

Andrzej Demenko
Politechnika Poznańska, Poznań

TRÓJWYMIAROWE POLOWE MODELE MASZYN ELEKTRYCZNYCH

THREE DIMENSIONAL FIELD MODELS OF ELECTRICAL MACHINES

Abstract: The paper discusses the numerical methods of electromagnetic field calculations in the electric machines. The 3D field model of electromagnetic phenomena is presented. The model consists of: (a) finite element (FE) equations for the magnetic field, (b) equations describing eddy-currents and (c) equations, which describe the currents in the machine's windings. Moreover the FE equations are coupled by the electromagnetic torque to the differential equations of motion. Both scalar and vector potentials are considered. The FE equations are derived by using the notation of circuit theory. It has been shown that there are two types of circuit models associated with FE mesh: (a) edge networks for scalar potentials and (b) facet network for vector potential formulations. The descriptions of material properties in 3D FE space are reviewed. FE models of multiply connected conducting regions are discussed. Both thin and rod conductors are considered. Resistive models of multi-turn coils are described for which the potential T_0 is introduced. The electromagnetic torque calculation using FE models are presented.

1. Wstęp

Jedną z najstarszych metod analizy zjawisk elektromagnetycznych w maszynach elektrycznych jest metoda zastępczych obwodów magnetycznych i elektrycznych. Początkowo z uwagi na ograniczone możliwości obliczeniowe stosowano zastępcze obwody (schematy) o prostej strukturze i bardzo małej liczbie stopni swobody. Tego typu modele są nadal wykorzystywane są w dydaktyce, w obliczeniach symulacyjnych realizowanych w czasie rzeczywistym, a także w analizie systemów złożonych z wielu urządzeń. Coraz częściej wypierane są jednak przez modele dokładniejsze, w tym głównie przez modele utworzone na podstawie metody elementów skończonych (MES). Obecnie powszechnie wykorzystywane są modele polowe, w których pole magnetyczne jest rozpatrywane dwuwymiarowo, a pole elektryczne jednowymiarowo. Na stronach internetowych dostępne jest oprogramowanie do rozwiązywania równań tych modeli, np. Maxwell 2D, Magnet 2D.

W ostatnich latach w obliczeniach symulacyjnych i projektowych maszyn elektrycznych coraz częściej stosuje się algorytmy wyznaczania pola w układach trójwymiarowych. Prowadzone są prace nad zastosowaniem modeli trójwymiarowych do analizy układów o nietypowej strukturze i nietypowych wymuszeniach. Na przykład, do analizy maszyn o strumieniu poprzecznym i układów, w których wymuszenia są tak szybko zmienne, że nie można pominąć prądów przesunięcia. Zjawiska związane z wys-

tępowaniem tych prądów są między innymi rozpatrywane przy projektowaniu układu izolacyjnego uzwojeń maszyn elektrycznych zasilanych z układów falownikowych. Wzrost zainteresowania ujęciami trójwymiarowymi jest także związany z badaniami nad kompatybilnością elektromagnetyczną. W badaniach tych, zwykle nie można stosować klasycznych metod analizy zjawisk falowych, bo źródła fal są nietypowe, a środowisko zawarte w rozpatrywanym obszarze jest silnie niejednorodne. W związku z tym, ciągle trwają poszukiwania nowych algorytmów analizy pola elektromagnetycznego, w tym algorytmów wykorzystujących zasady metody elementów skończonych.

Współczesne ujęcia MES prowadzą do równań, które odpowiadają równaniom oczkowych lub węzłowym ekwiwalentnych siatek elektrycznej i magnetycznej. W związku z tym MES można traktować także jako metodę zastępczych obwodów. Obwody te są bardzo rozbudowane i w przypadku trójwymiarowej MES mogą zawierać nawet ponad milion gałęzi.

W pracy przedstawiono ogólny opis równań MES. Rozpatrzono równania polowego modelu maszyny elektrycznej, tj. modelu zawierającego równania opisujące rozkład pola magnetycznego i rozptyw prądów w uzwojeniach. Scharakteryzowano metody opisu środowisk i uzwojeń w przestrzeni elementów skończonych i metody obliczania momentu elektromagnetycznego na podstawie wielkości polowych.

2. Równania pola elektromagnetycznego

Równania opisujące rozkład pola elektromagnetycznego w maszynach elektrycznych można zapisać następująco:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}; \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t; \quad (1a,b)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}; \quad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} + \partial(\epsilon \mathbf{E}) / \partial t \quad (2a,b)$$

W wyrażeniu (2.b) opisującym gęstość prądu, pierwszy składnik reprezentuje gęstość prądów przewodnictwa, a drugi gęstość prądu przesunięcia. W dalszych rozważaniach związek pomiędzy wektorem gęstości prądu a wektorem \mathbf{E} zapisywano w skróconej postaci $\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}$, gdzie $\gamma = \sigma + p\epsilon$ ($p = \partial/\partial t$) i jest „operatorową” konduktywnością środowiska. Bardzo często do podanych wyżej równań dodaje się równania bezźródłowości $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$, $\operatorname{div} \mathbf{J} = 0$. Zapomina się przy tym, że jeśli spełnione jest (1a), to $\operatorname{div} \mathbf{J} = 0$, a jeśli zachodzi (1b) to $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$. W zadaniach wyznaczania rozkładu pola magnetycznego przy zadanym rozkładzie gęstości prądu, wygodniej jest równanie (1.b) zastępować równoważnym $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$. W rezultacie równania pola magnetycznego zapisuje się następująco: $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}$; $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$; $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$.

W trójwymiarowych polowych modelach maszyn elektrycznych należy uwzględnić, że przenikalność magnetyczna jest tensorem, którego wyrazy mogą być nawet ujemne. Ujemne wyrazy odnoszą się do obszarów z magnesami trwałymi opisanymi równaniem konstytutywnym $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$. W obliczeniach polowych układów z magnesami trwałymi nie korzysta się z podanego równania. Obszar z magnesami trwałymi, rozpatruje się jako obszar ze środowiskiem o dodatniej przenikalności, w którym występują prądy magnetyzacji. Równanie konstytutywne dla środowiska z magnesami trwałymi zapisuje się w postaci: $\mathbf{H} = \mathbf{v} \mathbf{B} - \mathbf{H}_m$, gdzie \mathbf{H}_m jest wektorem namagnesowania w obszarze o reluktywności \mathbf{v} . Jeśli reluktywność \mathbf{v} obszaru magnesu odpowiada reluktywności próżni, to wektor \mathbf{H}_m odpowiada klasycznemu wektorowi namagnesowania. Zwykle przy opisie obszaru z magnesami trwałymi, tak formuje się równanie $\mathbf{H} = \mathbf{v} \mathbf{B} - \mathbf{H}_m$, aby w jak najszerszym przedziale wartości indukcji \mathbf{B} parametry \mathbf{v} , \mathbf{H}_m były stałe.

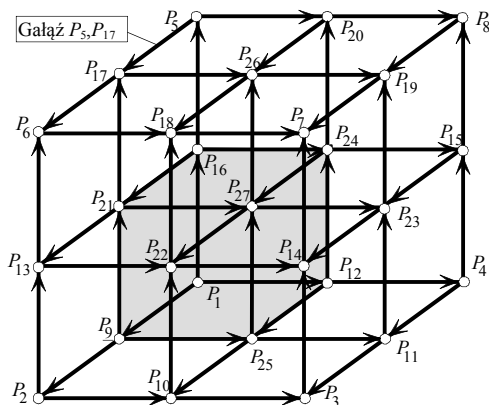
3. Metody analizy układów z polem elektromagnetycznym

Przy omawianiu metod analizy układów z polem elektromagnetycznym wygodnie jest odnieść się do metod analizy obwodów. Równania pola elektromagnetycznego dla układu zdyskretyzowanego odpowiadają bowiem równaniom wielowęzłowych siatek elektrycznych i magnetycznych. Analiza obwodów metodą potencjałów węzłowych odpowiada analizie pola metodą potencjałów skalarnych. Metody wykorzystujące potencjały wektorowe \mathbf{A} , \mathbf{T} są polowymi reprezentantami metod oczkowych. Sformułowania polowe nie wykorzystujące potencjałów można traktować jako odpowiednik metody prądów i strumieni gałęziowych. W ostatnich latach z myślą o analizie obszarów przewodzących niejednospójnych wprowadzono potencjał wektorowy \mathbf{T}_0 . Rotacja tego potencjału odpowiada wektorowi gęstości prądu o zadanym kierunku. W związku z tym potencjał \mathbf{T}_0 jest między innymi wykorzystywany do opisu rozptyłu prądów w układach o cienkich przewodach. W układach zdyskretyzowanych stosuje się krawędziowe wartości potencjału \mathbf{T}_0 , odpowiadające prądom w oczkach uzwojeń.

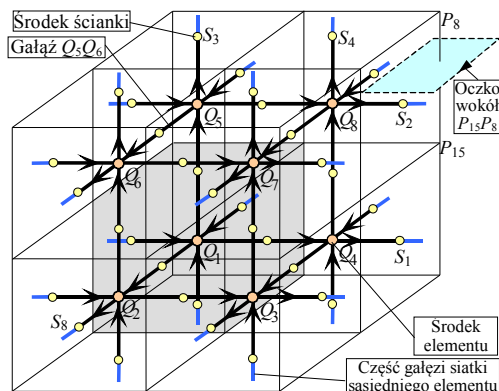
4. Dyskretne modele układów z polem elektromagnetycznym

Rozpatrywana jest metoda elementów skończonych (MES), w której do opisu pola elektromagnetycznego wykorzystywane są krawędziowe wartości potencjałów wektorowych i/lub wartości węzłowe potencjałów skalarnych. Równania MES dla ujęć wykorzystujących potencjały skalarnie elektryczny V i magnetyczny Ω odpowiadają równaniom węzłowym siatek krawędziowych (SK) elektrycznej i magnetycznej [1]. Gałęzie siatek krawędziowych są przyporządkowane krawędziom, a węzły narożom elementów. Na rysunku 1 przedstawiono siatkę krawędziową odwzorowującą obszar podzielony na 8 elementów sześciokątnych [2]. Równania MES dla sformułowania wykorzystującego krawędziowe wartości potencjałów wektorowych odpowiadają równaniom oczkowym siatki nazwanej ściankową (SS), której węzły są przyporządkowane środkom elementów – rys. 2 [1, 2]. Równania dotyczą wszystkich oczek wokół krawędzi elementów. Prąd oczkowy odpowiada krawędziowej wartości potencjału \mathbf{T} , a strumień oczkowy krawędziowej wartości potencjału \mathbf{A} . W klasycznych metodach stosowa-

nych w oprogramowaniu komercyjnym rozkład pola wyraża się za pomocą węzłowych wartości składowych potencjałów wektorowych. Równania opisujące te potencjały można rozpatrywać jako równania opisujące gęstości liniowe prądów lub strumieni w oczkach leżących w trzech płaszczyznach i otaczających węzły siatki.



Rys. 1. Krawędziowy model 8 sześcianów [2]



Rys 2. Ściankowy model 8 sześcianów [2]

Zarówno w metodzie wykorzystującej krawędziowe wartości potencjałów wektorowych, jak i wykorzystującej węzłowe wartości składowych tych potencjałów liczba równań oczkowych odpowiadających równaniom MES jest większa od równań niezależnych. W związku z tym w klasycznych algorytmach dodaje się dodatkowe warunki. Przyjmuje się, że $\text{div} \mathbf{A} = 0$, a więc dodaje się równania określające związki między strumieniami oczkowymi. Po dodaniu tych równań można wyeliminować równania dla oczek zależnych. W rezultacie uzyskuje się układ równań jednoznacznie opisujący rozkład krawędziowych wartości \mathbf{A} i \mathbf{T} lub węzłowych wartości składowych tych potencjałów.

Obecnie coraz częściej stosuje się algorytmy, w których nie wprowadza się dodatkowych wa-

runków kalibrujących. Metodami iteracyjnymi, znajduje się jedno z rozwiązań układu nieoznaczonych równań oczkowych.

W tablicy 1 zestawiono równania krawędziowej (SK) i ściankowej (SS) siatki magnetycznej, a w tablicy 2 odpowiednich siatek elektrycznych. Przyjęto, że w rozpatrywanych układach prądy przesunięcia są pomijalnie małe. W związku z tym, w modelach elektrycznych elementy pojemnościowe nie występują.

Tablica 1. Równania siatek magnetycznych

Siatka	Równania gałęziowe, podstawienia	Równania MES
SK	$\phi_b = \Lambda(u_\Omega + \Theta_{be})$ $u_\Omega = k_n \Omega$	$k_n^T \Lambda k_n^T \Omega = -k_n^T \Lambda \Theta_{be}^*$
SS	$u_{\Omega f} = R_\mu \phi_f - \Theta_{bf}$ $\phi_f = k_e \phi_e$	$k_e^T R_\mu k_e \phi_e = k_e^T \Theta_{bf}^{**}$

Uwagi: Ω – wektor potencjałów węzłowych, k_n , k_e – transponowane macierze węzłowa SK i oczkowa SS, Λ – macierz permeancji gałęziowych, Θ_{be} , Θ_{bf} – wektory gałęziowych smm , ϕ_e – wektor strumieni oczkowych; R_μ – macierz reluktancji gałęziowych, *równania węzłowe, **równania oczkowe

Tablica 2. Równania siatek elektrycznych

Siatka	Równania gałęziowe, podstawienia	Równania MES
SK	$i_b = G(u_v + e_{be})$ $u_v = k_n V$	$k_n^T G k_n^T V = -k_n^T G e_{be}^*$
SS	$u_{vf} = R i_f - e_{bf}$ $i_f = k_e i_e$	$k_e^T R k_e i_e = k_e^T e_{bf}^{**}$

Uwagi: V – wektor potencjałów węzłowych, G – macierz konduktancji gałęziowych, e_{be} , e_{bf} – wektory gałęziowych sem , i_e – wektor prądów oczkowych; R – macierz rezystancji gałęziowych, *równania węzłowe, **równania oczkowe

W polowych modelach maszyn elektrycznych siatki magnetyczna i elektryczna są ze sobą sprzężone. Źródła w siatce magnetycznej zależą od rozptywu prądów w siatce elektrycznej, a sem w obwodach siatki elektrycznej od pochodnych zmian strumienia określanego na podstawie strumieni gałęziowych lub oczkowych siatki magnetycznej. Opis sprzężeń między siatkami komplikuje się przy rozpatrywaniu układów z obszarami przewodzącymi wielospójnymi, w tym układów z uzwojeniami o cienkich przewodach. Bardzo często opis takich układów wiąże się z homogenizacją środowiska.

5. Homogenizacja środowiska

O dokładności polowego modelu maszyny elektrycznej decyduje dokładność odwzorowania właściwości materiałowych. Nawet jeśli para-

metry środowiska są dokładnie określone, to trudno jest przenieść ich wartości w przestrzeń elementów skończonych. Trudności wynikają między innymi z konieczności uwzględnienia warunku jednorodności środowiska w elemencie. W celu spełnienia tego warunku homogenizuje się środowisko. Obszar o środowisku niejednorodnym zastępuje się obszarem ze środowiskiem jednorodnym o zastępczych parametrach. Najbardziej typowym przykładem homogenizacji środowiska jest zastąpienie obszaru z rdzeniem wykonanym z blach, obszarem ze środowiskiem anizotropowym, którego reluktywność ν_p w kierunku prostopadłym do powierzchni blachy jest opisana następująco: $\nu_p = (1-k_z)\nu_0 + k_z\nu_{FE}$, gdzie k_z jest współczynnikiem wypełnienia rdzenia, a ν_0, ν_{FE} są reluktywnościami próżni i blach rdzenia [4]. Z podanej relacji wynika, że reluktywność ν_p jest tylko kilkadziesiąt razy mniejsza od reluktywności próżni, a więc przeoczenie anizotropowych właściwości rdzenia pakietowanego i przyjęcie $\nu_p = \nu_{FE}$, może prowadzić do dużych błędów. Opracowane zostały także metody homogenizacji rdzeni pakietowanych z uwzględnieniem prądów wirowych. Metody polegają na wprowadzeniu zastępczej przenikalności dynamicznej lub zespolonej [5, 6]. Podejmowane są prace nad opisem za pomocą przenikalności zespolonej obszaru z cienkimi przewodami, w których uwzględnia się prądy wirowe [7]. Na rozwiązanie czeka zadanie homogenizacji układu o cienkich przewodach, z uwzględnieniem prądów przesunięcia, występujących w izolacji pomiędzy siadującymi przewodami.

Wymienione przykłady homogenizacji dotyczyły parametrów magnetycznych środowiska, choć odnosiły się także do układów ze środowiskiem przewodzącym. W polowych modelach maszyn elektrycznych równania pola magnetycznego są powiązane z równaniami pola przepływowego prądu w uzwojeniach. W związku z tym zagadnienie homogenizacji środowiska należy powiązać z zadaniem opisu uzwojeń w przestrzeni elementów skończonych.

6. Opis uzwojeń w przestrzeni elementów skończonych

Wyodrębnia się dwie grupy obszarów z prądami przewodnictwa: (a) obszary jednoczpójne, np. masywne elementy rdzenia, (b) obszary wieloczpójne, np. uzwojenia klatkowe, uzwojenia

wykonane z cienkich przewodów, elementy masywne z otworami. Obszar jednoczpójny można odwzorować zarówno na elektrycznej siatce krawędziowej jak i ściankowej. Elektryczną siatkę krawędziową (ESK) można sprząć z magnetyczną siatką ściankową (MSS). Uzyskuje się wówczas model siatkowy reprezentujący sformułowanie $A-V$. W analizie układów z obszarami jednoczpójnymi rzadziej stosuje się modele z elektrycznymi siatkami ściankowymi (ESS), choć tego typu siatka może być sprzężona zarówno z magnetyczną siatką krawędziową (MSK) jak i z magnetyczną siatką ściankową (MSS). Modele typu MSK-ESS są dyskretnym reprezentantem sformułowania $\Omega-T$, a MSS-ESS sformułowania $A-T$. Wymienione modele są sprzężone poprzez źródła. Wyrażenia opisujące źródła zestawiono w tablicy 3. Z uwagi na oczkowy charakter równań siatek ściankowych w wierszach i kolumnach odnoszących się do SS przedstawiono wyrażenia opisujące źródła oczkowe.

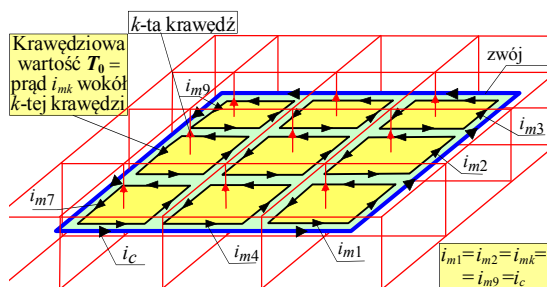
Tablica 3. Wyrażenia opisujące s_{mm} i s_{em}

Siatka	S_{mm}	S_{em}
MSK-ESS ($\Omega-T$)	$\Theta_{be} = i_e$	$k_e^T e_{bf} = -d\phi_b/dt^*$
MSS-ESK ($A-V$)	$k_e^T \Theta_{bf} = i_g^*$	$e_{be} = -d\phi_e/dt$
MSS-ESS ($A-T$)	$\Theta_{bf} = K i_e$ $k_e^T \Theta_{bf} = K^T i_f^*$	$e_{bf} = -K d\phi_e/dt$ $k_e^T e_{bf} = -K^T d\phi_f/dt^*$

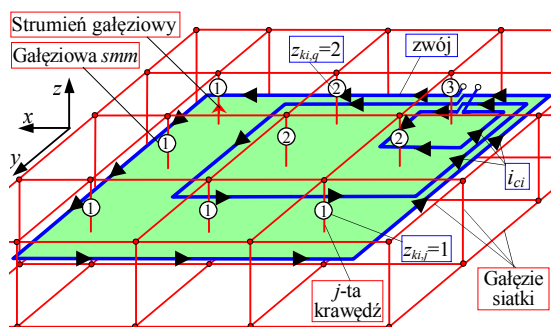
K – macierz transformująca prądy i strumienie w oczkach wokół krawędzi w prądy i strumienie w oczkach przyporządkowanych ściankom, źródła oczkowe

Przy rozpatrywaniu trójwymiarowych modeli obszarów przewodzących wieloczpójnych wygodnie jest wyodrębnić dwa typy układów: (a) układy o cienkich przewodach, w których nie uwzględnia się obwodów dla prądów wirowych i (b) układy z obwodami dla prądów wirowych. Układy typu (b) można odwzorowywać na modelach krawędziowych lub ściankowych. Równania klasycznych modeli ściankowych należy przy tym uzupełnić o dodatkowe równania dla oczek wokół "otworów". Prąd w tych oczkach reprezentuje krawędziową wartość potencjału T_0 [2, 3]. Kształt ścieżki z prądem wokół otworu jest zadawany. W związku z tym zadany jest kierunek i zwrot wektora gęstości prądu, a rozkład T_0 można wyznaczyć z równania Biota-Savarta, podobnie jak wyznacza się natężenie pola od wymuszenia prądowego w metodzie zredukowanego potencjału skalarnego. Różnica pomiędzy tą metodą, a omawianym ujęciem MES polega przede wszystkim na sposobie

formowania relacji pomiędzy prądem w ścieżce, a krawędziową wartością potencjału T_0 . Metodę potencjału T_0 najwygodniej jest przedstawić na przykładzie układu o cienkich przewodach, w których prądy wirowe nie występują i do opisu rozptywu prądu wykorzystuje się wartości krawędziowe T_0 . Najpierw rozpatrzono układ z pojedynczym zwojem – rys. 3. Zwój został zastąpiony zbiorem zwojów wokół krawędzi. Prądy w tych zwojach są obwodowym reprezentantem krawędziowej wartości potencjału T_0 . Krawędziowe wartości potencjału T_0 tworzą wektor Θ_{be} gałęziowych smm SK z tabelicy 1. Po pomnożeniu Θ_{be} przez macierz K z tabelicy 3 otrzymuje się wektor Θ_{bf} źródeł gałęziowych w siatce ściankowej. Wektor Θ_{be} wyraża się w postaci iloczynu macierzy z_k liczb oczek wokół krawędzi i wektora i_c prądów oczkowych. Na rysunku 4 pokazano magnetyczny model krawędziowy obszaru z cewką o trzech zwojach. Źródłem gałęziowym siatki przyporządkowano wartości wyrazów macierzy z_k .



Rys. 3. Krawędziowe wartości T_0 w obrębie zwoju



Rys. 4. Opis i -tej cewki w przestrzeni MSK

W metodach wektorowego potencjału magnetycznego, a więc w metodach, których równania odpowiadają równaniom oczkowym SS zadanie formowania źródeł upraszcza się, bo nie trzeba definiować źródeł gałęziowych, wystarczy określić źródła oczkowe. Wektor Θ_f tych źródeł jest

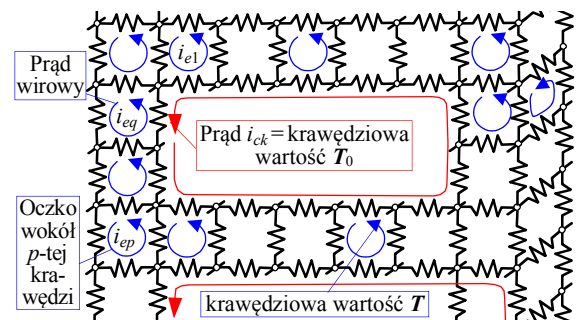
iloczynem macierzy oczkowej SS i wektora Θ_{bf} źródeł gałęziowych. Można go także wyznaczyć na podstawie macierzy z_s liczb zwojów przechodzących przez ścianki elementów [2]. Macierze z_k, z_s wykorzystuje się do wyznaczania strumieni skojarzonych z uzwojeniami o cienkich przewodach. W tabelicy 4 zestawiono wyrażenia opisujące smm wzniesaną przez obwody z prądami i_c oraz sem w tych obwodach.

Tabela 4. Smm i sem w metodach potencjału T_0

Model	Smm	Sem
MSK-ESS ($\Omega-T_0$)	$\Theta_{be} = z_k i_c$	$e_o = -p z_k^T \phi_b$
MSS-ESS ($A-T_0$)	$k_e^T \Theta_{bf} = K^T z_s i_c$	$e_o = -p z_s^T K \phi_e$

Uwagi: e_o – wektor oczkowych sem w obwodach z prądami i_c , $K^T k_e = K k_e^T$, $z_s = k_e z_k$

Zestawione w tabelicy wyrażenia dotyczą także układów niejednostopijnych, w których uwzględnia się prądy wirowe.



Rys. 5. ESS - siatkowa reprezentacja metody $T-T_0$

Na rysunku 5 został przedstawiony fragment modelu ściankowego układu przewodzącego wielospójnego. W układzie występują zarówno oczka z prądami wirowymi jak i oczka wokół „dziur”. Prądy wirowe są krawędziowymi wartościami potencjału T , a prądy wokół dziur krawędziowymi wartościami potencjału T_0 . Omawiany model jest więc reprezentantem sformułowania $T-T_0$. Siłą magnetyczną w magnetycznych siatkach sprzężonych z przedstawionym modelem wyznacza się sumując wyrazy wektorów podanych w tabelicach 3 i 4. Napięciowe równania oczkowe dla omawianej siatki zawierają sem e_o z tabelicy 4 i $k_e^T \Theta_{bf}$ z tabelicy 3. Równania te można zapisać w następującej formie macierzowej:

$$k_e^T R k_e i_e + R_c i_c = k_e^T e_{bf} + e_o + e_{zew} \quad (3)$$

W powyższym równaniu R_c jest macierzą rezystancji oczkowych dla obwodów z prądami i_c , a e_{zew} jest wektorem sem źródeł zasilających

uzwojenia. Do równań (3) można dołączyć równania zewnętrznych obwodów zasilających. Podany wyżej opis można stosować także w modelach dwuwymiarowych. W równaniu (3) dla tych modeli należy uwzględnić napięcia na indukcyjnościach połączeń czołowych.

7. Moment elektromagnetyczny

Bardzo ważną zaletą modeli polowych jest możliwość dokładnego obliczania momentu elektromagnetycznego. W obliczeniach korzystnie jest posługiwać się formułami utworzonymi na podstawie zasady prac wirtualnych dla układu dyskretyzowanego. Można przy tym stosować: (a) metodę o nieruchomej siatce wirnika lub (b) metodę polegającą na analizie wirtualnego przesunięcia siatki wirnika. W metodzie (a) rozpatruje się wirtualne przesunięcie źródeł pola magnetycznego, w tym też źródeł od prądów magnetyzacji, względem nieruchomej siatki. W rezultacie otrzymuje się formułę, która jest numeryczną reprezentacją wzoru Lorentza dla układu z prądami przewodzenia i prądami magnetyzacji. W analizie maszyn elektrycznych korzystniej jest stosować metodę (b). W obszarze szczeliny powietrznej tworzy się pasmo przejściowe pomiędzy obszarem ruchomym a nieruchomym. Zwykle w celu zapewnienia jak największej dokładności obliczeń pasmo dzieli się na elementy jednorodnie o jednakowej odległości kątowej β pomiędzy węzłami w kierunku ruchu. W metodach magnetycznego potencjału skalarnego rozpatruje się zmianę koenergii, a w metodach potencjału wektorowego zmianę energii. Formuły opisujące moment można uzyskać analizując dyskretne, wirtualne przesunięcie wirnika o kąt $\pm\beta$. Po zastosowaniu symboli z tablicy 1 uzyskane wyrażenia zapisuje się następująco:

$$T(\alpha) = \frac{1}{4\beta} \mathbf{\Omega}^T \left[(\mathbf{k}_n^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{k}_n) \Big|_{\alpha+\beta} - (\mathbf{k}_n^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{k}_n) \Big|_{\alpha-\beta} \right] \mathbf{\Omega} \quad (4)$$

$$T(\alpha) = -\frac{1}{4\beta} \mathbf{\phi}_e^T \left[(\mathbf{k}_e^T \mathbf{R}_\mu \mathbf{k}_e) \Big|_{\alpha+\beta} - (\mathbf{k}_e^T \mathbf{R}_\mu \mathbf{k}_e) \Big|_{\alpha-\beta} \right] \mathbf{\phi}_e \quad (5)$$

W wyniku wirtualnego przesunięcia zmieniają się tylko wyrazy macierzy strukturalnych dla obwodów w obszarze pasma w szczelinie powietrznej. We wzorach opisujących moment wystąpią więc wyrazy wektorów $\mathbf{\Omega}$, $\mathbf{\phi}_e$ odnoszące się wyłącznie do pasma. Na podstawie (4) i (5) otrzymuje się zatem formuły, które są numeryczną reprezentacją wzorów wykorzystujących do obliczeń momentu tensor naprężeń Maxwella.

Komercyjne systemy obliczeniowe proponują zwykle co najmniej dwie metody obliczania momentu, np. metodę Lorentza i Maxwella. Metody mogą dawać różniące się wyniki. W związku z tym warto wykonać obliczenia testujące i np. sprawdzić czy moment działający na pusty obszar wirnika jest równy zeru.

8. Podsumowanie

W przedstawionym opisie trójwymiarowych polowych modeli maszyn elektrycznych pominięto z konieczności szereg istotnych zagadnień. Na przykład, nie zostały omówione polowe metody symulacji ruchu środowisk i metody analizy modeli siatkowych. O najczęściej stosowanej metodzie symulacji ruchu wirnika wspomniano tylko przy omawianiu dyskretnego odwzorowania przesunięć wirtualnych.

Obecnie prowadzone są badania nad skutecznymi metodami rozwiązywania równań modeli polowych w połączeniu z procedurami optymalizacyjnymi. Ciągłe poszukuje się efektywnych metod parametryzacji danych i szybkozbieżnych metod rozwiązywania układów równań o bardzo dużej liczbie niewiadomych, w tym równań dla polowych modeli zjawisk sprzężonych. Tego typu modele powstają w wyniku połączenia modelu zjawisk elektromagnetycznych z modelem zjawisk cieplnych i wentylacyjnych. Do równań wymienionych modeli dodaje się równania układu zasilającego i obciążającego. Model zjawisk sprzężonych może zawierać także równania opisujące drgania mechaniczne.

Pomimo rozwoju sprzętu komputerowego i metod numerycznych obliczenia optymalizacyjne nadal wykonuje się na podstawie modeli dwuwymiarowych. Z modeli trójwymiarowych korzysta się głównie w badaniach symulacyjnych projektowanych maszyn elektrycznych.

9. Literatura

- [1] Demenko A.: *Obwodowe modele układów z polem elektromagnetycznym*, WPP, Poznań 2004
- [2] Demenko A., Hameyer K.: *Field and field-circuit description of electrical machines*, Power Electronics and Motion Control Conference, EPE-PEMC, 2008, (na stronach ieeexplore.ieee.org) pp. 2412-19
- [3] Demenko A., Sykulski J., Wojciechowski R.: *Network representation of conducting regions in 3-D finite element description of electrical machines*, IEEE Trans. on Magnetics, Vol. 44, No. 6, 2008, pp. 714-17
- [4] De Rochebrune A., Dedulle J.M., Sabonnadiere J.C.: *A technique of homogenization applied to the*

modelling of transformers, IEEE Trans. on Magnet-
ics, Vol. 26, No. 2, 1990, pp. 520-23

[5] Dular P., Gyselinck J., Krahenbuhl L.: *A time-
domain finite element homogenization technique for
lamination stacks using skin effect sub-basis func-
tions*, COMPEL, Vol. 25, No. 1, 2006, pp. 6-16

[6] Gyselinck J., Dular P.: *A time-domain homo-
genization technique for laminated iron cores in 3-D
finite-element models*, IEEE Trans. on Magnetism,
Vol. 40, No. 2, 2004, pp. 856-59

[7] Xi Nan, Sullivan Ch.R.: *An equivalent complex
permeability model for litz-wire windings*, IEEE
Trans. on Industry Applications, Vol. 45, No. 2,
2009, pp. 854-860

Autor

Prof. dr hab. inż. Andrzej Demenko

e-mail: andrzej.demenko@put.poznan.pl

Politechnika Poznańska

Wydział Elektryczny

Instytut Elektrotechniki i Elektroniki Przemysłowej

ul. Piotrowo 3a, 60-965 Poznań