Konrad Dąbała
Instytut Elektrotechniki, Warszawa

ZBADANIE MOŻLIWOŚCI ZASTOSOWANIA ARYTMETYKI INTERWAŁOWEJ DO WYZNACZANIA SPRAWNOŚCI SILNIKÓW INDUKCYJNYCH

RESEARCH OF POSSIBILITIES OF INTERVAL ARITHMETIC APPLICATION TO INDUCTION MOTORS EFFICIENCY DETERMINATION

Abstract: There was done a literature insight into interval arithmetic: its historical development, interval notations used by different authors, definitions and theorems. The interval set with operations was classified as an appropriate algebra structure. It was given the traps of interval arithmetic. On the example of electric circuit there was shown a dependence of the interval arithmetic calculation result on the function form. There was done a comparative analysis of efficiency measurement uncertainty determination of induction motors using classical and interval methods.

1. Rys historyczny

Pierwszą osobą, która opisała interwał (przedział) jako wynik pomiaru był Norbert Wiener (matematyk, twórca cybernetyki): w 1914 roku zastosował interwały przy pomiarze odległości [16], a w 1921 roku przy pomiarze czasu [17].
Arytmetyka interwałowa (przedziałowa) nie jest nowym pomysłem [5]. W roku 1931 Rosalind Cicely Young opublikowała „algebrę wielowartościowych wielkości”, w której podała zasady obliczeń z użyciem interwałów i innych zbiorów liczb rzeczywistych. W roku 1951 w książce poświęconej algebrze liniowej Paul S. Dwyer z Uniwersytetu w Michigan opisuje arytmetykę z przedziałami (nazywając je „liczbami przedziałowymi”) przedstawiając ją jako przeznaczoną do potrzeb obliczeń urządzeniami cyfrowymi. Kilka lat później podstawowe zasady arytmetyki interwałowej zostały podane niezależnie i prawie równocześnie przez trzech matematyków: Polaka – Mieczysława Warmusa [15], Japończyka – Teruo Sunaga i Amerykanina – Ramona E. Moore’a [11, 12]. Praca Moore’a miała duże znaczenie po części spowodowane zaakcentowaniem rozwiązań problemów związanych z obliczeniami komputerowymi, a po części z kontynuowaniem przez ponad cztery dekady publikacji dotyczących metod interwałowych i promowaniem ich użycia.
Obecnie społeczność zajmującą się metodami interwałowymi stanowią grupy znajdujące się na kilkudziesięciu uniwersytetach w różnych krajach [5]. Na stronie internetowej University of Texas w El Paso (www.cs.utep.edu/intervalcomp) można znaleźć linki to tych grup jak również archiwum z historycznymi dokumentami. Intensywne prace prowadzone są w Niemczech, gdzie metody interwałowe znajdują się w programie studiów jako część metod numerycznych. Tu również ukazuje się pierwsze specjalizowane pismo i organizowane są cykliczne konferencje z tej dziedziny.
Od kilku lat zaczęto używać interwałów jako zakresu zdefiniowanego błędu pomiarów [4, 19, 7]. W pracy [7] przeprowadzono modyfikacje interwału do celów metrologicznych.

2. Oznaczenia interwałów

Zapoznając się z literaturą z dziedziny arytmetyki interwałowej z różnych okresów, można dojść do wniosku, że oznaczenia interwałów (przedziałów) są wprowadzane przez autorów publikacji dość niefrasobliwie.
W tablicy 1 przedstawiono notacje interwałów spotykane w literaturze. Wśród oznaczeń jednym symbolem liczby interwałowej można wyróżnić stosowanie: litery wielkiej (poz. 3, 6, 7), litery małej: (poz. 8, 9), z indeksem (poz. 9), z górną kreską (poz. 5), w nawiasach kwadratowych (poz. 4) lub bez oznaczenia (liczba z podanymi krańcami w nawiasach kwadratowych – poz. 1, 2, 10).
Zgodnie z najnowszym projektem normy dotyczącej oznaczeń matematycznych i jednostek [6] (Rozdz. 6. Standardowe zbiory liczbowe i przedziały) przedziały są oznaczone jak przedstawiono w tablicy 2.

Tablica 1. Notacje liczb interwałowych stosowane przez różnych autorów

Lp.	Nazwisko autora	Rok	Oznaczenie interwału
1.	Warmus	1956	[a,A]
2.	Moore Yang	1959 1962	[a,b]
3.	Alefeld, Herzberger	1983	$A = [a_1,a_2]$
4.	Marciniak	1997	$[x] = [x_1,x_2]$
5.	Powruk	1998	$\overline{x} = [x^-,x^+]$
6.	Gajda	2000	$X = [\underline{x}, \overline{x}]$
7.	Jokinen	2000	X = [a,b]
8.	Gutowski	2002	$x = [\underline{x}, \overline{x}]$
9.	Jakubiec	2002	$x_1 = [\underline{x}_1, \overline{x}_1]$
10.	Hayes	2003	$[\underline{x}, \overline{x}]$

Tablica 2. Oznaczenia przedziałów wg normy ISO 80000-2

Lp	Oznaczenie	Opis
1.	[a, b]	Przedział domknięty obustronnie ([a, b] $=\{x\in R \mid a \le x \le b\}$)
2.	]a, b] używane także (a, b]	Przedział domknięty prawostronnie (]a, b] $=\{x\in R \mid a < x \le b\}$)
3.	[a, b[używane także [a, b)	Przedział domknięty lewostronnie ([a, b[$=\{x\in R \mid a \le x < b\}$)
4.	]a, b[używane także (a, b)	Przedział otwarty (]a, b[$=\{x\in R \mid a < x < b\}$)
5.	r[a, b]	Zakres przedziału [a, b] (r[a, b]=b-a, b>a)

Należy zaznaczyć, że symbol $\overline{x}$ (Rozdz. 9. Działania [6]) oznacza wartość średnią x, natomiast w tablicy 1 – wartość krańcową prawą przedziału, a więc oznaczenie w tablicy 1 jest sprzeczne z normą [6].
Symbol [x] oznacza tradycyjnie funkcję entier (największa liczba całkowita nie większa od x), a więc znów mamy oznaczenie sprzeczne z ogólnie przyjętymi, chociaż w normie [6] funkcja entier jest oznaczana $\lfloor x \rfloor$ i nazywana podłogą (floor).
Po przeanalizowaniu powyższych uwag, zdecydowano, że w niniejszej pracy interwały będzie się oznaczać następująco: $[x]=[x^-, x^+]$. Taki sposób oznaczania umożliwia używanie małych i wielkich liter (wielkich liter bez nawiasu kwadratowego używa się do oznaczania zbiorów), co ma znaczenie praktyczne w maszynach elektrycznych, gdzie większość wielkości oznaczana jest wielkimi literami np. moment w silniku $[M]=[M^-, M^+]$, indukcja $[B]=[B^-, B^+]$.

3. Jak można rozumieć interwał

Pomijając formalizm matematyczny, interwał może być rozumiany jako:
1. zakres zdefiniowany błędu obliczeń lub pomiarów, tzn. interwał $[u^-, u^+]$ może być interpretowany jako zakres, wewnątrz którego znajduje się określona, ale nieznana liczba u taka, że $u^-\le u\le u^+$;
2. zbiór wszystkich liczb rzeczywistych między u^- i u^+;
3. nowy rodzaj liczby składający się z dwóch liczb rzeczywistych (podobnie np. do liczb zespolonych x+jy);
4. dogodny opis parametrów technicznych urządzeń, np. wartość rezystora wynosi R±t, gdzie R – wartość nominalna, a t – tolerancja wykonania;
5. zakres zmienności parametrów używanych np. w ekonomii czy medycynie, a wykorzystywany w teorii podejmowania decyzji czy w diagnostyce.

4. Arytmetyka interwałowa

Rozdział ten został napisany na podstawie [14], [11], [12], [1],[2], [3] i [13] .

4.1. Definicje i działania

Definicja 4.1.1. Dla dowolnej pary liczb rzeczywistych a^-, a^+, gdzie $a^-\le a^+$, zbiór liczb rzeczywistych $a^-\le x\le a^+$ jest nazywany interwałem domkniętym $[a^-, a^+]$, zwany dalej interwałem.

$$[a]=[a^-, a^+]=\{x\in R \mid a^-\le x\le a^+\} \qquad (4.1.1)$$

Stąd, odpowiednio dla każdej pary a^-, a^+, ($a^-\le a^+$) istnieje interwał, a zbiór wszystkich interwałów jest nieskończony. Przyjmijmy, że $[a^-, a^+]$ jest interwałem odpowiadającym parze liczb a^-, a^+ ($a^-\le a^+$) i że S oznacza zbiór wszystkich interwałów, wtedy można sformułować następującą definicję.
Definicja 4.1.2. Dwa interwały są równe tzn.

$$[a^-, a^+]=[b^-, b^+] \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } a^- = b^- \text{ i } a^+ = b^+. \qquad (4.1.2)$$

Sformułujemy teraz operacje arytmetyczne na interwałach.
Definicja 4.1.3. Dodawanie interwałów

$$[a]+[b]=[a^-, a^+]+[b^-, b^+]=[a^-+b^-, a^++b^+] \qquad (4.1.3)$$

Definicja 4.1.4. Odejmowanie interwałów

$$[a]-[b]=[a^-, a^+]-[b^-, b^+]=[a^--b^+, a^+-b^-] \qquad (4.1.4)$$

Uwaga: Warto zauważyć, że

$[a]-[a]\neq[0,0]$ ponieważ $[a]-[a]=$

$$[a^- - a^+, a^+ - a^-] \neq [0,0] \quad [a]-[a]=[0,0] \Leftrightarrow a^- = a^+, \text{ tzn. } [a]=[a,a] \tag{4.1.4.a}$$

można też napisać $[0,0] \in [a]-[a]$

Definicja 4.1.5. Mnożenie interwałów

$$[a][b]=[a^-, a^+][b^-, b^+]=[\min(a^- b^-, a^- b^+, a^+ b^-, a^+ b^+), \max(a^- b^-, a^- b^+, a^+ b^-, a^+ b^+)] \tag{4.1.5}$$

Definicja 4.1.6. Dzielenie interwałów

$$[a]/[b]=[a^-, a^+]/[b^-, b^+]=[a^-, a^+][1/b^+, 1/b^-], \; 0 \notin [b] \tag{4.1.6}$$

Uwaga: Warto zauważyć, że

$$\frac{[a]}{[a]} \neq [1{,}1], \quad 0 \notin [a]$$

$$\text{można też napisać } [1{,}1] \in \frac{[a]}{[a]} \tag{4.1.6.a}$$

chyba, że $a^- = a^+$.

Chociaż w ogólności nie jest spełnione dla interwałów prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania, to jest spełnione tzw. **słabe prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania:**

Definicja 4.1.7. Dla dowolnych interwałów $[a]=[a^-,a^+]$, $[b]=[b^-,b^+]$, $[c]=[c^-,c^+]$ w S

$$[a]([b] + [c]) \subseteq [a][b] + [a][c] \tag{4.1.7}$$

Uwaga: Prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania jest prawdziwe tylko, gdy $[b][c]>0$, tzn. końce obu przedziałów mają ten sam znak.

4.2. Podstawowe twierdzenia

Twierdzenie 4.2.1. (Łączność dodawania) Dla każdych elementów $[a^-, a^+]$, $[b^-, b^+]$ i $[c^-, c^+]$ określonych w S, zachodzi

$$[a]+([b]+[c])=([a]+[b])+[c]= [a^-, a^+]+([b^-, b^+]+[c^-, c^+])= ([a^-, a^+]+[b^-, b^+])+[c^-, c^+] \tag{4.2.1}$$

Twierdzenie 4.2.2. (Łączność mnożenia) Dla każdych elementów $[a]=[a^-, a^+]$, $[b]=[b^-, b^+]$ i $[c]=[c^-, c^+]$ określonych w S, zachodzi

$$[a]([b][c])=([a][b])[c]=[a^-, a^+]([b^-, b^+]\cdot [c^-, c^+])=([a^-, a^+][b^-, b^+])[c^-, c^+] \tag{4.2.2}$$

Twierdzenie 4.2.3. (Przemienność dodawania) Dla każdej pary elementów $[a]=[a^-, a^+]$ i $[b]=[b^-, b^+]$ określonych w S, zachodzi

$$[a]+[b]=[b]+[a]=[a^-, a^+]+[b^-, b^+]= [b^-, b^+]+[a^-, a^+] \tag{4.2.3}$$

Twierdzenie 4.2.4. (Przemienność mnożenia) Dla każdej pary elementów $[a]=[a^-, a^+]$ i $[b]=[b^-, b^+]$ określonych w S, zachodzi

$$[a][b]=[b][a]=[a^-, a^+][b^-, b^+]= [b^-, b^+][a^-, a^+] \tag{4.2.4}$$

Twierdzenie 4.2.5. (Element neutralny (zerowy) dodawania) Interwał [0,0] jest elementem neutralnym (zerowym) dodawania

$$[0,0]+[a]=[a]+[0,0]=[a]=[a^-, a^+] \tag{4.2.5}$$

Twierdzenie 4.2.6. (Element neutralny (zerowy) mnożenia) Interwał [1,1] jest elementem neutralnym (zerowym) mnożenia

$$[1,1][a]=[a][1,1]=[a]=[a^-, a^+] \tag{4.2.6}$$

W ogólności nie istnieją ani addytywne ani multiplikatywne odwrotności w S.

Z twierdzeń 4.2.1 i 4.2.2 wynika, że zbiór interwałów z odpowiednimi działaniami tworzy **półgrupę,** a z 4.2.3 i 4.2.4, że jest to **półgrupa abelowa** (przemienna).

Z twierdzeń 4.2.5 i 4.2.6 wynika, że dla dodawania i mnożenia istnieje element neutralny (zerowy), a więc zbiór interwałów z dodawaniem lub z mnożeniem jest **monoidem przemiennym**.

5. Pułapki arytmetyki interwałowej

Autor [5] przedstawia ciekawe przypadki stosowania arytmetyki interwałowej.

W tradycyjnej arytmetyce korzystamy z oczywistych zależności jak np. $x+-x=0$ i $(a+b)x= =ax+bx$. W przypadku interwałów one nie obowiązują. Ogólnie, interwały nie mają elementu odwrotnego dodawania tzn. jeśli mamy interwał $[u^-, u^+]$, to nie istnieje taki interwał $[v^-, v^+]$, dla którego $[u^-, u^+]+[v^-, v^+]=[0,0]$. Podobnie nie istnieje element odwrotny mnożenia ($[u^-, u^+]\times[v^-, v^+]=[1,1]$). Przyczyna jest prosta i podstawowa – nie istnieje operacja, która zmniejsza szerokość interwału, a przecież [0,0] i [1,1] są interwałami o szerokości zero!

Podobnie nie obowiązuje dla interwałów przemienność mnożenia względem dodawania. Z wyrażenia np. $[1,2]\times([-3,-2]+[3,4])$ otrzymuje się różne wyniki, w zależności od tego czy wykona się najpierw dodawanie a później mnożenie, czy najpierw mnożenie a później dodawanie (w pierwszym przypadku wynik wynosi [0,4], a w drugim [-3,6]). Ściśle rzecz biorąc oba wyniki są poprawne, ponieważ zawierają wartości wyrażeń wyjściowych, natomiast węższy interwał jest na pewno lepszy.

Podobnie jest z wyrażeniem 2[u]/[u], np. [u]=[2,4], wtedy automatyczne stosowanie reguł arytmetyki interwałowej prowadzi do wyniku [1,4], a przecież wartością poprawną jest 2 (lub [2,2]) dla każdej niezerowej wartości [u] (chociaż w interwale [1,4] zawarty jest ten wynik).

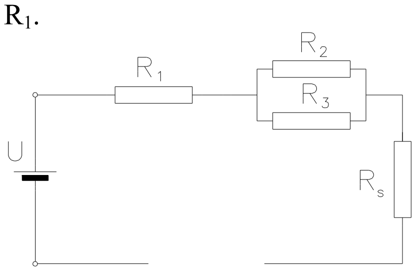
Na koniec zobaczmy co się dzieje z bezkrytycznym zastosowaniem funkcji np. sinus do interwału. Czasami nie ma z tym problemu np. sin([30°,60°])=[0.5, 0.866], ale sin([30°,150°])= [0.5, 0.5] co jest wynikiem błędnym, ponieważ prawidłowy jest [0.5, 1.0]. Spowodowane jest to znów założeniem, że obliczenia interwałowe przeprowadza się tylko dla jego krańców, co jest prawdą jeżeli funkcja jest monotoniczna w tym interwale. Dla innych funkcji należy zbadać, czy wewnątrz interwału funkcja ma minima i/lub maksima.

6. Przykład zastosowania arytmetyki interwałowej

Na rysunku 1 przedstawiono przykładowy obwód rezystancyjny o następujących wartościach elementów:

R_1 = [100,110] Ω R_2 = [1000,1100] Ω U = [9,11] V R_3 = [2000,2200] Ω R_s = [5,15] Ω

Należy wyznaczyć spadek napięcia U_1 na rezystorze R_1.



Rys. 1. Schemat obwodu

Spadek napięcia U_1 wynosi:

$$U_1 = \frac{R_1 U}{R_s + R_1 + \dfrac{1}{\dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}}} \tag{6.1}$$

albo przekształcając wyrażenie na dwa połączone równolegle rezystory R_2 i R_3:

$$U_1 = \frac{R_1 U}{R_s + R_1 + \dfrac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} \tag{6.2}$$

Stosując arytmetykę interwałową otrzymujemy:
dla (6.1) – U_1 = [1.05,1.57]
dla (6.2) – U_1 = [0.97,1.70].

Najszerszy interwał daje wzór przekształcony (6.2), a różnica między nim a interwałem otrzymanym wg wzoru (6.1) wynosi ok. 40 %. Najwęższy zaś przedział otrzymano ze zwykłych obliczeń dla minimalnych i maksymalnych wartości parametrów obwodu. Różnice te policzone są dla tzw. średnic interwału. **Średnica interwału** jest zdefiniowana jako **dim[a]=a$^+$-a$^-$** Średnice dla poszczególnych interwałów wynoszą:

- dim (6.1) = 1.57-1.05 = 0.52
- dim (6.2) = 1.70-0.97 = 0.73.

Punkt środkowy interwału jest zdefiniowany jako **mid[a] = (a$^-$+a$^+$)/2**. Można także wyznaczyć **promień interwału**, który jest zdefiniowany jako **rad[a] = (a$^+$-a$^-$)/2**.

7. Analiza porównawcza wyznaczania sprawności

W rozdziale tym przedstawiono analizę porównawczą wyznaczania sprawności silnika indukcyjnego metodą bezpośrednią na podstawie wyników pomiarów. Zastosowano dwie metody wyznaczania: wyznaczanie niepewności typu B na podstawie przewodnika metrologicznego [18] oraz za pomocą arytmetyki interwałowej.

Metoda bezpośrednia wyznaczania sprawności polega na wyznaczaniu sprawności na podstawie mocy wydawanej P_{out} i mocy pobieranej P_{in}

$$\eta = \frac{P_{out}}{P_{in}} \tag{7.1}$$

Ponieważ moc wydawana P_{out} jest wyznaczana na podstawie pomiaru momentu na wale M w Nm i prędkości obrotowej n w obr/min silnika, to ostatecznie wzór na sprawność przyjmuje postać (P_{in} w W)

$$\eta = \frac{0.105 \cdot M \cdot n}{P_{in}} \tag{7.2}$$

Pomiary momentu wykonano momentomierzem firmy „Hottinger", którego błąd graniczny podany przez producenta wynosi ±0.1×(zakres = 500 Nm)×0.01 = ±0.5 Nm.

Pomiary prędkości obrotowej wykonano przyrządem IEl, którego błąd graniczny podany przez producenta wynosi ±0.15×wartość mierzona×0.01 + 1 cyfra (0.1).

Pomiary mocy pobranej wykonano analizatorem mocy firmy „Norma". Dla pomiaru mocy błąd graniczny podany przez producenta dla tego przyrządu wynosi ±0.1×wartość mierzona×0.01.

Oprócz pomiaru mocy wykorzystano wejście analogowe (przetwornik analogowo-cyfrowy) analizatora do rejestracji momentu, którego błąd graniczny podany przez producenta wynosi ±0.1×(zakres momentu na „Normie" = 500 Nm)×0.01 = ±0.5 Nm; oraz wejście impulsowe do pomiaru i rejestracji prędkości obrotowej, którego błąd graniczny podany przez producenta wynosi ±0.01×wartość mierzona×0.01.

7.1. Wyznaczenie niepewności typu B pomiarów pośrednich

Niepewność standardowa typu B jest wywołana przez efekty systematyczne [18]. Jej źródłem jest najczęściej niedoskonałość aparatury pomiarowej, którą wykonywane są pomiary. Oceniając niepewność standardową typu B korzysta się ze znajomości tylko jednej wartości pomiarowej. Wartość tę traktujemy jako estymator wartości oczekiwanej.

Najczęstszą sytuacją z jaką mamy do czynienia w praktyce pomiarowej jest konieczność oceny niepewności standardowej typu B wynikającej z błędów aparatury pomiarowej. W tym podrozdziale wyznaczono niepewność standardową sprawności silnika indukcyjnego typu B. Składowymi tej niepewności są niepewności standardowe składowe: momentu, prędkości obrotowej i mocy pobranej. Niepewność ta wynosi:

$$\eta = 0.948 \pm 2\cdot 0.002 = 0.948 \pm 0.004 = [0.944, 0.952] \qquad (7.1.1)$$

7.2. Określenie niepewności wyznaczenia sprawności za pomocą arytmetyki interwałowej

Moment [M] = 197.4 Nm ± (0.5 Nm + 0.5 Nm) = [196.4,198.4] Nm

Prędkość obrotowa [n] = 3567.8 obr/min ± 0.4 obr/min = [3567.4,3568.2] obr/min

Moc [P] = 77790 W ± 78 W =[77712,77868] W

$$\eta = \frac{0.105 \cdot [\mathrm{M}] \cdot [\mathrm{n}]}{[\mathrm{P}]} \qquad (7.2.1)$$

$$= [0.945, 0.957] = 0.951 \pm 0.006$$

7.3. Porównanie wyników sprawności otrzymanych dwoma metodami

W tablicy 3 przedstawiono zestawienie wyników wyznaczania niepewności sprawności typu B oraz za pomocą arytmetyki interwałowej. Szerokość przedziału jest w przypadku arytmetyki interwałowej o 50 % większa i podobnie jest z promieniem. Punkt środkowy ma też wartość większą o 0.003 czyli o 0.3 pn. %. Mówiąc ogólnie stosując arytmetykę interwałową otrzymano wyższą (korzystniejszą) wartość sprawności i przedział także jest korzystniejszy.

Tablica 3. Zestawienie wartości parametrów do porównania wyników sprawności otrzymanych różnymi metodami

Lp.		typ B - 7.1	Interwał - 7.2
1.	średnica dim	0.008	0.012
2.	promień rad	0.004	0.006
3.	punkt środkowy mid	0.948	0.951
4	u_{BM} / ΔM_g	0.4	1.0
5.	u_{Bn} / Δn_g	0.2	0.4
6.	u_{BP} / ΔP_g	45	78
7.	sprawność w %	94.8 ± 0.4	95.1 ± 0.6
8.	sprawność przedział w %	[94.4, 95.2]	[94.5, 95.7]

Różnice w wartościach szerokości przedziału otrzymanych tymi dwoma metodami wynikają z zastosowanej metodyki. W przypadku niepewności typu B szerokość przedziału jest mniejsza ze względu na stosowanie estymatora wartości oczekiwanej, co sprowadza się do dzielenia błędu granicznego przez $\sqrt{3}$ (w przypadku jednej składowej niepewności standardowej jednej wielkości mierzonej), a co za tym idzie otrzymuje się mniejszą niepewność i węższy przedział.

8. Wnioski

Arytmetyka interwałowa, a właściwie algebra interwałowa (zbiór interwałów z działaniami binarnymi dodawania i/lub mnożenia to algebra albo struktura algebraiczna) ma własności opisane twierdzeniami, na podstawie których udowodniono, że zbiór interwałów z działaniami binarnymi dodawania lub mnożenia jest półgrupą abelową (przemienną), a ponieważ dla dodawania/mnożenia istnieje element neutralny (zerowy), a więc zbiór interwałów z dodawaniem/mnożeniem jest monoidem przemiennym. Ponieważ ani dla dodawania ani mnożenia nie istnieje element odwrotny zbiór interwałów nie tworzy z tymi działaniami grupy, a tym bardziej pierścienia czy ciała.

Przenoszenie przyzwyczajeń (twierdzeń) z arytmetyki liczb rzeczywistych na arytmetykę interwałową może prowadzić do błędów np. [a]-[a]≠[0,0] chyba, że [a]=[a,a]; można też napisać, że w ogólności [0,0] ∈ [a]-[a]. Podobnie

$\frac{[a]}{[a]} \neq [1,1]$, $0 \notin [a]$ chyba, że [a]=[a,a]; można też napisać, że w ogólności $[1,1] \in \frac{[a]}{[a]}$. Zależności powyższe wynikają z braku elementów odwrotnych zarówno addytywnych jak i multiplikatywnych.

Podstawową własnością działań arytmetyki interwałowej jest monotoniczność ze względu na zawieranie tzn. $[a] \subseteq [b] \wedge [c] \subseteq [d] \Rightarrow [a]\lozenge[c] \subseteq [b]\lozenge[d]$. Z relacji tej oraz powyższych uzasadnień braku elementów odwrotnych wynikają prawie wszystkie ograniczenia arytmetyki interwałowej.

Z przedstawionej analizy przytoczonego przykładu obwodu elektrycznego wynika, że może wystąpić duża różnica (ok. 40 %) w wynikach z użyciem arytmetyki interwałowej, zależna od postaci funkcji wiążącej zmienne, chociaż formalnie wszystko jest poprawne. Należy więc zwracać baczną uwagę, czy istnieje postać funkcji optymalna z punktu widzenia obliczeń interwałowych, gdyż wtedy istnieje możliwość znacznego zawężenia średnicy (szerokości) interwału wynikowego.

W przypadku sprawności wyznaczanej metodą bezpośrednią dla konkretnego silnika indukcyjnego wyniki otrzymane na podstawie przewodnika metrologicznego (tzw. niepewność typu B) oraz z zastosowaniem arytmetyki interwałowej w zasadzie dały dobrą zgodność. Wyniki z zastosowaniem arytmetyki interwałowej dały szerszy (o ok. 50 %) przedział, ale można się tego było spodziewać, za to punkt środkowy był o ok. 38 % przedziału większy, więc wynik wyznaczania sprawności był lepszy (większa sprawność). W przypadku zastosowania arytmetyki interwałowej jest pewność, że w obliczonym przedziale na pewno znajduje się prawdziwy wynik. Problemem jest natomiast z punktu widzenia praktycznego zbyt duża szerokość (średnica) interwału. Prace nad algorytmami, które zapewniłyby żeby granice interwału były możliwie wąskie są obecnie prowadzone przez różne ośrodki naukowe w świecie.

9. Literatura

[1] Alefeld G., Herzberger J.: *Introducion to Interval Computation*, Academic Press, 1983

[2] Boche R. E.: *An operational interval arithmetic*, Illinois National Electronics Conference, Chicago, October 28-30 1963, Paper No. CP 62-1431 CD-1

[3] Gajda K., Marciniak A., Szyszka B.: *Three- and Four-stage Implicit Interval Methods of Runge-Kutta Type, Computational Methods in Science and Technology*, 6/2000, p. 41-59

[4] Gutowski M. W.: *Prosta dostatecznie gruba*, Postępy fizyki, Tom 53, 4/2002

[5] Hayes B.: *A Lucid Interval*, American Scientist, Vol. 91, No. 6, 2003, pp. 484-488

[6] ISO 80000-2 *Quantities and units – Part 2: Mathematical signs and symbols to be used in the natural sciences and technology*

[7] Jakubiec J.: *Redukcyjna arytmetyka interwałowa w zastosowaniu do wyznaczania niepewności algorytmów przetwarzania danych*, Wydawnictwa Politechniki Śląskiej, Gliwice, 2002

[8] Korn G. A., Korn T. M.: *Matematyka dla pracowników naukowych i inżynierów*, PWN, Warszawa 1983

[9] Kostrikin A. I.: *Wstęp do algebry t. 3*, PWN 2005

[10] Marciniak A.: *Object Pascal – język programowania w środowisku Borland Delphi 2.0*, Wydawnictwo Nakom, Poznań, 1997

[11] Moore R. E.: *Automatic error analysis in digital computation*, Lockheed Missiles and Space Co., Technical Report LMSD-48421, Palo Alto, CA, 1959

[12] Moore R. E., Yang C. T.: *Interval analysis*, Lockheed Missiles and Space Co., Technical Report LMSD-285875, Palo Alto, CA, 1959.

[13] Powruk A.: *Zastosowanie teorii zbiorów rozmytych do oceny niezawodności konstrukcji budowlanych*, Praca doktorska, Gliwice, 2001

[14] Shayer S.: *Interval arithmetic with some applications for digital computers*, Lockheed Missiles and Space Co., No. 5-13-65-12, Palo Alto, CA, 1965

[15] Warmus M.: *Calculus of Approximations*, Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences, Cl. III-Vol IV, No 5, 1956

[16] Wiener N.: *A contribution to the theory of relative position*, Proc. Cambridge Philos. Soc., 1914, Vol. 17, pp. 441-449

[17] Wiener N.: *A new theory of measurement: a study in the logic of mathematics*, Proc. Of the London Mathematical Society, 1921

[18] *Wyrażanie niepewności pomiaru. Przewodnik*, GUM 1999

[19] Zięba A.: *Jeszcze o prostej dostatecznie grubej: w odpowiedzi M. W. Gutowskiemu*, Postępy fizyki, Tom 54, 3/2003

Autor

Dr inż. Konrad Dąbała -e-mail: k.dabala@iel.waw.pl
Instytut Elektrotechniki,
Zakład Maszyn Elektrycznych
ul. Pożaryskiego 28, 04-703 Warszawa