

Arkadiusz Gardecki, Krystyna Macek-Kamińska
Politechnika Opolska, Opole

ZASTOSOWANIE WIELOKROKOWEJ PROCEDURY NUMERYCZNEGO CAŁKOWANIA W OBSERWATORZE PRĘDKOŚCI KĄTOWEJ SILNIKA INDUKCYJNEGO

MULTISTEP INTEGRATION ROUTINE APPLY IN ANGULAR SPEED OBSERVER OF INDUCTION MOTOR

Abstract: The paper presents multistep integration routine and comparison of selected numerical integration methods on example of angular speed observer computations. The multistep BGKODE_DSP routine use predictor-corrector (PECE) method. This routine is based on BGKODE routine, which forms a practical application of the Krogh's algorithm. Multistep methods of computing ordinary differential equations apply information from the preceding steps. In order to compare numerical integration methods, two steering quality indicators has been proposed. Researches has been carried out on drive system with induction motor using DTC method. The simulations and experiments involving selected numerical integration methods clearly indicate the need for an aid in the selection of the routine for real time process operations. The popular and commonly applied methods, including Euler or second-order Runge-Kutta method, in many cases ensure the required stability and accuracy. The proposed BGKODE_DSP routine, based on multistep method, has a wide area of potential application. This routine adds to the popular numerical integration methods.

1. Wstęp

W układach sterowania napędów przekształtnikowych wykorzystywane są układy do bezczujnikowego odtwarzania prędkości kątowej na podstawie łatwomierzalnych wielkości np. prądów, napięcia w układzie pośredniczącym przekształtnika itp. W tym celu tworzone są różne algorytmy, w których wykorzystuje się układy równań różniczkowych [7, 8]. Do rozwiązywania układów równań różniczkowych obecnie najczęściej używane w tego rodzaju obliczeniach procedury realizują algorytm Eulera oraz Rungego-Kutty drugiego rzędu (R-K II). Metody te zaliczane są do metod jednokrokowych [6], to znaczy wykorzystują one do wyznaczenia rozwiązania w kroku t_{n+1} jedynie informacje z kroku t_n . Cenną zaletą metody Rungego-Kutty oraz metody Eulera, oprócz prostoty, jest to, iż są one, w przeciwieństwie do większości metod wielokrokowych, metodami samostartującymi. Oznacza to, że nie wymagają wcześniejszego obliczania punktów startowych.

W artykule przedstawiono zastosowanie procedury numerycznego całkowania układów równań różniczkowych zwyczajnych BGKODE_DSP do obliczeń w układach czasu rzeczywistego na przykładzie obserwatora prędkości kątowej. Procedura BGKODE_DSP realizuje metodę wielokrokową [1, 5, 6] wyko-

rzystującą do wyznaczenia rozwiązania w kroku t_{n+1} informacje z kilku poprzednich kroków, w zależności od wybranego rzędu aproksymacji. Procedury tego typu wymagają w pierwszym kroku całkowania obliczenia wartości startowych.

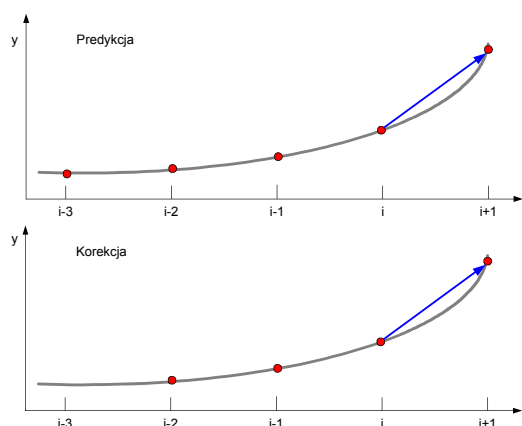
2. Wielokrokowa procedura całkowania numerycznego

Algorytm Krogha [5] wywodzi się z metod ogólnie nazywanych metodami Adamsa. Są to metody wielokrokowe, wykorzystujące do obliczenia wartości aktualnej rozwiązania, informacje z poprzednich kroków. Wielokrokowe wzory numerycznego rozwiązywania równań różniczkowych przyjmują ogólnie następującą postać:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + \dots + a_p y_{n-p} + \\ &+ h[b_{-1} f(t_{n+1}, y_{n+1}) + b_0 f(t_n, y_n) + \dots \\ &\dots + b_p f(t_{n-p}, y_{n-p})] = \\ &= \sum_{i=0}^p a_i y_{n-i} + h \sum_{i=-1}^p b_i f(t_{n-i}, y_{n-i}) \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie współczynniki a i b są znanymi liczbami. Algorytm Krogha wykorzystuje metodę predyktor-korektor typu PECE [5, 6]. Predyktorem jest zmodyfikowana metoda Adamsa-Bashfortha, natomiast korektorem jest zmodyfiko-

wana metoda Adamsa-Moultona. Cechą charakterystyczną algorytmu Krogha jest efektywne przechowywanie i wykorzystywanie informacji z poprzednich kroków całkowania. Informacje potrzebne do tego procesu przechowywane są w wektorze zmodyfikowanych różnic dzielonych Φ . Szczegółowy opis algorytmu Krogha zwarty jest w pracach [1, 5, 6].



Rys. 1. Sposób obliczeń w metodzie typu predyktor-korektor dla obliczeń realizowanych z użyciem metod czwartego rzędu ($k = 4$)

Procedura BGKODE_DSP wywodzi się z pełnego zespołu procedur BGKODE realizującego zmodyfikowany algorytm Krogha [1] i została specjalnie przystosowana do zastosowań w układach czasu rzeczywistego [2, 3, 4]. W obliczeniach realizowanych w układach sterowania napędów elektrycznych cykl pracy układu sterowania ma zwykle stałą długość. Użycie w procedurze stałego kroku całkowania spowodowało oczywiście znaczne uproszczenie algorytmu. Brak efektywnej możliwości powtórki kroku w tego typu zastosowaniach, spowodował także rezygnację z czasochłonnego procesu określania błędu po etapie predykcji i korekcji, będącego jedną z charakterystycznych cech algorytmu Krogha. Rząd aproksymacji metody został ustalony na podstawie badań symulacyjnych w taki sposób, aby zagwarantować kompromis pomiędzy dokładnością rozwiązania a czasem obliczeń. Z tego powodu także zrezygnowano z możliwości oddzielnego doboru rzędu aproksymacji k dla każdego rozwiązywanego równania oddzielnie, jak to ma miejsce w przypadku procedury BGKODE. Po takich uproszczeniach algorytm procedury BGKODE_DSP przyjmuje następującą postać:

$$P: \mathbf{p}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h \sum_{i=1}^k g_i \Phi_i(n)$$

$$\Phi_{k+1}^e(n+1) = 0$$

$$\Phi_i^e(n+1) = \Phi_{i+1}^e(n+1) + \Phi_i(n), \quad i = k, \dots, 1$$

$$E: \mathbf{f}_{n+1}^P = \mathbf{f}(t_{n+1}, \mathbf{p}_{n+1})$$

$$C: \mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{p}_{n+1} + h g_{k+1} (\mathbf{f}_{n+1}^P - \Phi_1^e(n+1))$$

$$E: \mathbf{f}_{n+1} = \mathbf{f}(t_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1})$$

$$\Phi_{k+1}(n+1) = \mathbf{f}_{n+1} - \Phi_1^e(n+1)$$

$$\Phi_i(n+1) = \Phi_{i+1}^e(n+1) + \Phi_{k+1}(n+1), \quad i = k, \dots, 1 \quad (2)$$

gdzie: P - oznacza predykcję, C - oznacza korekcję, a E - oznacza obliczenie prawej strony układu równań różniczkowych. $\Phi_i(n+1)$ jest zmodyfikowaną różnicą dzieloną [5].

3. Obserwator prędkości kątovej wirnika

Badania symulacyjne i eksperymentalne przeprowadzono na przykładzie obserwatora prędkości kątovej wirnika, który odtwarza składowe wektora strumienia wirnika i wektora prądu stojana. Układ sześciu równań różniczkowych obserwatora prędkości został wyprowadzony bazując na części elektromagnetycznej modelu maszyny w nieruchomym układzie współrzędnych (α - β). Szczegółowy opis tego obserwatora znajduje się w pracy [7].

4. Testy wybranych procedur na przykładzie badań układu napędowego sterowanego metodą DTC

Do celów oceny porównywanych metod numerycznego rozwiązywania równań różniczkowych zaproponowano dwa wskaźniki jakości sterowania. Wyliczane są one dla fragmentu stanu ustalonego pracy układu napędowego. Zaproponowane wskaźniki jakości działania układu sterowania przyjmują następującą postać:

- miara zmienności momentu

$$m_{rip} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (m_{ei} - \bar{m}_e)^2}{N-1}}, \quad \bar{m}_e = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N m_{ei}, \quad (3)$$

- miara zmienności prędkości odtwarzanej w obserwatorze

$$\omega_{rip} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\hat{\omega}_{ri} - \bar{\hat{\omega}}_r)^2}{N-1}}, \quad \bar{\hat{\omega}}_r = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{\omega}_{ri}. \quad (4)$$

Procedurę BGKODE_DSP porównano z procedurami Eulera i Rungego-Kutty II rzędu w procesie rozwiązywania układu równań różniczkowych obserwatora prędkości kątowej. W przypadku procedury BGKODE_DSP istnieje dodatkowa możliwość określenia rzędu k metody całkowania. Można zmieniać ten parametr w zależności od charakteru zadania w celu znalezienia najlepszej pod wybranym względem cechy rozwiązania. Badania symulacyjne [3] wskazują, że rząd $k = 2$ jest w wielu przypadkach najlepszym kompromisem pomiędzy dokładnością obliczeń, a czasem ich trwania. W prezentowanych badaniach przedstawiono wyniki dla czterech wartości $k = 1, 2, 3$ i 4 .

Poniższe wyniki badań eksperymentalnych dotyczą fragmentu stanu ustalonego pracy układu napędowego sterowanego metodą DTC [2]. Badany okres to 2 sekundy (100 000 próbek), układ napędowy pracował z zadaną w wielkościach względnych prędkością $\omega_{zad} = 0,3$, przy częstotliwości pracy układu sterowania $f_{ster} = 10$ kHz. Moment obciążenia wyrażony w jednostkach względnych $m_{obc} = 0,25$.

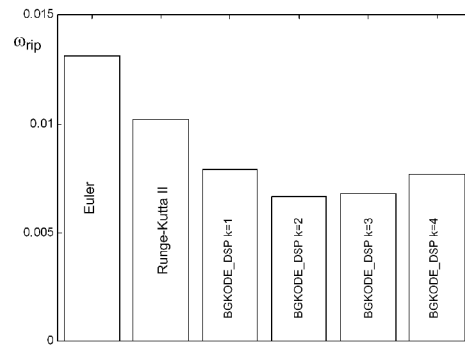
Tabela 1. Zestawienie miar jakości sterowania

Miara zmienności	Euler	R-K II
ω_{rip}	0,0131	0,0102
m_{rip}	0,0671	0,0561

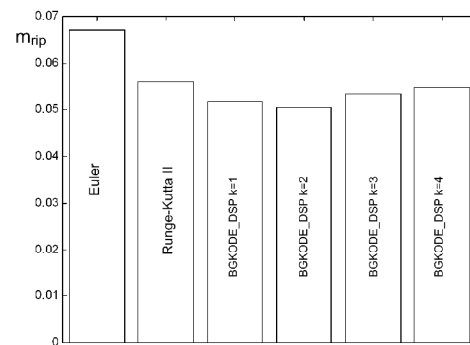
Tabela 2. Zestawienie miar jakości sterowania

Miara zmienności	BGKODE_DSP			
	k=1	k=2	k=3	k=4
ω_{rip}	0,0079	0,0067	0,0068	0,0077
m_{rip}	0,0518	0,0506	0,0533	0,0549

W tabelach 1 i 2 oraz na rysunkach 2 i 3 zestawiono miarę zmienności prędkości kątowej ω_{rip} oraz miarę zmienności momentu elektromagnetycznego m_{rip} dla porównywanych procedur numerycznego całkowania, dla przypadku użycia w algorytmie sterowania prędkości kątowej wyliczonej z układu obserwatora.



Rys. 2. Porównanie miary zmienności prędkości kątowej ω_{rip}



Rys. 3. Porównanie miary zmienności momentu elektromagnetycznego m_{rip}

Przyjmując wyniki otrzymane przy użyciu metody Eulera jako wielkości odniesienia, zmniejszenie miary zmienności prędkości kątowej ω_{rip} w przypadku procedury Rungego-Kutty II rzędu wynosi ponad 22%, a w przypadku procedury BGKODE_DSP ($k = 2$) wynosi niemal 49%. Zmniejszenie miary zmienności momentu elektromagnetycznego m_{rip} w przypadku procedury Rungego-Kutty II rzędu wynosi ponad 16%, a w przypadku procedury BGKODE_DSP ($k = 2$) wynosi niemal 25%. Użycie rzędu $k = 2$ w przypadku tych wskaźników daje najlepszy rezultat co potwierdzają wyniki z badań symulacyjnych [3].

Dokonano także pomiaru czasu trwania pojedynczego cyklu obliczeń (Δ) układu równań obserwatora prędkości. Różnica pomiędzy minimalnym a maksymalnym czasem wykonania procedur (Tabela 3) spowodowana jest różnym czasem obliczeń funkcji określającej prawe strony układu równań różniczkowych, występujących w układzie obserwatora prędkości kątowej, w których zawarte są instrukcje decyzyjne. W zależności od aktualnych wartości sygnałów wejściowych układu obserwatora

czas wykonywania tej części programu może się różnić.

W tabeli 3 zestawiono czasy wykonywania obliczeń porównywanych procedur i procedury BGKODE_DSP dla rzędów $k = 1 \div 4$.

Tabela 3. Zastawienie minimalnych i maksymalnych czasów obliczeń badanych procedur

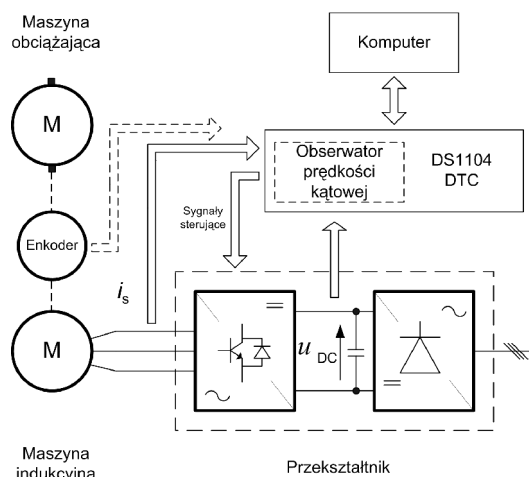
	Euler	R-K II	BGKODE_DSP			
			$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
Δ_{\min} [μs]	2,62	3,60	5,20	5,72	6,10	6,34
Δ_{\max} [μs]	3,08	3,90	5,86	6,50	6,88	7,14

Otrzymane czasy pokrywają się z oczekiwanym wzrostem czasu wykonywania obliczeń w przypadku bardziej złożonych numerycznie procedur. Zarówno procedura Rungego-Kutty II rzędu jak i BGKODE_DSP wymagają w trakcie typowych obliczeń dwukrotnego wywołania funkcji określającej prawe strony układu równań różniczkowych, czyli w praktyce układu obserwatora prędkości kątowej. Bardziej skomplikowany algorytm obliczeń w przypadku procedury BGKODE_DSP, powoduje wzrost maksymalnego czasu wykonywania obliczeń w porównaniu z procedurą Rungego-Kutty II rzędu o niemal 67%.

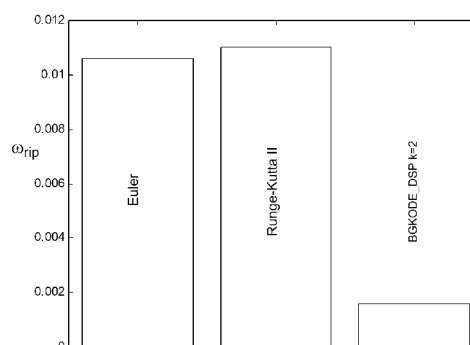
Wzrost numerycznej złożoności układów równań różniczkowych i obliczeń im towarzyszących powoduje, iż udział czasu obliczeń procedury całkującej w całkowitym czasie trwania obliczeń maleje. Maksymalny dopuszczalny czas na wykonanie pojedynczego kroku sterowania podczas pracy badanego układu sterowania DTC z częstotliwością $f_{\text{ster}} = 10 \text{ kHz}$ wynosił $100 \mu\text{s}$. Jeśli czasy wykonywania obliczeń wykonywanych przez procedurę numerycznego całkowania nie są wielkościami krytycznymi dla działania układu sterowania, to zastosowanie dokładniejszej procedury poprawia wyraźnie wybrane wskaźniki jakości sterowania.

W przypadku procedury BGKODE_DSP stosowanie w tego rodzaju układach rzędów aproksymacji $k = 3$ i 4 , wiąże się w badanym obszarze ze wzrostem czasu trwania obliczeń, odpowiednio o około 6,5% i 11%, w porównaniu do rzędu $k = 2$. Zwiększone nakłady obliczeniowe w tym przypadku nie przynoszą poprawy porównywanych wskaźników.

Wykonano także rejestrację prędkości odtwarzanej w obserwatorze prędkości w przypadku pracy układu sterowania z wykorzystaniem pomiaru prędkości silnika z użyciem enkodera (rys. 4). W tym przypadku układ obserwatora śledził prędkość kątową w pracującym układzie sterowania wykorzystującym pomiar prędkości kątowej z enkodera.



Rys. 4. Schemat laboratoryjnego układu badawczego



Rys. 5. Porównanie miary zmienności prędkości kątowej ω_{rip} otrzymanej z układu obserwatora przy pracy układu sterowania z sygnałem prędkości z enkodera

W tym przypadku wyraźnie widoczny jest wpływ na poprawę miary zmienności odtwarzanej prędkości kątowej ω_{rip} podczas użycia w obliczeniach obserwatora prędkości procedury BGKODE_DSP (0,0016). Porównanie uzyskanych wyników wskazuje, iż zachowanie się układu obserwatora prędkości w przypadku procedur Eulera i Rungego-Kutty II rzędu jest bardzo zbliżone (odpowiednio 0,0106 i 0,0110).

6. Podsumowanie

Badania eksperymentalne wybranych procedur numerycznego całkowania oraz procedury BGKODE_DSP wskazują na istotną możliwość poprawy wybranych wskaźników jakości sterowania w badanym zakresie. Procedura BGKODE_DSP, realizująca metodę wielokrokową, wykazała w tych badaniach przewagę nad popularnymi jednokrokowymi metodami Eulera oraz Rungego-Kutty II rzędu. Wyniki badań potwierdziły oczekiwany wpływ doboru rzędu aproksymacji k w procedurze BGKODE_DSP na poprawę zaproponowanych wskaźników jakości sterowania. Dobór właściwego rzędu aproksymacji k umożliwia badania symulacyjne oraz późniejsza weryfikacja pomiarowa. Wyniki te także potwierdzają, zaobserwowane w przypadku badań symulacyjnych, tendencje dotyczące skuteczności metod wielokrokowych (dokładności uzyskiwanych wyników) przy nieco zwiększonych kosztach obliczeniowych (czas trwania obliczeń). Wyniki uzyskane w trakcie pracy układu obserwatora w trybie śledzenia prędkość kątovej w układzie sterowania pracującym z wykorzystaniem sygnału z enkodera wskazują na duży potencjał metody wielokrokowej.

7. Literatura

- [1] Beniak R., Gardecki A.: *Procedura całkująca układy równań różniczkowych zwyczajnych z wykorzystaniem zmodyfikowanego algorytmu Krogga*, Prace X Konferencji Symulacja Procesów Dynamicznych, Zakopane, 1998, ss. 23-30
- [2] Gardecki A., Jeleń M., Michalak J.: *Porównanie czasu obliczeń wybranych metod numerycznego rozwiązywania równań różniczkowych na przykładzie obliczeń obserwatora prędkości kątovej*, Postępy w Elektrotechnice Stosowanej PES-6, Kościelisko, 18-22 czerwca 2007r.
- [3] Gardecki A., Macek-Kamińska K.: *The new numerical integration routine applied in sensorless drives*, EPE-PEMC Poznań 2008, IEEE Xplore DOI 4635430, ss. 1193-1197
- [4] Gardecki A., Macek-Kamińska K.: Edited by Orłowska-Kowalska T.: *The comparison of the influence of the selected numerical integration algorithms on drive system with asynchronous motor controlled by the DTC method*, Power Electronics and Electrical Drives, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2007
- [5] Krogh F. T.: *Changing stepsize in the integration of differential equations using modified divided differences*, Lecture Notes in Math. 362, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1974, ss. 22-71
- [6] Krupowicz A.: *Metody numeryczne zagadnień początkowych równań różniczkowych zwyczajnych*, PWN Warszawa, 1986
- [7] Krzemiński Z.: *Cyfrowe sterowanie maszynami asynchronicznymi*, Wydawnictwo PG, 2001
- [8] Orłowska-Kowalska T.: *Bezczujnikowe układy napędowe z silnikami indukcyjnymi*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej 2003

Autorzy

Dr inż. Arkadiusz Gardecki,
e-mail: a.gardecki@po.opole.pl
Dr hab. inż. Krystyna Macek-Kamińska, prof. PO,
e-mail: k.macek-kaminska@po.opole.pl
Politechnika Opolska,
Instytut Układów Elektromechanicznych
i Elektroniki Przemysłowej,
ul. Luboszycka 7, 45-036Opole