

Marian Noga, Akademia Górniczo-Hutnicza, Kraków
 Lesław Gołębiowski, Marek Gołębiowski, Damian Mazur,
 Politechnika Rzeszowska, Rzeszów

MODELOWANIE MACIERZY INDUKCYJNOŚCI TRANSFORMATORÓW WIELOUZWOJENIOWYCH, TRÓJKOLUMNOWYCH W FUNKCJI CZĘSTOTLIWOŚCI (W UJĘCIU FEM 3D)

MODELLING THE INDUCTANCE MATRIX OF MULTI WINDINGS TRANSFORMERS WITH THREE COLUMNS (FEM 3D CALCULATIONS)

Abstract: Commutation processes in power electronic converters are significantly dependent on the leakage inductances of the transformer. The calculations of the leakage inductance matrix were performed with use of the finite element method (3D). The eddy current losses were taken into consideration. The mono harmonic calculations for different frequencies were performed. The dependence of magnetical inductance main, component zero and leakage were showed from frequency. This caused rotational currents in the core of the auto-transformer and in the conductors of windings is. The way of the fusion of these inductances was introduced ladder arrangements. Adaptation of these inductances to the calculations of courses transitory converters district methods was the aim.

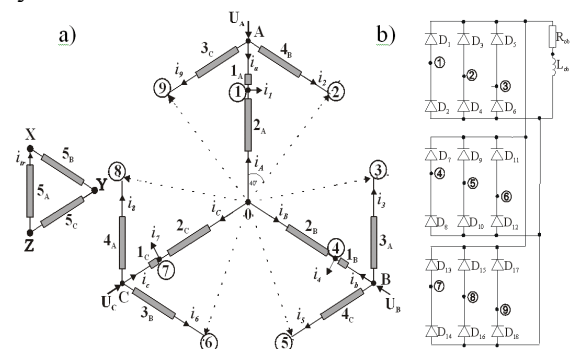
1. Wstęp

Dla obliczania stanów przejściowych układów energoelektronicznych np. uproszczonymi metodami obwodowymi konieczna jest znajomość macierzy indukcyjności rozproszenia transformatorów je zasilających. Możliwe są jednak obliczenia metodą FEM 3D, w których pole elektromagnetyczne jest liczone dokładnie w sprzężeniu z obwodami uzwojeń przy zasilaniu napięciowym z uwzględnieniem elementów nieliniowych diod oraz tranzystorów [3], [5], [2], [1]. Wówczas rozproszenie uwzględniane jest automatycznie i proces komutacji jest rozpatrywany prawidłowo. Obliczenia wymagają jednak silnego sprzętu komputerowego i trwają długo. Dla prowadzenia szybkich obliczeń przydatne są modele obwodowe, które zarówno części magnetyczne jak i elektryczne opisują zwyczajnymi równaniami różniczkowymi. Wykorzystywana jest wówczas postać macierzowa indukcyjności rozproszenia dla prawidłowego oddania procesu komutacji. Dla obliczeń stanów przejściowych wykorzystywana jest stała wartość tej macierzy. Zachodzi pytanie, czy dla różnych składowych harmonicznych czasowych procesu jest to prawidłowe i jak ewentualnie można te indukcyjności ułożyć. Zmierzenie tej macierzy praktycznie nie jest możliwe, ponieważ przeszkadzają w tym pojemności sprzężeń między uzwojeniami, szczególnie dla dużych pulsacji. Wykazano zależność induk-

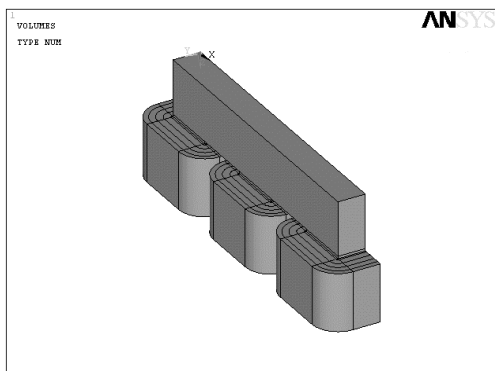
cyjności magnetycznej głównej, składowej zerowej i rozproszeniowej od pulsacji oraz przeprowadzono syntezę tych parametrów układami drabinkowymi.

2. Obliczenia stanów przejściowych metodą FEM 3D

W artykułach [5], [2] i [1] zostały przedstawione możliwości obliczeń stanów przejściowych maszyn asynchronicznych oraz układów prostowniczych z autotransformatorem, w których pole elektromagnetyczne było obliczane dokładną metodą FEM 3D, a obwody elektryczne były sprzężone z tym polem i zasilane napięciowo. Rozważany w tym artykule układ prostownika z autotransformatorem przedstawia rys. 1.



Rys. 1. Schemat połączeń uzwojeń autotransformatora (a) oraz diodowy prostownik 18-to pulsowy (b)



Rys. 2. Trójwymiarowy model autotransformatora

Na rys. 2 przedstawiono $\frac{1}{4}$ część przestrzennego zobrazowania auto-transformatora 50 kVA wraz z uzwojeniami. Przekrój kolumny i jarzma to $0,01 \text{ m}^2$, szerokość rdzenia $0,5 \text{ m}$, wysokość $0,39 \text{ m}$. Wymiary okien to: wysokość $0,208 \text{ m}$, szerokość $0,114 \text{ m}$, a głębokość to $0,1 \text{ m}$. Trzeba podkreślić, że w przedstawianych w artykule obliczeniach brano pod uwagę cały autotransformator w ujęciu 3D, ze względu na możliwość uwzględniania ewentualnych niesymetrii uzwojeń lub obwodu magnetycznego. Oznacza to również uwzględnienie powietrza otaczającego autotransformator z ewentualną obecnością kadzi. Można stosować własny program FEM 3D lub profesjonalny typu ANSYS. Indukcja pola magnetycznego \vec{B} była przedstawiana przy pomocy magnetycznego potencjału wektorowego \vec{A} . Natężenie magnetyczne \vec{H} wymagało też tensora – macierzy przenikalności magnetycznej $\vec{\mu}$ zgodnie z wzorami:

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} \quad \vec{H} = (\vec{\mu})^{-1} \text{rot} \vec{A} \quad (1)$$

Korzystając z praw Maxwella oraz elektrycznego potencjału skalarnego V , można było wyrazić natężenie pola elektrycznego \vec{E} :

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} &\Rightarrow \text{rot} \vec{E} = \text{rot} \left(-\frac{d\vec{A}}{dt} + \text{grad} V \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \vec{E} = -\frac{d\vec{A}}{dt} + \text{grad} V \end{aligned} \quad (2)$$

Równanie Maxwella $\text{rot} \vec{H} = \vec{J}$ oraz bezźródłowość pola magnetycznego $\text{div} \vec{B} = 0$ tworzą rozwiązywany metodą FEM 3D układ:

$$\begin{cases} \text{rot} \left((\vec{\mu})^{-1} \text{rot} \vec{A} \right) = \vec{\gamma} \left(-\frac{d\vec{A}}{dt} + \text{grad} V \right) + \vec{J} \\ \text{div} \left(\vec{\gamma} \left(-\frac{d\vec{A}}{dt} + \text{grad} V \right) \right) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

gdzie $\vec{\gamma}$ to macierz – tensor konduktancji elektrycznej, a \vec{J} to gęstość prądu uzwojeń. Układ ten należy uzupełnić o równania obwodów uzwojeń autotransformatora:

$$\frac{d\Psi}{dt} + L \frac{di}{dt} + R \cdot i = U \quad (4)$$

W równaniu tym Ψ to strumień sprzężony z uzwojeniami o rezystancji R , dodatkowej indukcyjności rozproszenia L (np. przewodów zasilających), zasilanych napięciem U i wiodące prąd i .

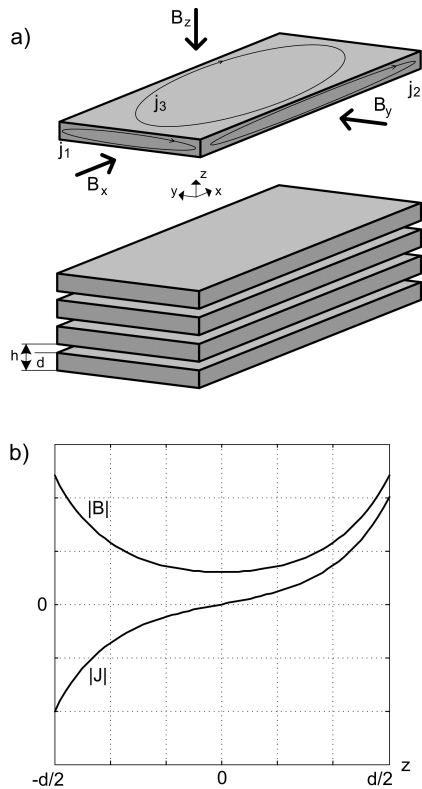
Potencjał magnetyczny wektorowy \vec{A} był w stosowanej metodzie FEM 3D aproksymowany elementami krawędziowymi, zaś potencjał elektryczny skalarny V – elementami węzłowymi. Należy przy tym uwzględnić, że operator gradientu obniża stopień aproksymacji przestrzennej o 1. Dlatego bardzo ważne jest dla dokładności obliczeń, aby stopień aproksymacji przestrzennej potencjału skalarnego V był o 1 wyższy od stopnia aproksymacji potencjału wektorowego \vec{A} . W obliczeniach przyjmowano odpowiednio stopień 2 i 1.

3. Przenikalność magnetyczna i konduktywność elektryczna w obliczeniach stanów przejściowych

Nie jest możliwe bezpośrednie uwzględnienie zblachowania obwodu magnetycznego ze względu na dużą ilość blach. Dlatego zjawiska występujące w blachach winny mieć swoje odzwierciedlenie w tensorach przenikalności magnetycznej oraz konduktywności elektrycznej. Równanie (1) należy rozpatrzyć przyrostowo:

$$\begin{aligned} \vec{\mu} \cdot \Delta \vec{H} = \Delta \vec{B} &\Rightarrow \vec{H}(t) = \vec{v} \cdot \text{rot} \vec{A} + \\ &+ [\vec{H}(t - \Delta t) - \vec{v} \cdot \vec{B}(t - \Delta t)] \end{aligned} \quad (5)$$

gdzie $\vec{v} = (\vec{\mu})^{-1}$ to tensor reluktywności magnetycznej. Członem w prostokątnych nawiasach należy uzupełnić prawą stronę równań (3) np. metodą przedstawioną w [1].



Rys. 3. Prądy wirowe w blachach obwodu magnetycznego (a); wypieranie pola $|B|$ oraz gęstość prądu $|J|$ wzdłuż grubości blachy (b)

Reluktywność winna uwzględnić zjawisko histerezy magnetycznej. W ujęciu histerezy obrotowej 3D (*rotational hysteresis*) oddaje to wzór:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{H}(t) = \frac{3}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \vec{w}(\varphi, \Theta) \cdot H[\vec{B}(t) \cdot \vec{w}, B(t - \Delta t), H(t - \Delta t)] \cdot \sin \Theta \cdot d\varphi \cdot d\Theta \\ \vec{w} = \begin{bmatrix} \sin \Theta \cdot \cos \varphi \\ \sin \Theta \cdot \sin \varphi \\ \cos \Theta \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (6)$$

Współrzędna kulista Θ jest odmierzana zgodnie z rys. 3a od osi z , zaś współrzędna kulista φ w płaszczyźnie x - y od osi x . Wektor \vec{w} rzuca na kierunki wyznaczone przez kąty (Θ, φ) założoną (obliczaną) indukcję magnetyczną $\vec{B}(t)$, jak też składa wyjściowe natężenie $\vec{H}(t)$ z udziałów histerezy $H[]$ z poszczególnych kierunków (Θ, φ) . Natężenie $H[]$ w powyższym wzorze to wynik zastosowanego modelu (np. Preisacha, Jilesa, Juhani Tellinena) histerezy skalarnej, który zależy od pamiętanego natężenia $H(t - \Delta t)$ oraz indukcji $B(t - \Delta t)$ w poprzed-

nim kroku czasowym $(t - \Delta t)$ dla każdego kierunku wyznaczonego wektorem \vec{w} . Współczynnik $3/2\pi$ w tym wzorze zapewnia, że dla izotropowego przypadku bez histerezy $\mu \cdot H = B$, wstawionego w miejsce $H[]$, wynik pozostanie ten sam, czyli $\mu \cdot H = B$. Wzór ten jest stosowany w wersji dyskretnej, a tensor reluktancji obliczany jest z przyrostowej zależności (5). Można go też stosować w wersji ograniczonej tylko do płaszczyzny x - y , równoległej do blach. Wówczas we wzorze (6) należy przyjąć $\Theta = \pi/2$, a współczynnik $3/2\pi$ należy zamienić na $2/\pi$ – oczywiście całkę po kącie Θ trzeba opuścić. W skrajnie uproszczonym przypadku uwzględnia się dyskretyzację tylko w dwóch kierunkach na płaszczyźnie x - y , np. tylko kierunki po osi x oraz y , całka zamienia się na sumę, a współczynnik przed nią zamienia się na 1.

W ostatecznej postaci tensora reluktywności magnetycznej \vec{v} należy jeszcze uwzględnić przekładki niemagnetyczne między blachami w kierunku z , jako połączenie szeregowo blach i przekładek. Efektywna przenikalność magnetyczna w tym kierunku z powinna być liczona:

$$\mu_{zz}^{ef} = \frac{\mu_{zz}}{\mu_{zz}(1 - k_{fe}) + k_{fe}} \quad (7)$$

gdzie współczynnik wypełnienia $k_{fe} = d/h$ z rys. 3a, zaś μ_{zz} to przenikalność blach w kierunku prostopadłym z . Ze względu na przekładki również współczynniki przenikalności w kierunkach x, y winny być mnożone przez k_{fe} .

Straty wiropądowe od strumieni równoległych do płaszczyzny blach (czyli w płaszczyźnie x - y) można również ująć w tensorze reluktywności \vec{v} . Wzór na wiropądowe straty energii w blachach (σ to konduktywność elektryczna, d to grubość blach):

$$W_e = \frac{\sigma d^2}{12} \int_{\Delta t} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)^2 dt \cong \frac{\sigma d^2}{12} \int_{\Delta t} \frac{\Delta \vec{B}}{\Delta t} d\vec{B} \cong \int_{\Delta t} \vec{H}_e d\vec{B} \quad (8)$$

wyraża związane z tymi stratami wiropądowymi dodatkowe natężenie magnetyczne:

$$\vec{H}_e = \frac{\sigma d^2}{12 \cdot \Delta t} \cdot \Delta \vec{B} = v_e \cdot \Delta \vec{B} \quad (9)$$

oraz wiropądową (*eddy currents*) reluktywność $v_e = (\sigma \cdot d^2)/(12 \cdot \Delta t)$ w płaszczyźnie x - y . We wzorze Δt to krok całkowania (próbkiowania)

po czasie t , natomiast $\Delta\vec{B}$ to przyrost indukcji magnetycznej w tym kroku.

Straty dodatkowe (*anomalous losses*) można natomiast wyrazić:

$$\begin{aligned} W_a &= \sqrt{\sigma \cdot G \cdot V_0 \cdot S} \cdot \int_{\Delta t} \left| \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right|^{1,5} dt \cong \\ &\cong \sqrt{\sigma \cdot G \cdot V_0 \cdot S} \cdot \int_{\Delta t} \left| \frac{\Delta \vec{B}}{\Delta t} \right|^{-0,5} \cdot \frac{\Delta \vec{B}}{\Delta t} \cdot d\vec{B} \cong \int_{\Delta t} \vec{H}_a \cdot d\vec{B} \end{aligned} \quad (10)$$

W tym wzorze S to przekrój blach, zaś G i V_0 to parametry blach. Otrzymujemy stąd dodatkowe natężenie magnetyczne:

$$\vec{H}_a = \sqrt{\sigma \cdot G \cdot V_0 \cdot S} \cdot \frac{1}{\Delta t^{0,5} \cdot |\Delta \vec{B}|^{0,5}} \Delta \vec{B} = \nu_a \cdot \Delta \vec{B} \quad (11)$$

oraz reluktywność strat dodatkowych:

$$\nu_a = \sqrt{\sigma \cdot G \cdot V_0 \cdot S} \cdot \frac{1}{\Delta t^{0,5} \cdot |\Delta \vec{B}|^{0,5}} \quad (12)$$

We wzorze (5) należy tensor reluktywności $\vec{\nu}$ zamienić na tensor reluktywności całkowitej $\vec{\nu}_{calk}$

$$\vec{\nu}_{calk} = \vec{\nu} + (\nu_e + \nu_a) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Natomiast $\vec{H}(t - \Delta t)$ w tym (5) wzorze pozostaje natężeniem histerezy z poprzedniego kroku całkowania.

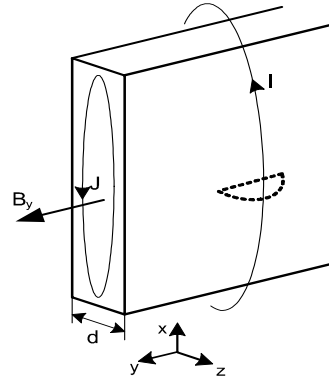
W ten sposób opisane są zjawiska w płaszczyźnie x - y równoległej do blach na rys. 3a. Dla uwzględnienia prądów wirowych \vec{j}_3 od strumienia po osi z prostopadłej do blach, można posłużyć się tensorem konduktancji elektrycznej:

$$\vec{\gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_x & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

gdzie γ_x, γ_y to przewodności blach w kierunkach x oraz y . Dla zapewnienia spójności elektrycznej przyjmowano również bardzo małą wartość na pozycji $\vec{\gamma}(3,3)$.

4. Przenikalność magnetyczna i konduktywność elektryczna w obliczeniach monoharmonicznych

Dla obliczeń z założoną pulsacją zasilania ω , zjawisko strat wirowych oraz wypierania strumienia w blachach rdzenia jak na rys. 3 można uwzględnić wprowadzając zastępczy zespolony tensor przenikalności magnetycznej $\vec{\mu}(\omega)$. Część urojona przenikalności magnetycznej odpowiada mocy czynnej, część rzeczywista – mocy biernej. Zastępczy tensor przenikalności magnetycznej można wyprowadzić z rys. 4.



Rys. 4. Pole magnetyczne w blasze transformatora B_y pod wpływem prądu I

Aby rozważyć pole magnetyczne w blasze transformatorowej należy rozwiązać równania Maxwella w układzie z rys. 4:

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{H} = \vec{J} = \gamma \vec{E} \\ \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -j\omega\mu\vec{H} \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{rot rot } \vec{H} = -j\omega\mu\gamma\vec{H} \Rightarrow (15) \\ \Rightarrow \frac{d^2 H_y}{dz^2} = j\omega\mu\gamma H_y$$

przy warunkach brzegowych:

$$\vec{J} = (J_x(z), 0, 0) \quad \vec{B} = (0, B_y(z), 0)$$

Wprowadzając:

$$p = \sqrt{j\omega\mu\gamma} = (1+j) \sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}} = (1+j) \frac{1}{\delta}$$

$$\text{gdzie } \delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\gamma}}$$

(δ to głębokość wnikania pola do blachy), otrzymujemy rozwiązanie:

$$H_y = Ae^{-pz} + Be^{pz} \quad (16)$$

przy warunkach brzegowych:

$$H_y\left(\frac{d}{2}\right) = H_y\left(-\frac{d}{2}\right) \rightarrow A = B$$

Po dalszych przekształceniach:

$$\begin{cases} H_y = A \cdot (e^{-pz} + e^{pz}) = 2A \cosh(pz) \\ E_x = -2A \frac{p}{\gamma} \sinh(pz) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_y = B_0 \cosh(pz) \\ J_x = -\frac{B_0}{\mu} p \sinh(pz) \end{cases} \quad (17)$$

gdzie $B_0 = \mu \cdot 2 \cdot A$. Można stąd obliczyć wartość średnią indukcji magnetycznej w przekroju blachy:

$$B_{sr} = \frac{1}{d} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} B_y dz = \frac{2B_0}{p \cdot d} \sinh\left(\frac{p \cdot d}{2}\right) \Rightarrow \quad (18)$$

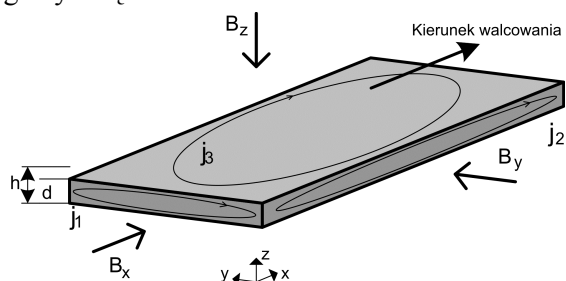
$$\Rightarrow B_{sr} = \hat{\mu} \cdot H_y$$

Stałą B_0 wyznaczamy z prawa Ampere’a poprzez całkowanie natężenia pola H_y po linii przerywanej na rys. 4.

$$H_y\left(z = \frac{d}{2}\right) = I \Rightarrow \frac{1}{\mu} B_0 \cdot \cosh\left(p \frac{d}{2}\right) = I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_0 = \frac{\mu}{\cosh\left(p \frac{d}{2}\right)} \cdot I \quad (19)$$

Podstawiając B_0 do zależności B_{sr} we wzorze (18) otrzymujemy zespoloną przenikalność magnetyczną:



Rys. 5. Anizotropia blach transformatorowych: główny przepływ indukcji B_x określa kierunek walcowania blach

$$B_{sr} = \left[\frac{2\mu}{p \cdot d} \cdot \tanh\left(p \frac{d}{2}\right) \right] \cdot I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{\mu} = \mu \frac{\tanh\left[(1+j) \cdot \frac{d}{2\delta}\right]}{(1+j) \cdot \frac{d}{2\delta}} \quad (20)$$

gdzie $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\gamma}}$

Blachy transformatorowe układane są tak (rys. 5), aby przepływ strumienia następował w kierunku ich walcowania. Jeśli przyjmie się anizotropowość blach i kierunek walcowania wzdłuż osi x jak na rys. 5, to przyjmowano przenikalność magnetyczną w kierunkach prostopadłych do walcowania:

$$\mu_z \approx \mu_y \approx \frac{\mu_x}{30} \quad (21)$$

przy współczynniku wypełnienia blach $k_{fe} = d/h$.

Podstawiając do wzoru (20) przenikalności μ_x oraz μ_y obliczamy przenikalności magnetyczne zespolone $\hat{\mu}_x$ oraz $\hat{\mu}_y$. Odzwierciedlają one straty wiropądowe w blachach przy przepływie strumienia magnetycznego w tych kierunkach x oraz y . Natomiast podobnie jak przy stanach przejściowych, opisanych w poprzednim rozdziale 3, przy przepływie strumienia magnetycznego w kierunku prostopadłym do blach, czyli z , przyjmuje się rzeczywistą przenikalność magnetyczną μ_{zz} ze wzoru (7). Uwzględnia ona szeregowy przepływ strumienia przez blachę oraz przekładkę niemagnetyczną. Straty wiropądowe w blachach od strumienia w kierunku prostopadłym do powierzchni blach (z) uwzględnia się poprzez przyjęcie odpowiednich przewodności elektrycznych w kierunkach x oraz y . Ostatecznie przyjmuje się następujące tensory przenikalności magnetycznej $\hat{\mu}$ oraz przewodności elektrycznej $\hat{\gamma}$:

$$\hat{\mu} = \begin{pmatrix} k_{fe} \cdot \hat{\mu}_x & 0 & 0 \\ 0 & k_{fe} \cdot \hat{\mu}_y & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{zz} \end{pmatrix} \quad (22)$$

$$\hat{\gamma} = \begin{pmatrix} k_{fe} \cdot \gamma & 0 & 0 \\ 0 & k_{fe} \cdot \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Przy przepływie strumienia prostopadle do blach występujące również wypieranie prądu wirowego j_3 z rys. 5 wymaga gęstszej dyskretyzacji w płaszczyźnie x - y . Te wymagania są coraz większe przy wyższej częstotliwości zasilania i nie zawsze są możliwe do spełnienia. Wówczas należy w zastępstwie zmniejszyć wartość przenikalności magnetycznej μ_{zz} .

W opracowanym modelu można też uwzględnić straty histerezy, zmieniając część urojonej przenikalności magnetycznej zespolonej $\hat{\mu}_x$ i $\hat{\mu}_y$, zgodnie z [11].

5. Wyniki obliczeń monoharmonicznych

Zostały przeprowadzone obliczenia dla przewodności żelaza blach $\gamma_1 = 3 \cdot 10^6$ S/m oraz $\gamma_2 = 1,3 \cdot 10^5$ S/m. Przyjęto anizotropowość blach zgodnie z wzorem (21), gdzie przenikalność magnetyczna w kierunku walcowania $\mu_z = 500 \cdot \mu_0$, przy przenikalności magnetycznej powietrza $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Vs/Am. Kierunek walcowania blach był zgodny z kierunkiem przepływu strumienia. Współczynnik wypełnienia przyjęto $k_{fe} = 0,94$. Obliczenia przeprowadzono podobnie jak obliczenia stanów przejściowych z rozdziału 3, czyli przyjmowano dowolny wektor napięć zasilających (zespolony) i z równań (3) i (4) otrzymywano wektor prądów uzwojeń. Dla każdej zadanej częstotliwości powtarzano te obliczenia tyle razy, ile było uzwojeń, czyli 15, a wyniki układano jako kolumny w kwadratowych macierzach napięć zasilających $[U]$ oraz prądów uzwojeń $[I]$. Stąd otrzymywano impedancje uzwojeń (bez obwodów zewnętrznych) $[Z] = [U] \cdot [I]^{-1} - [R]$, gdzie $[R]$ to macierz z wartościami rezystancji uzwojeń autotransformatora na diagonalu.

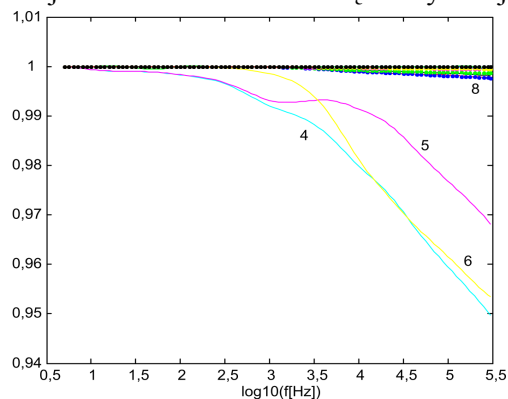
Alternatywnym i prostszym sposobem byłoby przyjmowanie macierzy prądów $[I]$ (jak w [6, 7] – możliwość stosowania standardowych programów jak ANSYS) i obliczanie macierzy napięć zasilających $[U]$. Wydaje się jednak, że przyjęty sposób postępowania lepiej służy wyodrębnieniu współczynników indukcyjności rozproszenia, ponieważ bardziej uwidacznia składowe prądu odpowiadające małym wartościom własnym macierzy $[Z]$: $[I] = [Z]^{-1} \cdot [U]$. Macierz impedancji $[Z]$, jako macierz zespolona symetryczna, była rozkładana na wartości własne $[D]$ i wektory własne $[W]$:

$$[U] = [Z] \cdot [I] \Rightarrow [Z] \cdot [W] = [W] \cdot [D] \Rightarrow [Z] = [W] \cdot [D] \cdot [W]^T \quad (23)$$

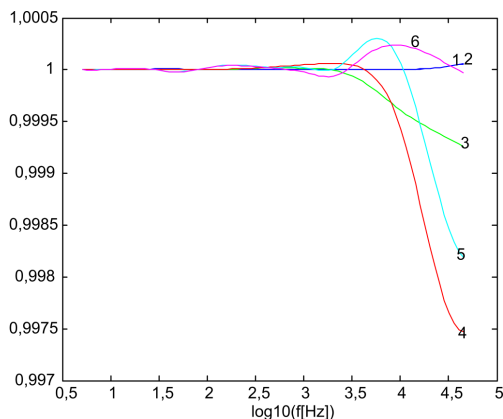
gdzie wartościom własnym umieszczonym na diagonalu $[D]$ odpowiadają wektory własne ułożone kolumnami w $[W]$. Wartości własne z diagonalu $[D]$ można zapisać jako $D_{ii} = R_i + j\omega L_i$, gdzie R_i oraz L_i to rezystancja i indukcyjność zastępcza połączone szeregowo. Wartości własne opisują siłę działania wektorów własnych i służą do ich identyfikacji. Zgodnie z [8] obwód główny przy 15 uzwojeniach określają wektory własne główne $[W1]$ i $[W2]$, a składową zerową wektor $[W0]$. Postacie idealne tych wektorów:

$$\begin{aligned} [W1]^T &= \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot [1, 1, 1, 1, 1, -2, -2, -2, -2, -2, 1, 1, 1, 1, 1] \\ [W2]^T &= \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot [1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, -1, -1, -1] \\ [W0]^T &= \frac{1}{\sqrt{15}} \cdot [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1] \end{aligned} \quad (24)$$

Wektorom $[W1]$ i $[W2]$ odpowiadają wartości własne obwodu magnetycznego głównego, które są największe co do wartości bezwzględnej. Pozostałe wektory własne odpowiadają rozproszeniu i podobnie zawierają części rezystancyjną i indukcyjną w połączeniu szeregowym. Główne obliczenia przeprowadzono dla przewodności blach γ_1 . Rys. 6 przedstawia niezmiennosć wektorów własnych wraz częstotliwością, sprawdzoną poprzez iloczyny tych samych wektorów, ale dla różnych pulsacji. Niezmiennosć ta sprzyja identyfikacji wartości własnych. Ortonormalność zespolonych wektorów własnych liczonych dla różnych pulsacji świadczy o tym, że zarówno indukcyjności główne jak i rozproszenia zachowują sposób swojego oddziaływania mimo skrajnie różnych pulsacji. Pozwala to na ich łatwą identyfikację.



Rys. 6. Iloczyny skalarnie wektorów własnych z wektorami przy małej pulsacji przy grubości drutów 0,0025 m. Na rysunku podane są numery wartości własnych



Rys. 7. Iloczyny skalarnie wektorów własnych z wektorami przy małej pulsacji przy grubości przewodów na każdej kolumnie $3 \times 0,0005$ m, $2 \times 0,0025$ m, przy połączeniu uzwojeń według schematu [ctr2] (24)

Wyniki przedstawione na rys. 7 odpowiadają połączeniu szeregowemu 15 zezwojów w 6 uzwojeń według macierzy połączeń [ctr2]:

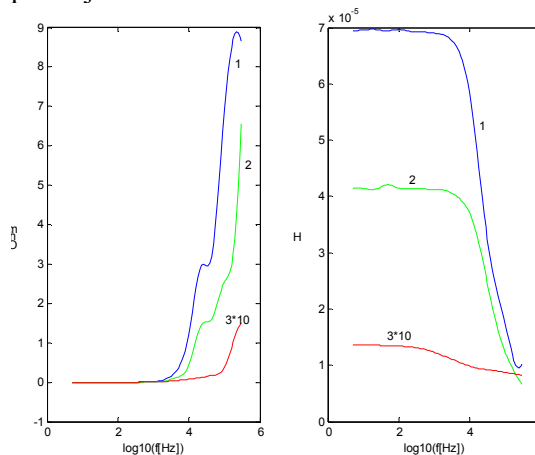
$$[ctr2] = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (25)$$

Prądy zezwojów $[I_{zew}]$ dają się wyrazić przez prądy uzwojeń $[I_{uzw}]$:

$$[I_{zew}] = [ctr2] \cdot [I_{uzw}] \quad (26)$$

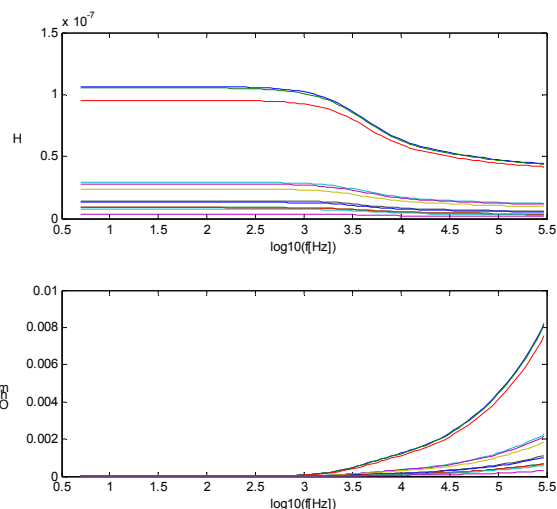
Pomimo łączenia zezwojów z różnych kolumn autotransformatora według macierzy [ctr2], ortogonalność odpowiadających sobie wektorów własnych dla różnych pulsacji jest zachowana. Mała zmienność wektorów własnych wraz z pulsacją pozwala na przyjmowanie ich jako kolumn napięć zasilających $[U]$ przy obliczaniu impedancji autotransformatora według metody opisanej w rozdziale 5 (wzór 23) dla kolejnych pulsacji: $[U] = [Z]_{15} \cdot [I]$. Przyspiesza to obliczenia, bo prądy (będące wynikiem obliczeń) w kolumnach $[I]$ są do tych wektorów proporcjonalne. Tym niemniej

próbowano też przyjmować dowolne napięcia w kolumnach macierzy kwadratowej $[U]$ otrzymując zawsze tą samą macierz impedancji autotransformatora $[Z]$. Otrzymane przebiegi indukcyjności i rezystancji (w połączeniu szeregowym) wartości własnych autotransformatora przedstawione są na rysunkach 8 i 9 w funkcji pulsacji.

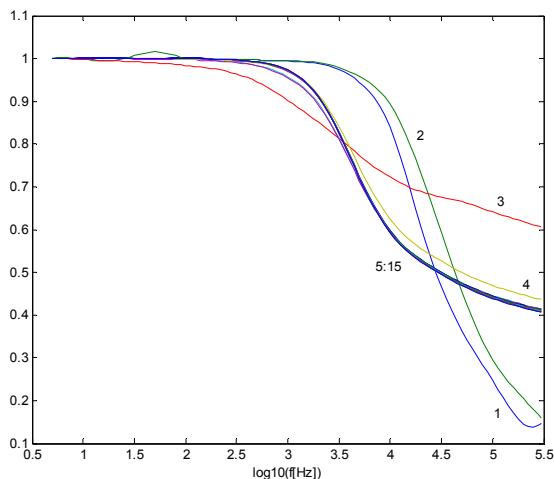


Rys. 8. Rezystancje i indukcyjności obwodu magnetycznego głównego (1, 2) i składowej zerowej (3 – powiększona 10 razy) dla autotransformatora z drutami nawojowymi o grubości $0,0025$ m w funkcji pulsacji

Względną zmienność indukcyjności autotransformatora (w odniesieniu do jej wartości przy małej pulsacji) w funkcji pulsacji przedstawia rys. 10.



Rys. 9. Przebieg indukcyjności i rezystancji rozproszonych (w połączeniu szeregowym) autotransformatora z drutami nawojowymi o grubości $0,0025$ m w funkcji pulsacji



Rys. 10. Względny przebieg indukcyjności autotransformatora o grubości drutów nawojowych 0,0025 m w funkcji pulsacji: 1, 2 – indukcyjności obwodu magnetycznego głównego, 3 – składowej zerowej, 4-15 – składowych rozproszonych

6. Wnioski

Przedstawiono zasady modelowania metodą FEM 3D obwodu magnetycznego autotransformatora. Obwód ten składa się z rdzenia trójkolumnowego z blach transformatorowych z pięcioma uzwojeniami na każdej kolumnie, które otoczone są powietrzem. Przewidziano możliwość uwzględnienia kadzi, w której może znajdować się transformator. Naświetlono zagadnienie dotyczące obliczeń stanów przejściowych, w tym szczególnie sposób uwzględnienia strat wirowych, histerezowych oraz dodatkowych. Bardzo ważne okazało się zapewnienie wyższego stopnia aproksymacji przestrzennej potencjału elektrycznego skalarnego w porównaniu do potencjału magnetycznego wektorowego. W celu obliczenia parametrów autotransformatora opisano również obliczenia monoharmoniczne dla zadanej pulsacji. Można dzięki nim uzyskać indukcyjności obwodu magnetycznego głównego, składowej zerowej oraz składowych rozproszonych. Umożliwia to również badanie zależności tych parametrów od pulsacji oraz na stworzenie schematu zastępczego autotransformatora do szybkich obliczeń obwodowych.

Rozważania przedstawione w tym artykule są wykorzystane podczas dalszych obliczeń opisanych w kolejnym artykule: „Autotransformator trójkolumnowy wielouzwojeniowy dla układów prostowniczych clean power”, referowanym na tym XVIII Seminarium Technicznym.

7. Literatura

- [1]. Gołębiowski L., Gołębiowski M., Mazur D.: *Magnetic non-linearity in 3D FEM models of the electric machines*, „Electrical Engineering”, Poznań University of Technology Academic Journals, Poznań, nr 55, 2007, s. 95-112
- [2]. Gołębiowski L., Gołębiowski M., Mazur D.: *Models of Multipulse Electrical Energy Converters with Multiwinding*, 6th IEEE Symposium on Diagnostics for Electric Machines, Power Electronics and Drives, Kraków, 2007, s. 345-355
- [3]. Gołębiowski L., Gołębiowski M., Mazur D.: *Nieliniowość magnetyczna w modelach FEM 3D maszyn elektrycznych*, XLIII Międzynarodowe Sympozjum Maszyn Elektrycznych, Poznań, 2-5 lipiec 2007
- [4]. Gołębiowski L., Gołębiowski M., Mazur D.: *Obliczenia do diagnostyki uszkodzeń maszyny asynchronicznej za pomocą FEM*, „Elektro-Info”, Warszawa, nr 6, 2007, Dom Wydawniczy Medium, s. 62-65.
- [5]. Gołębiowski L., Gołębiowski M., Mazur D.: *Voltages in the Shaft of the Induction Motor*, 6th IEEE Symposium on Diagnostics for Electric Machines, Power Electronics and Drives, Kraków, 2007, s. 142-145
- [6]. Gyselinck J., Dular P.: *A time-domain homogenization technique for laminated iron cores in 3-D finite-elements models*, „IEEE Transactions on Magnetic”, IEEE Magnetics Society, Volume 40, Issue 2, March 2004, s. 856-859
- [7]. Gyselinck J., Vandeveld L., Melkebeek J., Dular P., Henrotte F., Legros W.: *Calculations of eddy currents and associated losses in electrical steel laminations*, „IEEE Transactions on Magnetic”, IEEE Magnetics Society, Volume 35, Issue 3, Part 1, May 1999, s. 1191-1194
- [8]. Lewicki J., Gołębiowski M.: *Metody obliczania indukcyjności rozproszonych autotransformatorów wielouzwojeniowych*, „Przegląd Elektrotechniczny”, Warszawa, nr 2, 2007, Wydawnictwo SIGMA-NOT, s. 42-48
- [9]. Martinez J. A., Mork B. A.: *Transformer modeling for low- and mid-frequency transients – a review*, „IEEE Transactions on Power Delivery”, IEEE Power Engineering Society, Volume 20, Issue 2, Part 2, April 2005, s. 1625-1635
- [10]. Jezierski E.: *Transformatory, Podstawy teoretyczne*, WNT, Warszawa, 1965
- [11]. Zakrzewski K.: *Oszacowanie efektu mocy w blachach magnetycznych w ujęciu eliptycznej pętli histerezy*, Prace Naukowe Instytutu Maszyn, Napędów i Pomiarów Elektrycznych Politechniki Wrocławskiej, Seria: Studia i Materiały, Wrocław, Nr 62/28, 2008, s. 18-24.

Autorzy

Prof. dr hab. inż. Marian Noga, Akademia Górniczo-Hutnicza, Kraków, Katedra Automatyki Napędu i Urządzeń Przemysłowych, B-1, I p., pok. 120a,

e-mail: M.Noga@cyfronet.krakow.pl.

Dr hab. inż. Lesław Gołębiowski, prof. PRZ, Politechnika Rzeszowska, Wydział Elektrotechniki i Informatyki, ul. W. Pola 2, B209, 35-959 Rzeszów,

e-mail: golebiye@prz.rzeszow.pl.

Mgr. inż. Marek Gołębiowski, Politechnika Rzeszowska, Wydział Elektrotechniki i Informatyki, ul. W. Pola 2, B206, 35-959 Rzeszów,

e-mail: yegolebi@prz.rzeszow.pl.

Dr inż. Damian Mazur, Politechnika Rzeszowska, Wydział Elektrotechniki i Informatyki, ul. W. Pola 2, B206, 35-959 Rzeszów,

e-mail: mazur@prz.rzeszow.pl.