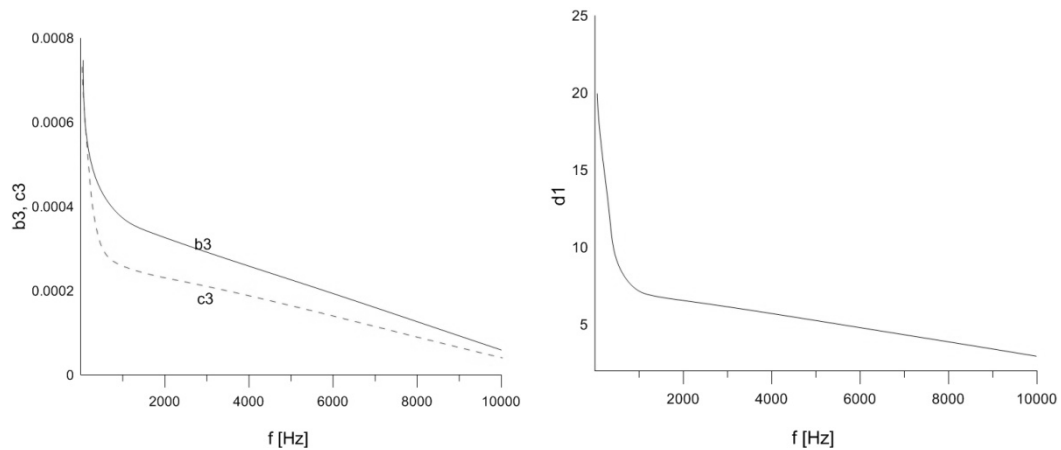
- $\omega$  – pulsacja prądu;
- $i(t)$  – wartość prądu chwilowego płynącego przez lampę;
- $a_1, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1$  – parametry równania.

Wartości parametrów przedstawiono na rysunkach 8, 9 i 10. Zostały one wyznaczone w sposób analityczny dla różnych częstotliwości prądu w obwodzie lampy.

Rys. 8. Zmiany parametru  $a_1$  w funkcji zmian częstotliwości prądu w obwodzie lampy



Rys. 9. Zmiany parametrów  $b_1, c_1, b_2, c_2$  w funkcji zmian częstotliwości prądu w obwodzie lampy

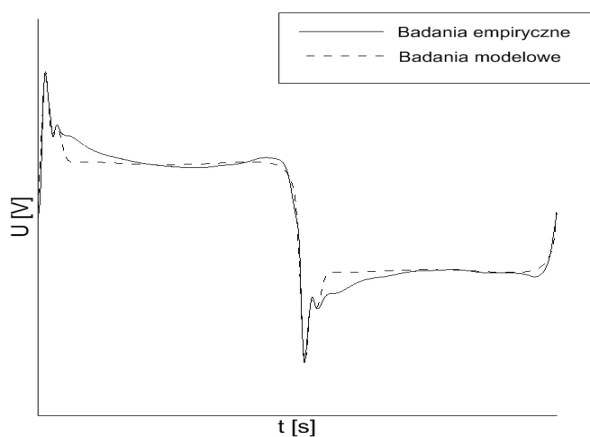


Rys. 10. Zmiany parametrów  $b_3$ ,  $c_3$ ,  $d_1$  w funkcji zmian częstotliwości prądu w obwodzie lampy

#### 4. WERYFIKACJA MODELU Z WYNIKAMI BADAŃ EMPIRYCZNYCH

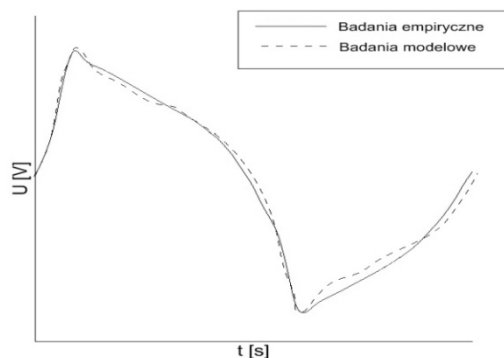
Weryfikacji przyjętego modelu lampy dokonano poprzez ocenę zgodności obliczeń modelowych z wynikami badań empirycznych różnych grup lamp o mocy 36 W zasilanych różną częstotliwością. Przykładowe wyniki badań przedstawiono na rysunkach 11, 12 i 13.

Jakość dopasowania mierzono wartością współczynnika determinacji  $R^2$  ( $R^2$  informuje, jaki procent całkowitej zmienności danych wyjaśnia rozważana funkcja regresji). Dla wszystkich wyników badań modelowych i empirycznych w zakresie zmian częstotliwości od 50 Hz do 50 kHz wartość współczynnika  $R^2$  wynosiła od 0,98 (dla częstotliwości 50 Hz) do 0,995 (dla częstotliwości 50 kHz).

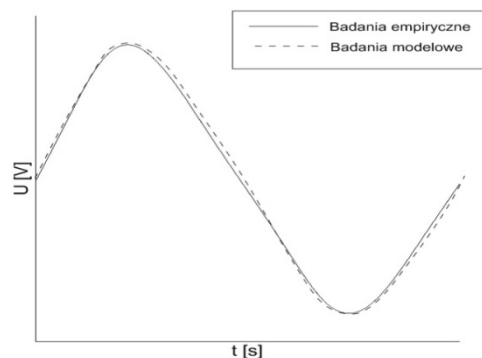


Rys. 11. Napięcie  $u(t)$  na lampie dla częstotliwości 50 Hz dla badań modelowych oraz badań empirycznych





Rys. 12. Napięcie  $u(t)$  na lampie dla częstotliwości 500 Hz dla badań modelowych oraz badań empirycznych



Rys. 13. Napięcie  $u(t)$  na lampie dla częstotliwości 10 kHz dla badań modelowych oraz badań empirycznych

## 5. WNIOSKI

Opracowany model matematyczny niskoprężnej rtęciowej lampy wyładowczej wykazuje dużą zgodność z wynikami eksperymentalnymi, świadczy o tym bardzo wysoka wartość współczynnika determinacji.

Zweryfikowany model (głównie w zakresie współczynników równań) może znaleźć praktyczne zastosowanie przy projektowaniu układów pracy niskoprężnych rtęciowych lamp wyładowczych. Projektowanie układów pracy lamp w oparciu o poprawny model matematyczny będzie bardziej efektywne i mniej czasochłonne od projektowania tradycyjnego opierającego się na wynikach pomiarów na rzeczywistych obiektach.

Przedstawiony model matematyczny będzie dalej wikłany nie tylko w funkcji parametrów elektrycznych, ale także i świetlnych, a charakterystyki będą odzwierciedlane z wymaganą dokładnością.

## LITERATURA

1. Herrick P.R.: Mathematical Models for High-Intensity Discharge Lamps. IEEE Transactions on Industry Applications, 1980.
2. Mader U., Horn P.: A dynamic model for the electrical characteristics of fluorescent lamps. IEEE Industry Applications Society Meeting, Conf. Records, 1928-1934, 1992.
3. Mayer Ch., Nienhuis H.: Discharge lamps, Philips Technical Library, 1988.
4. Ohonskaja E.V.: Effektivnost' luminescentnych lamp pri vysokočastotnom pitanii, Sovetotekhnika, No 2, 1987.

5. Osowski S., Cichocki A., Siwek K.: Matlab w zastosowaniu do obliczeń obwodowych i przetwarzania sygnałów. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 2006.
6. Pabiańczyk W., Gabryjelski Z.: Zasilanie sieci oświetleniowej napięciem o podwyższonej częstotliwości, Gospodarka Paliwami i Energią, Nr 123, 1983.
7. Peek S.C., Spencer D.E.: A Differential Equation for the Fluorescent Lamp. Illum. Eng., 1968.
8. Różowicz A., Deląg M., Różowicz S.: Model matematyczny niskociśnieniowej rtęciowej lampy wyładowczej zasilanej częstotliwością sieciową. Logistyka, 2009.
9. Różowicz A.: Wpływ częstotliwości prądu zasilającego lampy fluorescencyjne na ich wybrane parametry eksploatacyjne, Wydawnictwo Politechniki Świętokrzyskiej, Kielce, 2004.
10. Różowicz A.: Vmíst garmonik i koeficient potužnosti – parametri jakosti energii v ustavach žiwlenia ljuminescentnych lamp z elektromagnitnymi ta elektronnimi stabilizatorami, Elektroinform 2, Lviv, 2003.
11. Różowicz A.: Tętnienie niskoprężnych lamp wyładowczych zasilanych napięciem przemiennym o różnych częstotliwościach, JiUEE, 2005.
12. Zissis G., Damelincourt J.-J.: Modelling dis charge lamps for electronic circuit designers: a review of the existing methods. In the 29<sup>th</sup> IEEE International Conference on Plasma Sciences (ICOPS2002), Canada, 2002.

Rękopis dostarczono dnia 26.04.2010 r.

**Opiniowała: dr Lucyna Hemka**

## MATHEMATICAL MODEL OF LOW PRESSURE DISCHARGE MERCURY LAMP AT THE DIFFERENT FREQUENCIES

Antoni RÓŻOWICZ, Mariusz DELĄG  
Sebastian RÓŻOWICZ

**ABSTRACT** *Knowledge of voltage-current characteristics and their mathematical model description is needed to correct design of low pressure mercury discharge lamp systems (lamp, stabilizing and ignition system). Mathematical model showed in this paper causes possibility to optimal design of work lamp systems. It is very important in aspect of increasing system energy efficiency. Measurements on group of discharge lamps together with computer simulations are used to preparation of mathematical model. Conformity with measurements data is confirmed by verification of simulation results. It indicate that mathematical model showed in this paper can be used during design of low pressure mercury discharge lamp systems.*



**Dr hab. inż. Antoni RÓŻOWICZ prof. PŚk** – pracuje w Katedrze Urządzeń Elektrycznych i Techniki Świetlnej Politechniki Świętokrzyskiej w Kielcach. Studia wyższe ukończył w 1975 r. na Wydziale Elektrycznym Politechniki Częstochowskiej w Częstochowie. Doktoryzował się w 1987 r. na Wydziale Elektrycznym Politechniki Śląskiej. Jest autorem wielu publikacji i opracowań naukowo-badawczych z zakresu elektroenergetyki i oświetlenia elektrycznego.

**Mgr inż. Mariusz DELĄG** – pracuje w Katedrze Urządzeń Elektrycznych i Techniki Świetlnej Politechniki Świętokrzyskiej w Kielcach. Studia wyższe ukończył w 2001 r. na Wydziale Elektrycznym Politechniki Świętokrzyskiej w Kielcach. Jest autorem publikacji i opracowań naukowo-badawczych z zakresu oświetlenia elektrycznego.



**Mgr inż. Sebastian RÓŻOWICZ** – pracuje w Katedrze Urządzeń Elektrycznych i Techniki Świetlnej Politechniki Świętokrzyskiej w Kielcach. Studia wyższe ukończył w 2002 r. na Wydziale Elektrycznym Politechniki Świętokrzyskiej w Kielcach. Jest autorem publikacji i opracowań naukowo-badawczych z zakresu oświetlenia elektrycznego i techniki motoryzacyjnej.

