

Aleksander Patyk, Ludwik Ogiński
Akademia Techniczno-Humanistyczna, Bielsko-Biała

BADANIA SYMULACYJNE UKŁADU NAPĘDOWEGO Z SILNIKIEM SZEREGOWYM PRĄDU STAŁEGO W OPARCIU O MODEL UWZGLĘDNIAJĄCY CHARAKTERYSTYKĘ MAGNESOWANIA

SIMULATION RESEARCH OF A DC SERIES MOTOR DRIVE BASE ON A MODEL, WHICH TAKES INTO ACCOUNT A MAGNETIZATION CURVE

Abstract: Assumptions and final structure of series motor equations were presented. In the description, a magnetization curve, which significantly affects properties of the motor, was taken into account. Nonlinearly connected with magnetization curve is present in a induction voltage drop and in a rotation voltage, as well. Quantitative examinations were performed for a series motor PBSOa12x type. A share of current dependent induction voltage drop components was examined. It was assumed that additional, so-called “negative inductance”, which is a product of a current and partial, current derivative of inductance, can be omitted. This conclusion can be regarded as general. It refers to a typical motor taking into account construction and magnetic materials. So-called incremental equations of a motor were formulated, which describe its behaviour in a small deviation from an equilibrium point. Using a precise model, a simulation of a motor start fed from a DC controlled rectifier was performed. The simulated system was a closed one with a current limitation. The feeding voltage was an input signal.

1. Wstęp

Silniki szeregowo mają szereg zalet, do których należy duży moment rozruchowy, z tych powodów są w dalszym ciągu stosowane jako napęd w trakcji szynowej.

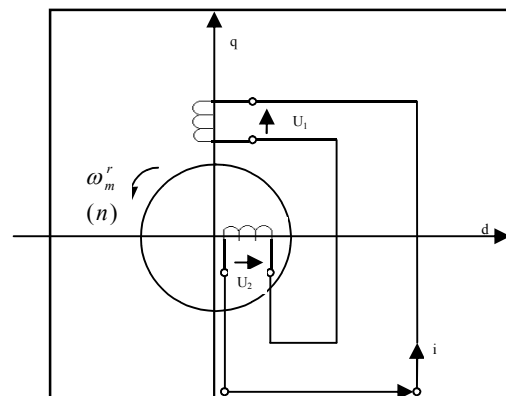
Analiza układów napędowych z tym silnikiem jest dość złożona. Przyczyną są nieliniowości parametryczne oraz tzw. nieliniowości strukturalne. Kierunki analizy idą dwutorowo. Formuluje się możliwie dokładny model dynamiczny. Model taki znajduje zastosowanie przy sprawdzaniu pracy całego układu sterowania, w którym silnik jest jednym z jego elementów.

Drugi kierunek to tworzenie tzw. równań przyrostowych, które prowadzą do linearyzacji równań i umożliwiają stosowanie przekształcenia całkowitego Laplace’a. Dzięki otrzymanym transmitancjom można dokładnie określić relacje dynamiczne między wybranymi wielkościami przy małych odchyleniach od punktu równowagi. Pozwala to docelowo wybrać stosowny układ regulacji automatycznej.

2. Równania silnika szeregowego

Na rysunku 1 przedstawiono układ osi uzwojeń silnika. Uwzględnienie w opisie uzwojeń komutacyjnego i kompensującego, które mają silniki większej mocy, nie zmienia istoty rów-

nań, które będą sformułowane dla schematu z rysunku 1.



Rys. 1. Schemat silnika szeregowego

Strumień skojarzony uzwojenia (brak sprzężeń z innymi uzwojeniami) można przedstawić

$$\psi = li = (l_{\sigma} + l_{\delta})i \quad (1)$$

Indukcyjność rozproszenia l_{σ} reprezentuje pole, którego linie w dużej mierze biegają w powietrzu i opór magnetyczny magnetowodu jest oporem magnetycznym powietrza. Nie popełniając istotnego błędu można przyjmować, że $l_{\sigma} = \text{const}$. Indukcyjność główną l_{δ} reprezentuje strumień w części zdominowanej przez ferromagnetyk. Indukcyjność ta podlega zmianom

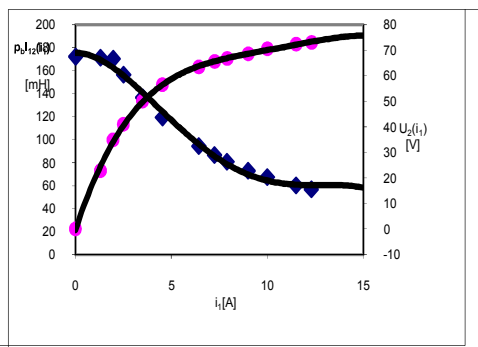
spowodowanym nasyceniem, jest więc funkcją prądu wzbudzenia.

Szczególnym przypadkiem uzwojenia jest uzwojenie komutatorowe – uzwojenie wirnika. Z uwagi na konstrukcję stojana (bieguny wydane) i przesunięcie wirnika względem osi obwodu wzbudzania o $\pi/2$ można uważać, że brak jest pola reprezentowanego przez $l_{2\delta}$. Indukcyjność wirnika jest praktycznie równa indukcyjności rozproszenia tzn. $l_2 = l_{2\sigma}$ i jest stała.

Pole magnetyczne obwodu wzbudzenia, które wywołuje napięcie rotacji modeluje się posługując schematem tzw. czterouzwojeniowej maszyny uogólnionej typu d-q [3, 4]. Jeśli ze schematu tego usunie się poprzeczne uzwojenie wirnika, to strumień „odpowiedzialny” za napięcie rotacji będzie wynosił:

$$p_b \psi_q = p_b l_{12}(i) i \quad (2)$$

Przykładowe przebiegi charakterystyki magnesowania i parametru $p_b l_{12}(i)$ przedstawiono na rysunku 2. Przebiegi te dotyczą silnika szeregowego typu PBSOa12x. Pomiar został wykonany po uprzednim rozłączeniu uzwojeń wzbudzenia i wirnika. Podczas pomiaru silnik napędzany ze stałą prędkością równą $n = 1000$ obr/min, uzwojenie wzbudzenia było zasilane regulowanym napięciem.



Rys. 2. Charakterystyka magnesowania $U_2(i_1)$ oraz przebieg $p_b l_{12}(i_1)$ w funkcji wzbudzenia dla silnika PBSOa12x

Dane znamionowe silnika modelowego PBSOa12x, są następujące:

napięcie - $U_N = 110$ V,

prąd - $I_N = 8,84$ A,

moc - $P_N = 0,7$ kW,

prędkość - $n_N = 1500$ obr/min.

Równanie napięć silnika szeregowego odpowiadające układowi osi z rysunku 1 ma postać:

$$U = \left(r_1 i + \frac{d}{dt} \psi_1 \right) + \left(r_2 i + \frac{d}{dt} \psi_2 + \omega_m^r p_b l_{12}(i) i \right) \quad (3)$$

gdzie:

$$\psi_1 = l_{1\sigma} i + l_{1\delta}(i) i \quad (3a)$$

$$\psi_2 \cong l_{1\sigma} i \quad (3b)$$

$r_1(r_2)$ – rezystancja obwodu wzbudzenia.

Moment elektromagnetyczny opisuje równanie:

$$M = p_b l_{12}(i) i \quad (4)$$

natomiast równanie ruchu ma postać:

$$M - M_0 = J \frac{d\omega_m^r}{dt} \quad (5)$$

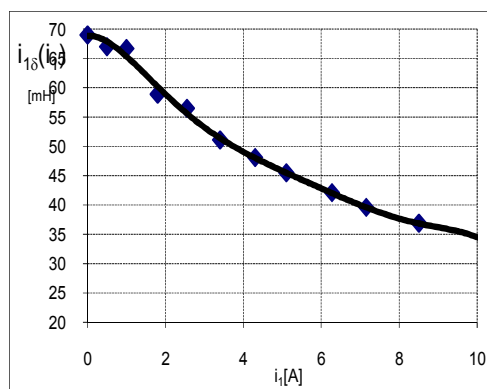
M_0 – moment obciążenia,

J – wypadkowy moment bezwładności sprowadzony na wał silnika.

Uwzględniając (3a), SEM samoindukcji uzwojenia wzbudzenia wynosi:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \psi_1 &= l_{1\sigma} \frac{di}{dt} + \frac{d}{dt} (l_{1\delta}(i) i) = \\ &= l_{1\sigma} \frac{di}{dt} + \frac{\partial l_{1\delta}(i)}{\partial i} \frac{di}{dt} i + l_{1\delta}(i) \frac{di}{dt} = \\ &= \left(l_{1\sigma} + \frac{\partial l_{1\delta}(i)}{\partial i} i + l_{1\delta}(i) \right) \frac{di}{dt} \end{aligned} \quad (6)$$

Indukcyjność $l_{1\delta}(i)$ ze wzrostem prądu maleje, stąd $\partial l_{1\delta}/\partial i$ ma wartość ujemną. Ostatecznie indukcyjność statyczna $l_{1\delta}(i)$ zostaje pomniejszona o czynnik zależny pośrednio i bezpośrednio od prądu tj. $\partial l_{1\delta}/\partial i i$ – tzw. indukcyjność ujemna. Na rysunku 3 przedstawiono indukcyjność główną obwodu wzbudzenia w funkcji prądu.



Rys. 3. Indukcyjność główna uzwojenia wzbudzenia silnika PBSOa12x

W pracy [5] przeprowadzono analizę składnika $(\partial l_{1\delta}(i)/\partial(i))i$ w funkcji prądu. Z analizy wynika, że np. przy prądzie $i = i_N$ – silnika PBSOa12x wynosi on około 0,054 indukcyjności statycznej $l_{1\delta}(i)$. Czynniki te, nie popełniając większego błędu, można pominąć. Sprowadzając całkowitą indukcyjność w stanach dynamicznych do sumy indukcyjności rozproszenia $l_{1\sigma}$ oraz indukcyjności statycznej $l_{1\delta}(i)$.

Ostatecznie równania opisujące silnik szeregowy w stanie przejściowym są następujące:

- równanie napięć

$$U = (r_1 + r_2)i + (l_2 + l_{1\sigma} + l_{1\delta}(i))\frac{di}{dt} + \omega_m^r p_b l_{12}(i)i = r_z i + l_z(i)\frac{di}{dt} + \omega_m^r p_b l_{12}(i)i \quad (7)$$

gdzie

$$r_z = r_1 + r_2 \quad l_z(i) = l_2 + l_{1\sigma} + l_{1\delta}(i)$$

- równanie ruchu

$$p_b l_{12}(i)i^2 - M_0 = J \frac{d\omega_m^r}{dt} \quad (8)$$

Dla celów modelowania (forma narzucona całkowaniem numerycznym) równania (7) i (8) doprowadza się do tzw. postaci kanonicznej:

$$\frac{d}{dt}i = \frac{1}{l_z(i)}(U - r_z i - \omega_m^r p_b l_{12}(i)i) \quad (9a)$$

$$\frac{d}{dt}\omega_m^r = \frac{1}{J}(p_b l_{12}(i)i^2 - M_0)$$

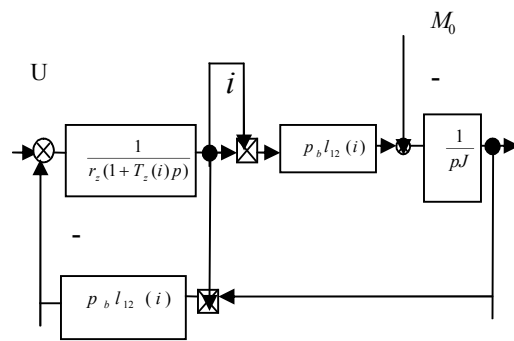
Silnik opisany układem równań (7) i (8) można przedstawić w postaci schematu blokowego. Wprowadza się w tym celu oznaczenie $d/dt = p$ (formalnie po wprowadzeniu operatora p następuje algebraizacja równań różniczkowych) otrzymując:

$$i = (U - \omega_m^r p_b l_{12}(i)i) \frac{1}{r_z(1 + T_z(i)p)} \quad (9b)$$

$$\omega_m^r = \frac{1}{pJ}(p_b l_{12}(i)i^2 - M_0)$$

gdzie $T_z(i) = l_z(i)/r_z$.

Schemat blokowy odpowiadający równaniom (9b) przedstawiono na rysunku 4. W bloku, który przedstawia impedancję operatorową wirnika ważne jest umieszczenie operatora p . Występuje on ze zmienną stałą czasową $T_z(i)$.



Rys. 4. Schemat blokowy silnika szeregowego z uwzględnieniem nieliniowości obwodu magnetycznego

3. Równania przyrostowe silnika szeregowego

Równania przyrostowe opisują zachowanie się przetwornika przy małych odchyleniach od punktu równowagi. Formalnie są to pierwsze wyrazy (pochodne pierwszego rzędu) rozwinięcia funkcji wielu zmiennych w szereg Taylora. Równania te są zawsze równaniami różniczkowymi liniowymi i mogą być poddane przekształceniu całkowemu Laplace'a.

Wprowadza się oznaczenia zmiennych stanu do równań (7) i (8) w postaci: $\psi_{1\delta} = l_{1\delta}(i)i$ oraz $\psi_q = p_b l_{12}(i)i$. W funkcji tych zmiennych równania (7) i (8) mają postać:

- równanie napięć

$$U = r_z i + (l_2 + l_{1\sigma})\frac{di}{dt} + \frac{d}{dt}\psi_{1\delta} + \omega_m^r \psi_q \quad (10)$$

- równanie ruchu

$$\psi_q i - M_0 = J \frac{d\omega_m^r}{dt} \quad (11)$$

Oznacza się współrzędne punktu równowagi:

$$U_0, i_0, \psi_{1\delta 0} = \psi_{1\delta}(i_0), \psi_{q0} = \psi_q(i_0), \omega_{m0}^r = \omega_m^r(U_0, i_0).$$

Oznacza się wielkości przyrostowe: $\Delta U(t)$, $\Delta i(t)$, $\Delta \psi_{1\delta}(t)$, $\Delta \psi_q(t)$, $\Delta \omega_m^r(t)$, $\Delta M_0(t)$ (zmiana momentu obciążenia).

Napięcie rotacji $E = \omega_m^r \psi_q$, podobnie jak moment elektromagnetyczny $M = \psi_q i$, są funkcją dwu zmiennych. Obie wielkości jako formy przyrostowe będą wynosiły:

$$\Delta E = \left. \frac{\partial E}{\partial \psi_q} \right|_0 \Delta \psi_q + \left. \frac{\partial E}{\partial \omega_m^r} \right|_0 \Delta \omega_m^r = \omega_{m0}^r \Delta \psi_q + \psi_{q0} \Delta \omega_m^r \quad (12)$$

$$= \omega_{m0}^r \Delta \psi_q + \psi_{q0} \Delta \omega_m^r$$

$$\Delta M = \left. \frac{\partial M}{\partial \psi_q} \right|_0 \Delta \psi_q + \left. \frac{\partial M}{\partial i} \right|_0 \Delta i =$$

$$= i_0 \Delta \psi_q + \psi_{q0} \Delta i$$

Uwzględniając przyjęte oznaczenia wielkości przyrostowych oraz równania (12) i (13), równania przyrostowe będą następujące:

- równanie napięć

$$\Delta U = r_z \Delta i + (l_2 + l_{1\sigma}) \frac{d}{dt} \Delta i + \frac{d}{dt} \Delta \psi_{1\delta} +$$

$$+ \psi_{q0} \Delta \omega_m^r + \omega_{m0}^r \Delta \psi_q$$

- równanie ruchu

$$i_0 \Delta \psi_q + \psi_{q0} \Delta i - \Delta M_0 = J \frac{d}{dt} \Delta \omega_m^r$$

Jeśli wprowadzić pojęcie indukcyjności statycznej i dynamicznej, jedną i drugą w rozpatrywanym punkcie równowagi można określić następująco:

- statyczną

$$l_0 = \psi_0 / i_0$$

- dynamiczną

$$l'_0 = \Delta \psi / \Delta i$$

Stąd przyrosty:

$$\Delta \psi_{1\delta} = l'_{1\delta} (i_0) \Delta i, \quad \Delta \psi_q = l'_{12} (i_0) \Delta i$$

Równania przyrostowe otrzymują więc ostateczną postać:

- równanie napięć

$$\Delta U = \left((r_z + \omega_{m0}^r l'_{12} (i_0)) + \right.$$

$$\left. + (l_2 + l_{1\sigma} + l_{1\delta} (i_0)) \frac{d}{dt} \Delta i + \psi_{q0} \Delta \omega_m^r = \right. \quad (16)$$

$$\left. = \left(r_{z0} + l_{z0} \frac{d}{dt} \right) \Delta i + \psi_{q0} \Delta \omega_m^r$$

gdzie

$$r_{z0} = r_z + \omega_{m0}^r l'_{12} (i_0), \quad l_{z0} = l_2 + l_{1\sigma} + l'_{1\delta} (i_0)$$

- równanie ruchu

$$(i_0 l'_{12} (i_0) + \psi_{q0}) \Delta i - \Delta M_0 =$$

$$= \psi_{q0z} \Delta i - \Delta M_0 = J \frac{d}{dt} \Delta \omega_m^r \quad (17)$$

gdzie

$$\psi_{q0z} = i_0 l'_{12} (i_0) + \psi_{q0}$$

4. Równania przyrostowe po przekształceniu całkowym Laplace'a - schemat blokowy silnika

Zdefiniowane wcześniej zmienne w funkcji operatora Laplace'a są następujące:

$$\Delta i(s), \Delta \omega_m^r(s), \Delta M_0(s), \Delta U(s).$$

Prąd i prędkość wyliczone z transformowanych równań (16) i (17) wynoszą:

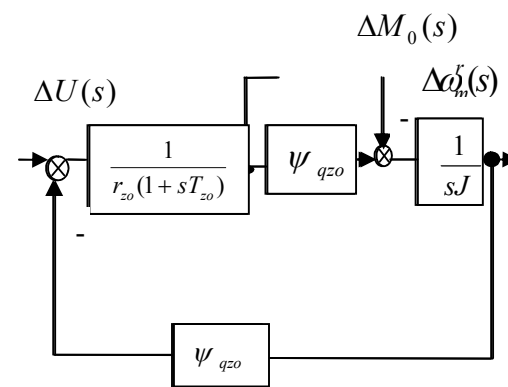
$$\Delta i(s) = \left(\Delta U(s) - \Delta \omega_m^r(s) \psi_{q0} \right) \frac{1}{r_{z0} (1 + sT_{z0})} \quad (18)$$

gdzie

$$T_{z0} = \frac{l_{z0}}{r_{z0}} \quad (19a)$$

$$\Delta \omega_m^r(s) = \frac{1}{sJ} \left(\psi_{qz0} \Delta i(s) - \Delta M_0(s) \right) \quad (19b)$$

Schemat blokowy silnika szeregowego będący graficznym przedstawieniem równań (18) i (19) przedstawiono na rysunku 5.



Rys. 5. Schemat blokowy silnika szeregowego dla małych odchyłeń od stanu równowagi

W oparciu o schemat z rysunku 5 można wyznaczyć interesujące zależności między sygnałem wyjściowym, jak prąd czy prędkość, a sygnałem wejściowym w postaci napięcia czy momentu obciążenia (zakłócenie), podobnie jak w [1].

5. Przykładowe wyniki badań układu napędowego z silnikiem szeregowym z wykorzystaniem dokładnego modelu

Posługując się dokładnym modelem przeprowadzono symulację rozruchu silnika w układzie zamkniętym. Schemat układu regulacji automatycznej przedstawiono na rysunku 6.

Jest to układ, w którym silnik zasilany jest ze sterowanego prostownika – blok B4. Blok B3

to regulator prądu typu PI z ograniczeniem. Regulator jest wspólny dla sygnału prądowego – sygnał U_i i sygnału napięciowego – sygnał U_u . Takie rozwiązanie, tj. wspólny regulator stosowane jest w automatyce napędu elektrycznego na równi z układami szeregowymi czy równoległymi [2, 6]. Wspólny regulator działa w trybie „albo albo”, tzn. gdy $U_i > U_u$ to $U_{WE} = U_{zu} - U_i$, gdy $U_u > U_i$ to $U_{WE} = U_{zu} - U_u$. Bloki pozostałe to: B6 – czujnik prądu, B5 – czujnik napięcia. Bloki B1, B2 przedstawiają silnik.

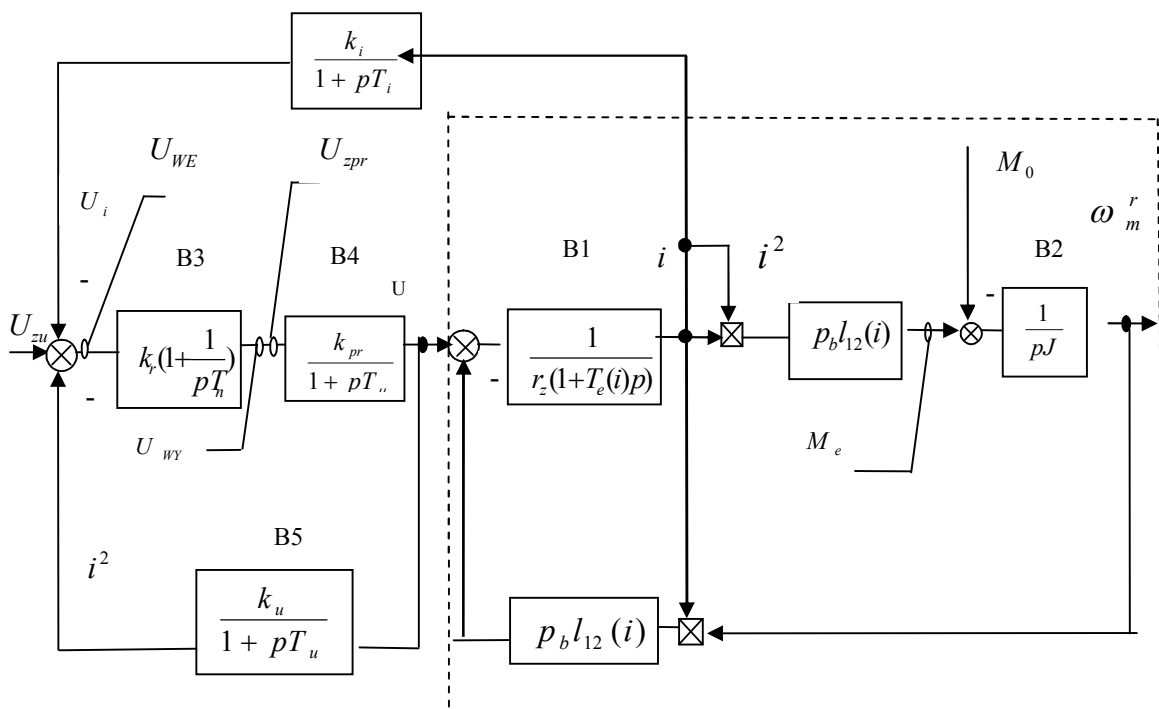
Występujące na schemacie z rysunku 6 parametry i zmienne reprezentują:

- U_{zu} – sygnał napięciowy napięcia zasilającego silnik;
- U_i – sygnał napięciowy prądu;
- U_u – sygnał napięciowy napięcia wyjściowego prostownika;

- $T_{i(u)}$ – stała czasowa toru pomiaru prądu (napięcia);
- $k_{i(u)}$ – współczynnik wzmocnienia toru pomiarowego prądu (napięcia);
- k_{pr} – współczynnik wzmocnienia toru sterująco-wyzwalającego prostownik;
- T_μ – stała czasowa prostownika;
- $U_{WE} (U_{WY})$ – sygnały wejścia/wyjścia regulatora;
- $U_{zpr} (U)$ – sygnały wejścia/wyjścia prostownika sterowanego.

Transmitancja toru otwartego prądu (bez regulatora) to bloki: B4-B1-B6 (odcięte jest napięcie rotacji i wyjście B6). Transmitancja ta jest typu:

$$G_0(p) = \frac{k}{(1 + pT)(1 + pT_\Sigma)} \quad (20)$$



Rys. 6. Schemat blokowy układu sterowania silnikiem szeregowym prądu stałego

Dla tego typu transmitancji, stosując uproszczone kryterium modułu i przyjmując regulator typu PI, otrzymano:

- czas zdwojenia

$$T_n = T_{esr} = 23 \cdot 10^{-3}$$

- współczynnik wzmocnienia

$$k_r = (T_n r_z) / (2T_\Sigma k_i k_{pr}) = 0,96$$

gdzie:

$$T_\Sigma = T_\mu + T_i = 4 \cdot 10^{-3}, k_i = 10/1,3, i_n = 10/11,5,$$

$$k_{pr} = 1,1 U_n / 10 = 120/10, r_z = 3,5 \Omega.$$

Działanie poszczególnych bloków schematu z rysunku 6 można opisać następującymi równaniami (postać kanoniczna).

SILNIK

Blok B1 – równanie prądu

$$\frac{d}{dt} i = \left(U - p_b l_{12}(i) i \omega_m^r - r_z i \right) \frac{1}{r_z T_e(i)} \quad (21)$$

Blok B2 – równanie prędkości

$$\frac{d}{dt} \omega_m^r = \left(p_b l_{12} (i)^2 - M_0 \operatorname{sgn} \omega_m^r \right) \frac{1}{J} \quad (22)$$

STEROWANIE

Blok B3 – regulator PI

$$U_{WE} = \begin{cases} U_{ZU} - U_i & \text{jeżeli } U_i > U_u \\ U_{ZU} - U_u & \text{jeżeli } U_u > U_i \end{cases} \quad (23a)$$

$$\frac{d}{dt} (U_{WY} - k_r U_{WE}) = \frac{k_r}{T_n} U_{WE} \quad (23b)$$

$$U_{zpr} = \begin{cases} U_{WY} & \text{jeżeli } U_{WY} < 10 \\ 10 & \text{jeżeli } U_{WY} > 10 \end{cases} \quad (23c)$$

Blok B4 – prostownik sterowany

$$\frac{d}{dt} U = \left(k_{pr} U_{zpr} - U \right) \frac{1}{T_\mu} \quad (24)$$

CZUJNIKI

Blok B5 – pomiar napięcia zasilającego silnik

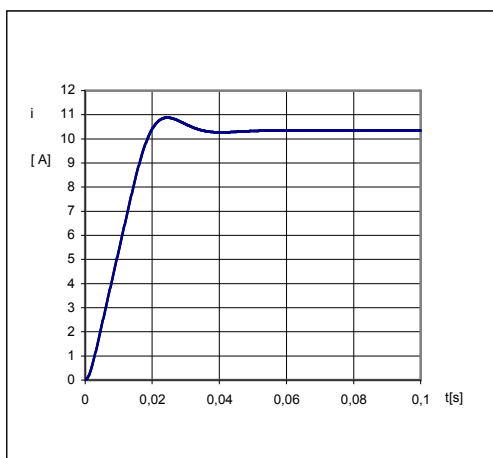
$$\frac{d}{dt} U_U = \left(k_U U - U_U \right) \frac{1}{T_U} \quad (25)$$

Blok B6 – pomiar prądu

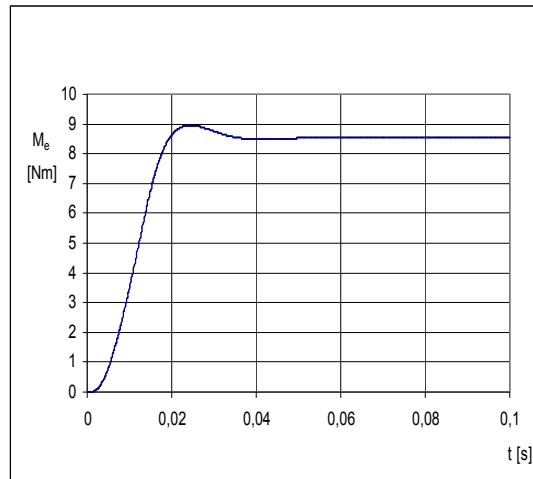
$$\frac{d}{dt} U_i = \left(k_i i - U_i \right) \frac{1}{T_i} \quad (26)$$

Wyniki symulacji tj. przebiegi prądu, momentu elektromagnetycznego i prędkości przedstawiono na rysunkach 7a, 7b, 7c (początkowa faza rozruchu), oraz na rysunkach 8a, 8b, 8c (całość do stanu ustalonego).

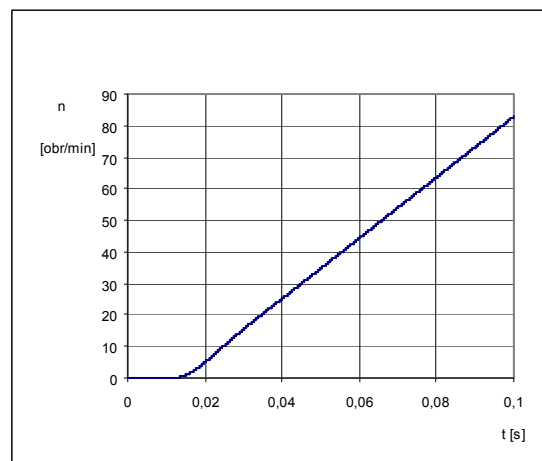
Ograniczenie prądowe, które działa podczas rozruchu daje stałą wartość prądu i tym samym stały moment. Wynikiem jest liniowy przebieg prędkości obrotowej.



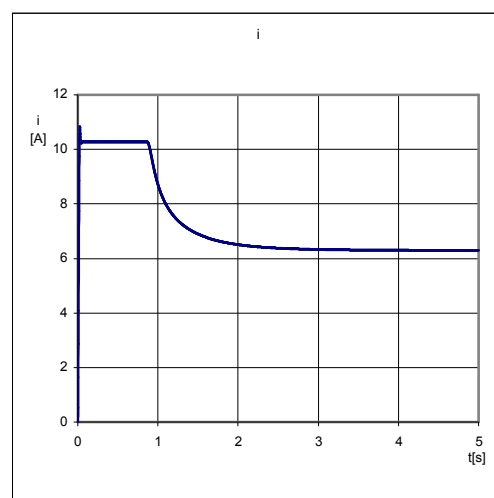
Rys. 7a. Prąd zasilający silnik w początkowej fazie rozruchu



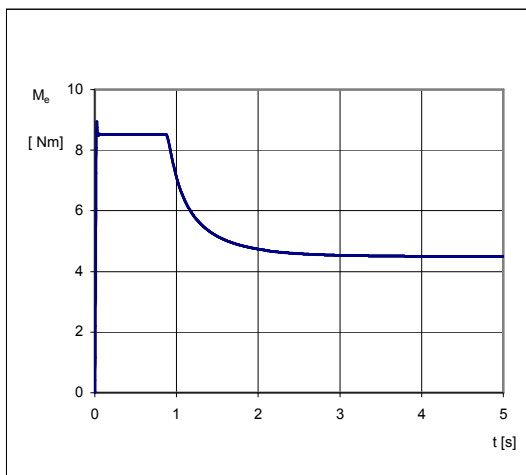
Rys. 7b. Moment elektromagnetyczny w początkowej fazie rozruchu



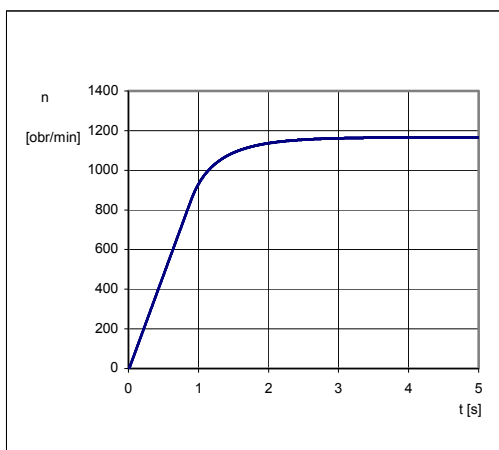
Rys. 7c. Prędkość obrotowa w początkowej fazie rozruchu



Rys. 8a. Prąd zasilający do stanu ustalonego



Rys. 8b. Moment elektromagnetyczny do stanu ustalonego



Rys. 8c. Prędkość obrotowa do stanu ustalonego

6. Podsumowanie

Pominięcie składnika $\partial/\partial i$ w zakresie do założonej krotności prądu znamionowego nie wprowadza znaczących błędów do wartości funkcji $d/dt(l(i) \cdot i)$. Dzięki temu pochodna $d/dt(l(i) \cdot i)$ zostaje sprowadzona do czynnika $l(i) di/dt$.

Otrzymane wnioski zostały wyprowadzone dla jednego z typowych silników i można sądzić, że są ogólne.

Przy formułowaniu równań przyrostowych opisujących zachowanie się silnika przy małych odchyleniach od punktu równowagi istotnym jest właściwy wybór zmiennych. Oprócz takich wielkości jak prąd, prędkość, celowe jest wprowadzenie strumienia skojarzonego. Małe zmiany strumienia można wtedy przedstawić jako iloczyn małych zmian prądu i indukcyjności dynamicznej.

7. Literatura

- [1] Bisztyga K.: *Sterowanie i regulacja silników elektrycznych*, WNT, Warszawa 1995
- [2] Kalus M., Skoczkowski T.: *Sterowanie napędami asynchronicznymi i prądu stałego*. Wyd. Prac. Komp. Skalmierskiego J., Gliwice, 2003
- [3] Meisel J.: *Principles of electromechanical energy conversion*; copyright by Mc Graw-Hill Inc., 1976
- [4] Patyk A., Ogiński L.: *Application of the elementary layer's method in simulation transients in a single-phase motor*. Acta Techn. CSAV 47, 2002
- [5] Patyk A., Ogiński L.: *A DC series motor with magnetization curve taken into account – application of a model*. Archives of Electrical Engineering, Vol LVII, No. 2, 2008
- [6] Tunia H., Kaźmierkowski M.: *Automatyka napędu elektrycznego*. PWN Warsaw, 1987
- [7] Wrona W.: *Matematyka, cz. II*. PWN 1977

Autor

Dr inż. Aleksander Patyk
 e-mail: apatyk@ath.bielsko.pl
 Akademia Humanistyczno-Techniczna
 Katedra Elektrotechniki i Automatyki
 ul. Willowa 2, 43-300 Bielsko-Biała