

Grzegorz SARWAS

# MODELOWANIE SUPERKONDENSATORÓW PRZY UŻYCIU RACHUNKU RÓŻNICZKOWEGO UŁAMKOWEGO RZĘDU

**STRESZCZENIE**      *W artykule przedstawione zostało użycie rachunku różniczkowego ułamkowego (niecałkowitego) rzędu do modelowania dynamiki ładowania superkondensatora w dziedzinie częstotliwości. Dzięki zastosowaniu modelu o ułamkowym rzędzie uzyskano bardzo dokładne modelowanie w szerokim zakresie częstotliwości.*

**Słowa kluczowe:** *modelowanie, rachunek różniczkowy ułamkowego rzędu, superkondensatory*

## 1. WSTĘP

---

Historia teorii rachunku różniczkowego ułamkowego (niecałkowitego, o niecałkowitej krotności) rzędu sięga praktycznie początku tradycyjnego rachunku różniczkowego. Pierwsze wzmianki na ten temat (list pomiędzy Leibnizem i L'Hospitałem) datuje się już na koniec XVII wieku [5]. Jednakże wśród inżynierów dopiero pod koniec lat 60 ubiegłego wieku wzrosło

---

**mgr inż. Grzegorz Sarwas,**  
e-mail: sarwasg@isep.pw.edu.pl

Zakład Sterowania  
Instytut Sterowania i Elektroniki Przemysłowej

zainteresowanie tą tematyką. Jak się szybko okazało, istnieje w technice wiele problemów które łatwiej jest opisać właśnie przy pomocy rachunku różniczkowego ułamkowego rzędu. Pozwala on na przykład na dokładniejszy opis ośrodków stratnych i dyspersyjnych (elektrodynamika, mechanika ośrodków lepko-sprężystych, procesy elektrochemiczne, układy, w których występuje tarcie). W procesach takich jak dyfuzja, transport ciepła, linia długa (opisanych równaniami różniczkowymi cząstkowymi), w których rozwiązaniu występuje  $\sqrt{s}$ , może być on interpretowany jako pochodna rzędu  $\frac{1}{2}$ .

Innym przykładem zastosowania rachunku różniczkowego ułamkowego rzędu, które zostało szerzej przedstawione w tym artykule, jest modelowanie superkondensatorów.

Artykuł zorganizowany jest następująco: rozdział 2.1 zawiera krótkie wprowadzenie do tematyki superkondensatorów, ich budowy i zasady działania. W rozdziale 2.2 znajduje się wprowadzenie do rachunku różniczkowego ułamkowego rzędu, podstawowe definicje, charakterystyki częstotliwościowe. Rozdział 2.3 przedstawia definicję oraz charakterystykę Bode'go członu całkującego ułamkowego rzędu. Rozdział 3 zawiera natomiast wyniki przeprowadzonych eksperymentów modelowania superkondensatorów.

## 2. WPROWADZENIE

---

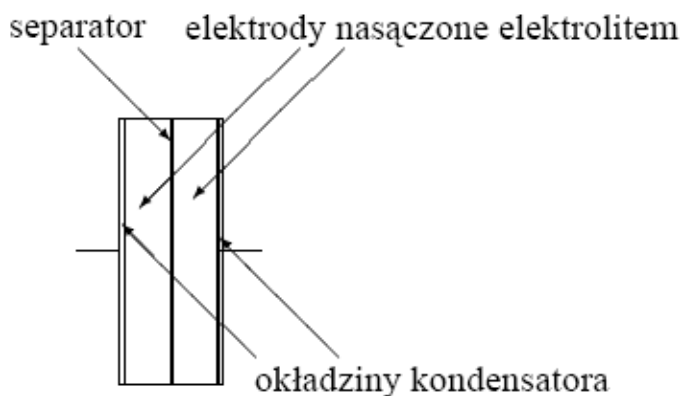
### 2.1. Wprowadzenie do superkondensatorów

---

Superkondensatory (nazywane też ultrakondensatorami lub kondensatorami dwuwarstwowymi (ang. double-layer)) powstały pod koniec lat siedemdziesiątych. Posiadają one znacznie większe pojemności niż zwykłe kondensatory (od 1 mF do 1 kF). Charakteryzują się gęstością energii rzędu 2...9 Wh/kg oraz gęstością mocy rzędu 3...8 kW/kg. Własność ta umiejscawia ultrakondensatory pomiędzy tradycyjnymi aluminiowymi kondensatorami elektrolitycznymi, a akumulatorami.

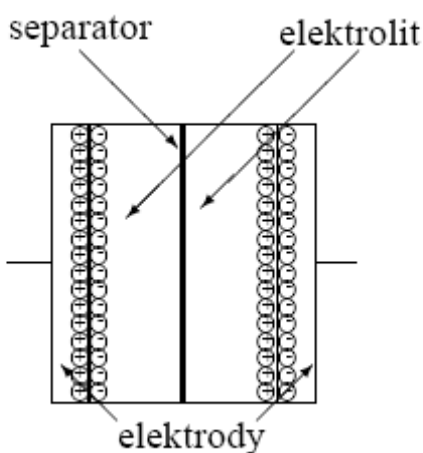
Takie parametry superkondensatory zawdzięczają swojej budowie. Ultrakondensator składa się bowiem z dwóch okładek zbudowanych z węgla aktywowanego nasączonego elektrolitem i separatora. Zasada jego działania opiera się na zjawisku Helmholtz'a, który zaobserwował, że istnieje pewne napięcie graniczne potrzebne do rozpoczęcia elektrolizy. Doprowadzenie do okładek kondensatora napięcia niższego niż graniczne powoduje, że elektroliza nie następuje, a elektrolit zachowuje się jak izolator. Ze względu na zbyt małe napięcie jony nie mogą przedostać się do swojej elektrody ale pod wpływem sił

elektrostatycznych gromadzą się w jej pobliżu. Na granicy elektrod i elektrolitu tworzą się dwie warstwy, gdzie gromadzą się nośniki prądu. Dzięki bardzo małej grubości powłoki izolacyjnej i zastosowaniu węgla aktywowanego, który posiada ogromną powierzchnię czynną ( 500 – 2000 m<sup>2</sup>/g), do budowy elektrod, otrzymuje się bardzo duże pojemności. [4,10]



Rys. 1. Schemat budowy superkondensatora

Na rysunku 1 przedstawiony został schemat budowy superkondensatora. Dwie elektrody, zazwyczaj wykonane z węgla aktywowanego, nasączone są elektrolitem (np. roztworem kwasu siarkowego  $H_2SO_4$ ) i przedzielone separatorem. Jest to cieniutka porowata folia z tworzywa sztucznego, która nie pełni roli klasycznego dielektryka. Separator uniemożliwia bezpośrednie zwarcie węglowych elektrod, jednak pozwala na przemieszczanie się jonów w elektrolicie, którym są nasączone obie elektrody.



Rys. 2. Schemat ładowania superkondensatora

Rysunek 2 przedstawia schemat procesu ładowania superkondensatora [10]. Napięcie przyłożone do elektrod superkondensatora wywołało ruch jonów w elektrolicie. Jony ujemne przemieściły się w stronę elektrody dodatniej, a jony dodatnie w kierunku elektrody ujemnej. Na granicy elektrolitu i elektrod wytworzyły się dwie warstwy, gdzie gromadzą się nośniki prądu (elektrony i jony). Stąd właśnie ultrakondensatory nazywane są kondensatorami dwuwarstwowymi (ang. double-layer).

Cechą charakterystyczną w sposobie pracy superkondensatorów jest wykorzystanie przewodności jonowej elektrolitu (energia magazynowana jest w przesunięciu jonów). Tradycyjne kondensatory opierają bowiem swoje działanie na polaryzacji dipoli dielektryka, a akumulatory energię otrzymują z reakcji chemicznych. Wykorzystanie ruchu jonów w elektrolicie pociąga za sobą określone własności elektryczne. Superkondensatory charakteryzują się dużą rezystancją wewnętrzną (od ok.  $100\ \Omega$  dla kondensatorów podtrzymujących, projektowanych na małe prądy, do rezystancji rzędu ułamków  $\Omega$  dla kondensatorów projektowanych na większe prądy rzędu amperów). Rezystancję tę modeluje się jako rezystor połączony szeregowo z superkondensatorem. W chwili początkowej, podczas ładowania, odkłada się na niej napięcie, które jest proporcjonalne do jej wartości i prądu ładowania. W przypadku klasycznych kondensatorów zjawisko to praktycznie nie występuje. Inną charakterystyczną cechą superkondensatorów jest niskie napięcia pracy. Wynika ono z wykorzystania zjawiska Helmholtz'a. Napięcie to mieści się zwykle w przedziale 2...5 V. Cecha ta znacznie ogranicza zastosowanie superkondensatorów. Dla zwiększenia napięcia pracy ultrakondensatory łączy się szeregowo. Powoduje to jednak zmniejszenie ich pojemności oraz przy nierównomiernym rozkładzie napięć może doprowadzić do uszkodzenia poszczególnych elementów.

## 2.2. Wprowadzenie do rachunku różniczkowego ułamkowego rzędu

---

Funkcja  $\Gamma(x)$  pełni rolę uogólnionej silni dla argumentów rzeczywistych lub zespolonych. W literaturze występują dwie definicje tej funkcji, całkowa i w postaci granicy. Dane są one następująco:

Definicja 1. *Funkcją  $\Gamma(x)$  nazywamy funkcję określoną następująco:*

1. *Definicja całkowa (Eulera):*

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \text{ gdzie } \operatorname{Re}(x) > 0 \quad (1)$$

2. Definicja w postaci granicy:

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\dots(x+n)} \quad (2)$$

Podstawową własnością funkcji  $\Gamma(x)$  jest:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad (3)$$

Z relacji tej wynika, że dla  $x \in \mathbb{N}$  otrzymujemy

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) = x(x-1)\Gamma(x-1) = n(n-1)(n-2)\dots 1 = n! \quad (4)$$

Oznacza to, że dla liczb naturalnych funkcja  $\Gamma(x+1)$  przyjmuje wartości silni liczby  $x$ .

Definicja całki ułamkowego rzędu opiera się na wzorze całkowania wielokrotnego:

$${}_a I_x^n f(x) = \int_a^x du_1 \int_a^{u_1} du_2 \dots \int_a^{u_{n-1}} f(u_n) du_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-u)^{n-1} f(u) du \quad (5)$$

gdzie  $n \in \mathbb{N}$  jest krotnością całkowania,  $(a, x)$  jest przedziałem całkowania funkcji  $f(u)$ .

Za pomocą funkcji  $\Gamma(n)$  otrzymujemy zależność Riemanna-Liouville'a na wyznaczenie całki ułamkowego rzędu:

$${}_a I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (6)$$

gdzie  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  jest rzędem całkowania w granicach  $(a, t)$  funkcji  $f(x)$ .

Definicję tę można rozszerzyć na  $\alpha < 0$  w następujący sposób:

Definicja 2. *Pochodno-całka ułamkowego rzędu w definicji Riemanna-Liouville'a dana jest następująco:*

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{d^k}{dt} {}_a I_t^{(\alpha-k)} f(t) = \frac{1}{\Gamma(k-\alpha)} \frac{d^k}{dt} \int_a^t (t-\tau)^{k-\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (7)$$

gdzie:

$$k-1 \leq \alpha \leq k \quad k \in Z$$

Dla  $\alpha > 0$  otrzymujemy pochodną ułamkowego rzędu, dla  $\alpha < 0$  całkę ułamkowego rzędu, a dla  $\alpha = 0$  tą samą funkcję.

Przekształcenie Laplace'a pochodno-całki ułamkowego rzędu, danej definicją R-L, ma następującą postać:

$$L[{}_0 D_t^\alpha f(t)] = \left\{ \begin{array}{ll} s^\alpha F(s) & \alpha < 0 \\ s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{j-1} s^k {}_0 D_x^{\alpha-k-1} f(0) & \alpha > 0, \quad j-1 < \alpha \leq j \in N \end{array} \right\} \quad (8)$$

### 2.3. Charakterystyka Bode'go członu całkującego ułamkowego rzędu

Człon całkujący ułamkowego rzędu dany jest następującą transmitancją:

$$G(s) = \frac{1}{(Ts)^\alpha} \quad (9)$$

Transmitancja widmowa takiego członu dana jest następująco:

$$G(j\omega) = \frac{1}{(Tj\omega)^\alpha} = \frac{1}{(T\omega)^\alpha \left( \cos \frac{\pi}{2} \alpha + j \sin \frac{\pi}{2} \alpha \right)} \quad (10)$$

Moduł transmitancji widmowej dany jest następująco:

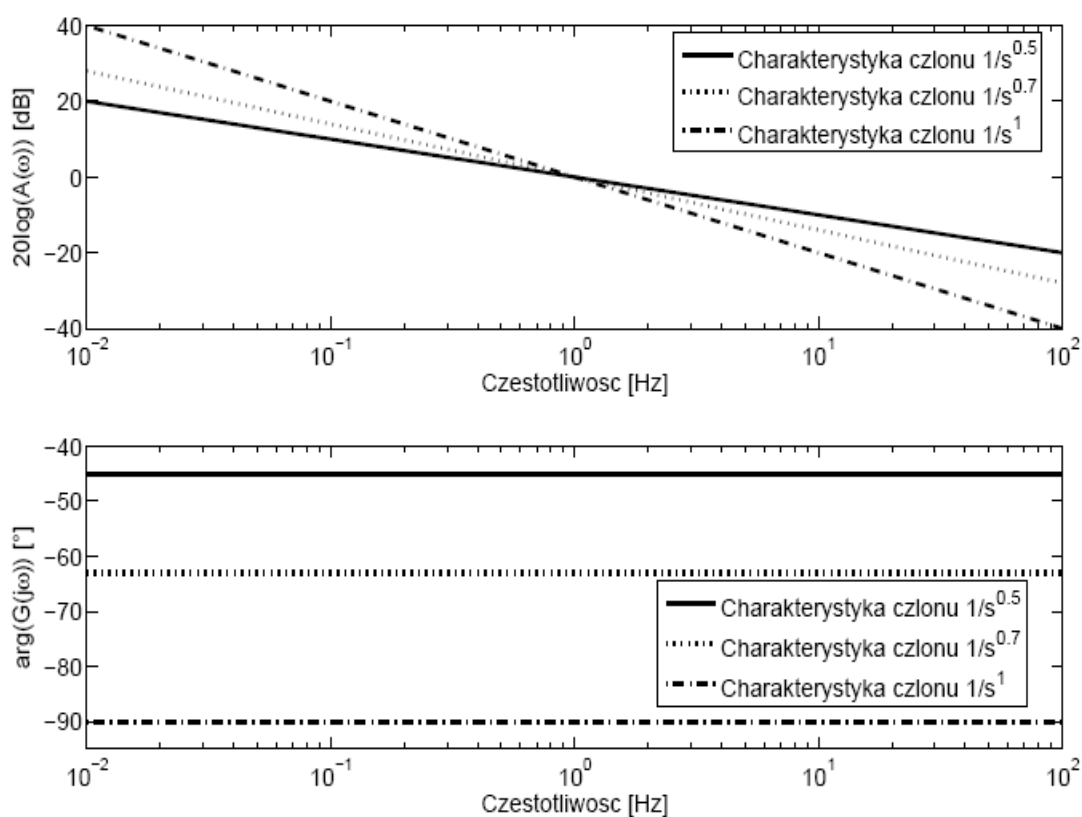
$$A(\omega) = \sqrt{\frac{(\cos^2 \frac{\pi}{2} \alpha + \sin^2 \frac{\pi}{2} \alpha)}{(T\omega)^{2\alpha}}} = \frac{1}{(T\omega)^\alpha} \quad (11)$$

Logarytm modułu integratora wygląda następująco:

$$M(\omega) = 20 \log A(\omega) = -\alpha 20 \log(T) - \alpha 20 \log(\omega)$$

Podobnie otrzymuje się funkcję przesunięcia fazowego:

$$\varphi(\omega) = \arg \left[ \frac{1}{(T\omega)^\alpha} j^{-\alpha} \right] = -\alpha \frac{\pi}{2} \quad (12)$$

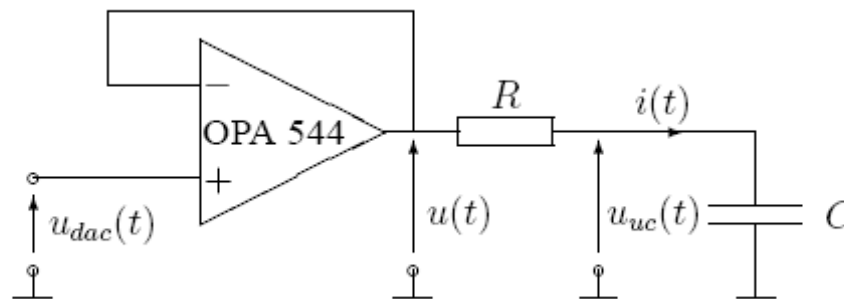


Rys. 3. Charakterystyka Bode'go transmitancji  $\frac{1}{s^\alpha}$  dla  $\alpha = 0.5, 0.7, 1$

Na rysunku 3 przedstawione zostały przykładowe charakterystyki Bode'go członu całkującego dla  $\alpha = 0.5, 0.7, 1$ . Jak można zauważyć nachylenie charakterystyki zależy od rzędu całkowania. Spadek wzmocnienia wynosi  $\alpha 20 \text{ db/dek}$ . Przesunięcie fazowe członu jest stałe i także proporcjonalne do rzędu  $-\alpha \frac{\pi}{2}$ . [1].

### 3. MODELOWANIE

#### 3.1. Układ pomiarowy



Rys. 4. Schemat układu pomiarowego

Układ pomiarowy, (rys. 4) użyty do zdejmowania charakterystyki częstotliwościowej superkondensatorów, składa się z wysokoprądowego wzmacniacza operacyjnego OPA544, który pracuje w układzie wtórnika napięciowego, rezystora  $R$  oraz badanego superkondensatora. Do pomiaru i zadawania napięć zastosowano kartę DSpace DS1102 DSP. Badania przeprowadzone zostały na trzech niskoprądowych superkondensatorach firmy Panasonic o pojemnościach  $C = 0.047 \text{ F}$ ,  $C = 0.1 \text{ F}$ ,  $C = 0.33 \text{ F}$  [6].

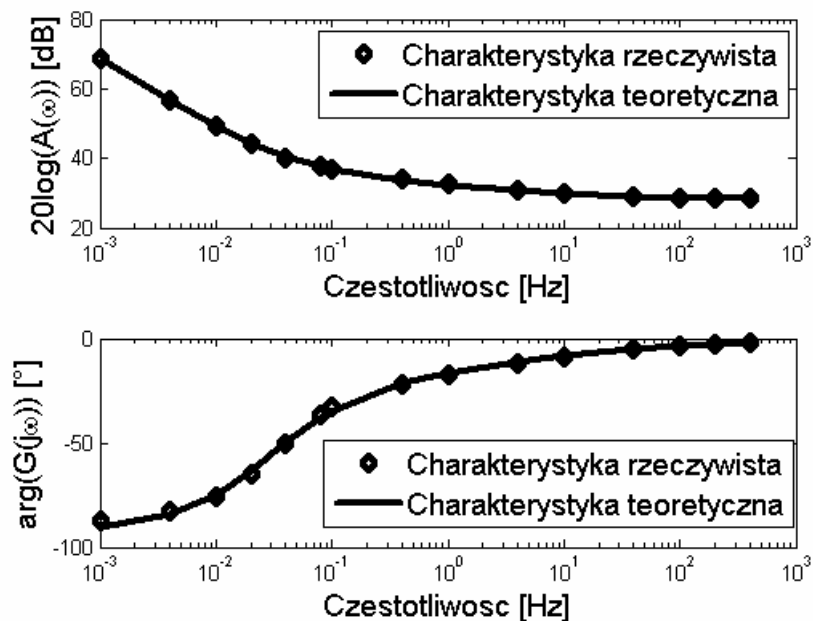
#### 3.2. Wyniki modelowania

Do modelowania superkondensatora na podstawie charakterystyki widmowej układu ciągłego ułamkowego rzędu została przyjęta następująca transmitancja [9]:

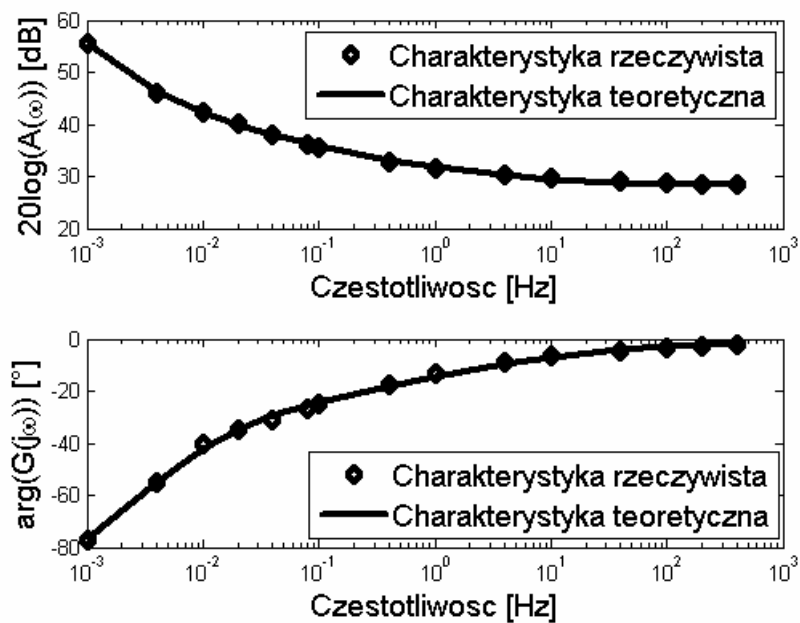
$$G(s) = \frac{U_{uc}(s)}{I(s)} = R_c + \frac{(T_1 + s)^\alpha}{(T_2 s)^\beta} \quad (13)$$

gdzie  $U_{uc}(s)$  jest transformatą Laplace'a napięcia na ultrakondensatorze, a  $I(s)$  jest transformatą prądu płynącego przez ultrakondensator.

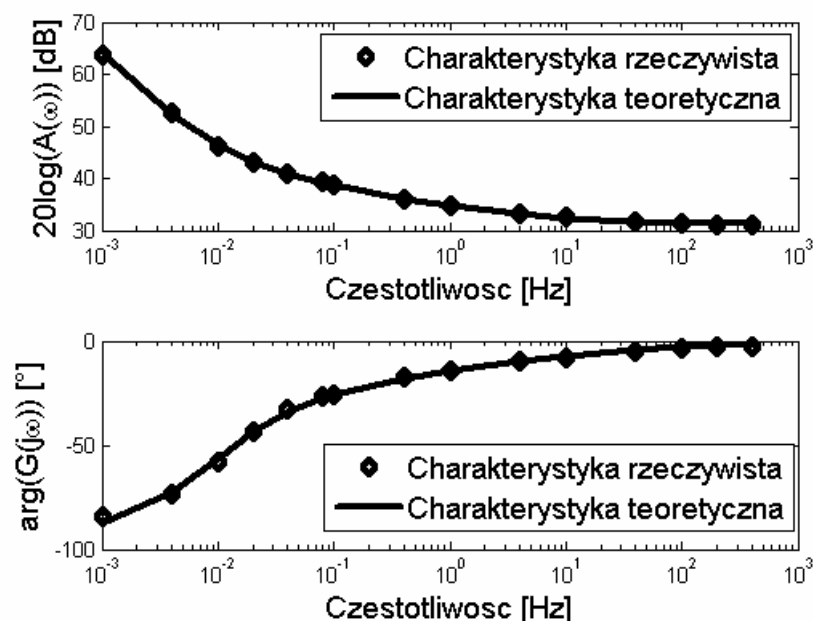




Rys. 5. Logarytmiczna charakterystyka amplitudowa i fazowa ultrakondensatora o pojemności 0.047 F



Rys. 6. Logarytmiczna charakterystyka amplitudowa i fazowa ultrakondensatora o pojemności 0.1 F



Rys. 7. Logarytmiczna charakterystyka amplitudowa i fazowa ultrakondensatora o pojemności 0.33 F

Rysunki 5, 6 i 7 przedstawiają wyniki identyfikacji parametrów modelu na podstawie dopasowania parametrów charakterystyki teoretycznej do otrzymanej charakterystyki rzeczywistej superkondensatorów o pojemnościach  $C = 0.047$  F,  $C = 0.1$  F,  $C = 0.33$  F. W wyniku tego dopasowania otrzymano następujące parametry modelu ciągłego:

TABELA 1

Parametry modelu ciągłego otrzymane w wyniku dopasowania charakterystyk.

| Pojemność [F] | $\alpha$ | $\beta$ | $T_1$  | $T_2$  | $R_c$ [ $\Omega$ ] |
|---------------|----------|---------|--------|--------|--------------------|
| 0.047         | 0.48     | 0.92    | 0.1958 | 0.0319 | 25.2430            |
| 0.1           | 0.48     | 0.92    | 0.1113 | 0.0288 | 35.2773            |
| 0.33          | 0.48     | 0.92    | 0.0630 | 0.0460 | 25.4576            |

Na rysunkach 5, 6 i 7 widać wyraźnie, że poprzez zastosowanie modelu opartego na układzie ciągłym ułamkowego rzędu otrzymano bardzo dobrą zgodność charakterystyk modelu z danymi eksperymentalnymi. Otrzymane parametry pokazują, że zależność pomiędzy otrzymanymi parametrami modelu

i superkondensatora nie jest trywialna, jednakże widać już zależność parametru  $T_1$  od pojemności superkondensatorów. Dalsza analiza otrzymanych parametrów wymagać będzie pomiarów rzeczywistej pojemności i rezystancji superkondensatorów.

## 4. PODSUMOWANIE

---

W pracy przedstawione zostało modelowanie ultrakondensatora za pomocą modelu o ułamkowym rzędzie różniczkowym. Wyniki badań są bardzo obiecujące. Otrzymana charakterystyka teoretyczna pokrywa się z charakterystyką rzeczywistą w pełnym zakresie częstotliwości.

Dalsze prace będą miały na celu stworzenie modułu testującego ultrakondensatory. Wykonywane będą testy wpływu starzenia się oraz przepięć na zmianę charakterystyki superkondensatora. Ciekawym problemem jest także analiza parametrów modelu w celu znalezienia ich relacji z fizycznymi parametrami superkondensatorów. Informacje te posłużą do budowy układu detekcji błędów.

## LITERATURA

1. Dzieliński A., Sierociuk D.: Ultracapacitor modeling and control using discrete fractional order state-space model. *Acta Montanistica Slovaca*, nr 13(1), str. 136-145, rok 2008.
2. Burke A.: Review of ultracapacitor technologies for vehicle applications. *AABC*, (2), 2001.
3. Faranda R., Gallina M., Son D.T.: A new simplified model os double-layer capacitors. In *Proceedings of International Conference on Clean Electrical Power*, 2007. ICCEP '07., str. 706-710, 2007.
4. Górecki P.: 2700 Faradów, czyli super(ultra)kondensatory dla wszystkich. *Elektronika dla wszystkich*. Nr. 6, str. 21-24, 2001.
5. Oldham K.B., Spanier J.: *The fractional calculus*. Academic Press, 1974.
6. Panasonic. *Electric Double Layer Capacitor(Gold Capacitor), Series SD, Catalog, 2006*. <http://industrial.panasonic.com/www-data/pdf/ABC0000/ABC0000CE1.pdf>.
7. Podlubny I.: *Fractional differential equations*. Academic Press, 1999.
8. Podlubny I.: Numerical solution of ordinary fractional differentia equations by the fractional difference metod. In G. Ladas S. Elaydi, I. Gyori, editor, *Advances in Difference Equation*, str. 507-516, Amsterdam, June 1997.
9. Quintana J.J., Ramos A., Nuez I.: Identification of the fractional impedance of ultracapacitors. In *Proceedings of the 2nd IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications*. Tytuł artykułu. IFAC FDA'06, Porto, Portugal, 19-21 July, 2006.

10. Sierociuk D.: Estymacja i sterowanie dyskretnych układów dynamicznych ułamkowego rzędu opisanych w przestrzeni stanu, Rozprawa doktorska. Warszawa, 2007.
11. Zorpette G.: Super charged. IEEE Spectrum, 42(1), str 32–37, 2005.

*Rękopis dostarczono dnia 3.12.2008 r.*

**Opiniował: prof. dr hab. inż. Antoni CIEŚLA**

## ULTRACAPACITOR MODELLING USING FRACTIONAL CALCULUS

Grzegorz SARWAS

**ABSTRACT** *In the paper using of the fractional calculus to modeling dynamic of the ultracapacitor is presented. The author used experimental setup contain electronic system with high current amplifier OPA 544 and the DSpace DS1102 DSP control card to obtain frequency diagrams of ultracapacitor. By using diagrams matching the parameters of the fractional order model was obtained. The result obtained by the author are very precise in wide range of frequencies. The future work will be focused on finding the dependency between parameters of the fractional order model and physical parameters of the ultracapacitor. This information will be also used for constructing the fault detection in circuit with ultracapacitor.*