

Krystyn PAWLUK

## PERTURBACJE Z OBLICZANIEM POLA MAGNETYCZNEGO SOLENOIDU

**STRESZCZENIE** *Przeanalizowano algorytmy do obliczania indukcji magnetycznej w solenoidzie z uwzględnieniem modeli strukturalnych o różnych stopniach uproszczenia, pod kątem widzenia wykorzystania wyników obliczeń przy analizie rozwiązań technicznych układów pomiarowych wykorzystujących zjawisko magnetoptyczne Faradaya. Korzystając z opracowanego przez autora pakietu programów komputerowych zaprezentowano niektóre wyniki obliczeń składowej osiowej i radialnej indukcji magnetycznej w samym solenoidzie i poza jego krańcami, co pozwoliło ocenić praktyczną dopuszczalność wybranych modeli strukturalnych z punktu widzenia osiągniętych dokładności obliczeń.*

**Słowa kluczowe:** prawo Biot-Savarta, pole magnetyczne, solenoid

### 1. WPROWADZENIE

---

Zainteresowanie tematem obliczania pola magnetycznego w solenoidzie wynika z potrzeb projektu badawczego<sup>\*)</sup> prowadzonego w Instytucie Elektrotechniki, którego przedmiotem jest zastosowanie rotacji Faradaya w układach zawierających maszyny i aparaty elektryczne. Zjawisko magnetoptyczne zwane zjawiskiem (lub rotacją) Faradaya polega na tym, że

---

<sup>\*)</sup>Projekt badawczy Nr N N510 387735 Badania rozkładu pól magnetycznych w urządzeniach elektromagnetycznych z wykorzystaniem efektów magnetoptycznych w światłowodach.

---

**prof. dr hab. inż. Krystyn PAWLUK**  
e-mail: pawluk@iel.waw.pl

Zakład Maszyn Elektrycznych  
Instytut Elektrotechniki

gdy na liniowo spolaryzowany strumień świetlny w środowisku dielektrycznym oddziałuje stacjonarne pole magnetyczne, którego wektor indukcji jest skierowany zgodnie z kierunkiem strumienia świetlnego, to jego płaszczyzna polaryzacji ulega skręceniu o kąt:

$$\beta = \mathcal{V} B d \quad (1)$$

gdzie  $B$  – indukcja magnetyczna,  $d$  – długość obszaru pola magnetycznego działającego na strumień świetlny,  $\mathcal{V}$  – stała Verdet, wyrażona w  $\text{rad}/(\text{T}\cdot\text{m})$ . Kierunek skręcenia płaszczyzny polaryzacji może być zgodny z ruchem wskazówek zegara lub przeciwny, w zależności od tego, czy kierunki strumienia świetlnego i wektora indukcji magnetycznej są równo- czy antyrównoległe.

Na zjawisku Faradaya opiera się działanie pewnych przyrządów pomiarowych. W Instytucie Elektrotechniki prowadzi się aktualnie prace badawcze co do możliwości jego wykorzystania w maszynach i aparatach elektrycznych [8]. Odpowiednie konstrukcje mogą polegać na usytuowaniu światłowodu wewnątrz solenoidu wytwarzającego pole magnetyczne. Przez światłowód przepuszcza się liniowo spolaryzowany strumień świetlny i mierzy się skręcenie kąta polaryzacji po drugiej stronie solenoidu.

Niniejsza praca jest poświęcona technice obliczania indukcji magnetycznej w prostoliniowym solenoidzie, zarówno w jego wnętrzu jak i w obszarach poza właściwym solenoidem, tj. wszędzie tam, gdzie miałby być usytuowany światłowód. Indukcja magnetyczna wewnątrz solenoidu nie jest stała w poszczególnych punktach solenoidu, lecz wykazuje charakterystyczną zmienność osiową i promieniową. Żeby na podstawie zmierzonego skręcenia kąta polaryzacji promienia świetlnego można było wnioskować o wartości indukcji magnetycznej, jej rozkład przestrzenny w samym solenoidzie i poza jego krańcami powinien być ilościowo rozpoznany i obliczony z wystarczającą dokładnością.

Klasyczna elektrotechnika zajmowała się problemem pola magnetycznego w solenoidzie już od bardzo dawna dostarczając szeregu wzorów matematycznych na obliczanie indukcji magnetycznej w solenoidzie, patrz [3] i [6]. Poszczególne wyrażenia podawane przez różnych autorów różnią się między sobą przyjmowanymi założeniami upraszczającymi, co skutkuje pewnymi rozbieżnościami w dokładności obliczanych wyników.

Przystępując do zreferowania tego problemu wprowadzimy podstawowe oznaczenia:

$N_s$  – liczba zwojów cewki solenoidu, przy czym ograniczamy się tutaj do uzwojenia jednowarstwowego<sup>1)</sup>,

<sup>1)</sup> Uzwojenie wielowarstwowe uwzględnia się w drodze prostej superpozycji wyników.

- $L_s$  – długość solenoidu, którą traktujemy jako równą:  $p_s (N_s - 1)$ , gdzie  $p_s$  reprezentuje poskok osiowy uzwojenia równy szerokości przewodu liczonej wraz z izolacją plus odstęp międzyuzwojeniowy,
- $R_s$  – średni promień solenoidu liczony od jego osi do środka przekroju przewodu cewki,
- $I_s$  – prąd solenoidu.

Przytoczymy tu uproszczenia przyjmowane przez różnych autorów w teorii pola magnetycznego solenoidu [3], [6], [7]. Według zasadniczej idei tych uproszczeń rozmiar przekroju przewodu tworzącego solenoid jest zaniewany. Wyróżnimy tu 3 podstawowe warianty:

1. Działanie magnetyzujące cewki sprowadza się do działania okładu prądu kreślonego jako  $\tau_s = N_s I_s / L_s$ . Okład ten traktuje się jako rozłożony równomiernie: obwodowo na promieniu  $R_s$  i osiowo na całej długości  $L_s$  solenoidu; wymiar geometryczny przekroju przewodu jest w tym modelu zaniewany.
2. Cewka solenoidu jest modelowana przez układ  $N_s$  współosiowych cewek o promieniu  $R_s$ , usytuowanych w odstępach  $p_s$  i wiodących prąd  $I_s$ , przy czym prąd ten traktuje się jako skupiony w środku przekroju przewodu. Tak jak w poprzednim modelu wymiar przekroju przewodu jest tu więc też pomijany. Zaniebuje się także wpływ prądu w połączeniach poszczególnych cewek, który nota bene może podlegać oddzielnemu obliczeniu.
3. Cewka solenoidu tworzy linię spiralną o promieniu  $R_s$  i o poskoku  $p_s$ , co odpowiada rzeczywistej strukturze cewki solenoidu, lecz prąd  $I_s$  jest tu również traktowany jako skupiony w środku powierzchni przekroju przewodu.

Wszystkie trzy wymienione tu modele mogą mieć zastosowanie do obliczenia indukcji magnetycznej w solenoidzie w tych przypadkach, gdy stosunek wymiarów przekroju przewodu do promienia solenoidu  $R_s$  jest dostatecznie mały. Gdy to nie zachodzi, to obliczanie pola w solenoidzie i poza jego krańcami powinno uwzględniać rzeczywisty, równomierny rozkład prądu po całej powierzchni przekroju przewodu. Modele odpowiadające tej sytuacji nie są na ogół rozpatrywane w monografiach z teorii elektrotechniki. W niniejszej pracy zamieszczono odpowiednie wyrażenia całkowe, którymi autor posłużył się opracowując programy komputerowe do obliczania indukcji magnetycznej w solenoidzie z uwzględnieniem rzeczywistych wymiarów przewodów, patrz Dodatek 2. Podano tu również wybrane wyniki obliczeń charakteryzujące stopień dopuszczalności niektórych uproszczeń, wszystko pod kątem widzenia

rozkładów indukcji magnetycznej, która ma oddziaływać na światłowód z liniowo spolaryzowanym promieniem świetlnym w urządzeniach elektrotechnicznych wykorzystujących zjawisko Faradaya.

## 2. PRAWO BIOTA-SAVARTA

Podstawą fizyczną do obliczania wielkości pola magnetycznego w solenoidzie jest prawo Biota-Savarta, zapisywane klasycznie jako zależność natężenia pola magnetycznego (w wybranym punkcie P przestrzeni) od prądu elektrycznego w przewodzie określonego kształtu, przytaczane tradycyjnie w postaci:

$$\mathbf{H}(\mathbf{P}) = -\frac{I_s}{4\pi} \int_C \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}_{QP}}{r_{QP}^3} \quad (2)$$

gdzie C symbolizuje trasę przewodu wiodącego prąd elektryczny o wektorowym elemencie różniczkowym prądu  $I_s d\mathbf{l}$ , przy czym  $\mathbf{r}_{QP}$  reprezentuje wektor wodzący (o normie  $r_{QP}$ ) skierowany od usytuowanego na C punktu źródłowego Q do punktu polowego P.

W interesujących nas zastosowaniach wyrażenie (2) dotyczy punktu P w przestrzeni z wyłączeniem samego przewodu. Gdy przewód znajduje się w środowisku powietrznym lub dielektrycznym, to indukcję magnetyczną w P oblicza się oczywiście jako

$$\mathbf{B}(\mathbf{P}) = \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{P}) \quad (3)$$

gdzie  $\mu_0$  oznacza stałą magnetyczną.

W niniejszym artykule rozpatrzono najpierw wymienione powyżej podejścia przybliżone zaniebujące wymiary geometryczne przekroju przewodu. W tych przypadkach prawo Biota-Savarta (2) (z uzupełnieniem (3)) stanowi wystarczającą podstawę algorytmów obliczeniowych.

W przypadku, gdy wymiar przekroju przewodu nie może być zaniebany, prawo Biota-Savarta musi uwzględniać również całkowanie po powierzchni przekroju przewodu i trzeba je rozpatrywać w rozwiniętej postaci; zapisując je dla wektora indukcji magnetycznej, otrzymamy:

$$\mathbf{B}(\mathbf{P}) = -\frac{\mu_0 \sigma_s}{4\pi} \int_S \int_C \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}_{QP}}{r_{QP}^3} dS \quad (4)$$

gdzie  $\sigma_s$  oznacza gęstość prądu w przewodzie,  $S$  symbolizuje przekrój przewodu, a  $ds$  to jego skalarny element różniczkowy. Analiza numeryczna dostarcza wskazówek, w jakich przypadkach rzeczywisty rozmiar przewodu solenoidu powinien być w obliczeniach uwzględniany – wyrażenie (4), a kiedy dopuszczalne jest interpretowanie prądu przewodu solenoidu jako skupionego w geometrycznym środku jego przekroju – wyrażenia (2) i (3).

Zapisanie konkretnych wyrażeń matematycznych na indukcję magnetyczną  $\mathbf{B}$  w solenoidzie i w jego otoczeniu, ściślej na jej trzy składowe, przy uwzględnieniu skończonych wymiarów przekroju przewodu wymaga całkowania numerycznego; w opracowanych programach komputerowych autor posłużył się kwadraturą Gaussa, a wyrażenia szczegółowe zastosowanej tu jej wersji dwuwymiarowej przytoczono w Dodatku 2.

### 3. POLE MAGNETYCZNE NA OSI PĘTLI Z PRĄDEM

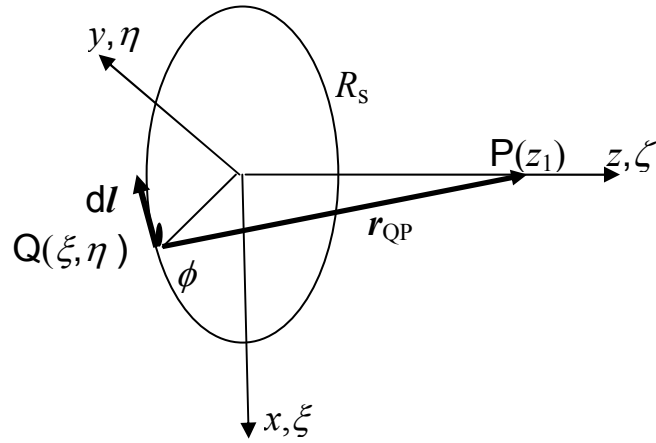
W zależności od rodzaju przewodu pętli z prądem można wyróżnić trzy przypadki:

- gdy cały prąd traktuje się jako skupiony w geometrycznym środku przekroju przewodu pętli (rys.1),
- gdy uwzględnia się, że gęstość prądu jest rozłożona równomiernie po całym przekroju prostokątnym przewodu, o bokach  $2a \times 2b$  (rys. 2),
- i podobnie dla przewodu o przekroju kołowym, o średnicy  $2R_c$  (rys. 3).

#### Przypadek 1.

Pętlę w kształcie okręgu traktujemy jako model podstawowy dla całej teorii solenoidu; podamy tu formalny tok rozumowania prowadzący od prawa Biota-Savarta do wyrażenie na indukcję magnetyczną w osi pętli.

Rysunek 1 pokazuje pętlę utworzoną z przewodu (o zaniedbywanych rozmiarach przekroju) wiodącego prąd elektryczny  $I_s$ , która jest uformowana jako okrąg koła o promieniu  $R_s$ . Przyjmijmy globalny układ współrzędnych prostokątnych  $(x, y, z)$  o początku w geometrycznym środku pętli, przy oznaczeniach  $i, j, k$ , dla odpowiednich wektorów jednostkowych. Zastosujemy podwójne oznaczenia poszczególnych składowych: dla punktu polowego  $P$  zachowamy oznaczenia podstawowe  $x, y, z$ , przy czym pętla z prądem będzie usytuowana w płaszczyźnie  $(x, y)$ , a osi pętli przyporządkujemy zmienną  $z$ . Rozpoczynając analizę od pola tylko na osi pętli ograniczamy się do punktu polowego  $P(0, 0, z_1)$ , który możemy oznaczać skrótowo jako  $P(z_1)$ . Dla punktu źródłowego  $Q$  stosujemy oznaczenia współrzędnych o bliźniaczych symbolach  $\xi, \eta, \zeta$ . Punkt źródłowy rozpatrujemy jako zlokalizowany w geometrycznym środku przekroju przewodu pętli, tak więc  $Q(\xi, \eta, 0) = Q(\xi, \eta)$ .



Rys. 1. Struktura geometryczna pętli z prądem

Przez  $d\mathbf{l} = -i R_s \sin \phi d\phi + j R_s \cos \phi d\phi$  oznaczamy wektorowy element różniczkowy trasy opisującej pętlę, a wyrażenie  $I_s d\mathbf{l}$  reprezentuje wektorowy element różniczkowy prądu pętli. Wektor wodzący  $\mathbf{r}_{QP}$  jest skierowany od punktu źródłowego Q do polowego P i wyraża się jak następuje:

$$\mathbf{r}_{QP} = i(0 - R_s \cos \phi) + j(0 - R_s \sin \phi) + k(z_1 - 0) = -i R_s \cos \phi - j R_s \sin \phi + k z_1 \quad (5)$$

a jego norma euklidesowa jest dana wyrażeniem:

$$r_{QP} = |\mathbf{r}_{QP}| = \sqrt{R_s^2 \cos^2 \phi + R_s^2 \sin^2 \phi + z_1^2} = \sqrt{R_s^2 + z_1^2} \quad (6)$$

Zastosujemy prawo Biota-Savarta, przy czym iloczyn wektorowy zapisujemy w postaci wyznacznika:

$$\mathbf{B}(\mathbf{P}) = -\frac{\mu_0 I_s}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -R_s \sin \phi d\phi & R_s \cos \phi d\phi & 0 \\ -R_s \cos \phi & -R_s \sin \phi & z_1 \end{vmatrix}}{(R_s^2 + z_1^2)^{3/2}} \quad (7)$$

Pierwsza, proporcjonalna do  $\mathbf{i}$  składowa iloczynu wektorowego ma licznik równy  $z_1 R_s \cos \phi d\phi$ , a więc po całkowaniu w granicach kąta pełnego znika, i podobnie druga składowa proporcjonalna do  $\mathbf{j}$ , czego oczywiście można się spodziewać ze względu na symetrię osiową pola magnetycznego. Tak więc w punkcie P istnieje tylko składowa z-owa indukcji magnetycznej, a więc tylko wyraz proporcjonalny do wektora jednostkowego  $\mathbf{k}$ . Po wykonaniu całkowania,

które w tym przypadku sprowadza się do prostego wymnożenia przez  $2\pi$ , otrzymuje się następujące wyrażenie:

$$B_z(z_1) = \frac{\mu_0 I_s}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R_s^2 \cos^2 \phi + R_s^2 \sin^2 \phi)}{(R_s^2 + z_1^2)^{3/2}} d\phi = \frac{\mu_0 I_s}{2} \frac{R_s^2}{[R_s^2 + z_1^2]^{3/2}} \quad (8)$$

które w podręcznikach elektrotechniki jest powszechnie przytaczane w postaci:

$$B_z(z_1) = \frac{\mu_0 I_s}{2R_s} \frac{1}{\left[1 + \left(z_1/R_s\right)^2\right]^{3/2}}, \text{ patrz np. [3].}$$

Przykładowo dla danych:  $I_s = 1\,000\text{ A}$  i  $R_s = 10\text{ mm}$  otrzymuje się dla punktu połowego P określonego przez  $z_1$  następujące wartości  $B_z(z_1)$ :

$$\begin{aligned} z_1 = 0\text{ mm}, & \quad B_z(0) = 62,832\text{ mT} \\ z_1 = 5\text{ mm}, & \quad B_z(5) = 32,170\text{ mT} \\ z_1 = 10\text{ mm}, & \quad B_z(10) = 22,214\text{ mT}. \end{aligned}$$

### Przypadek 2.

Rozpatrujemy przewód pętli o bokach przekroju  $2a$  i  $2b$ , rysunek 2. Za źródło wzbudzenia pola przyjmujemy teraz nie prąd elektryczny, lecz gęstość prądu  $\sigma_2 = I_s/4ab$  rozłożoną równomiernie po całym przekroju przewodu. Teraz zamiast wzorów (2) i (3) trzeba zastosować wyrażenie (4) uwzględniające całkowanie po powierzchni przekroju. Zastosujemy tutaj cylindryczny układ współrzędnych  $(r, \theta, z)$ , które dla punktów źródłowych oznaczymy jako  $(\rho, \phi, \zeta)$ . Dzięki symetrii osiowej struktury pętli o prostokątnym przekroju przewodu można przy całkowaniu posłużyć się prostokątnym, dwuwymiarowym układem współrzędnych globalnych  $(\rho, \zeta)$ , tj. podukładem globalnego układu cylindrycznego  $(r, \theta, z)$  z oznaczeniami zmiennych jak dla punktu źródłowego.

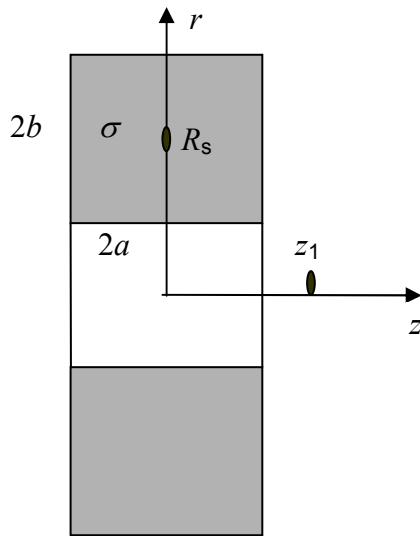
Wyrażenie na współrzędną osiową indukcji magnetycznej w punkcie połowym  $P(z_1)$  będzie w tym układzie określone następującą całką powierzchniową:

$$B_z(z_1) = \frac{\mu_0 \sigma_2}{2} \int_{R_s-b}^{R_s+b} \int_{-a}^a \frac{\rho^2 d\zeta d\rho}{\left[\rho^2 + (z_1 - \zeta)^2\right]^{3/2}} \quad (9)$$

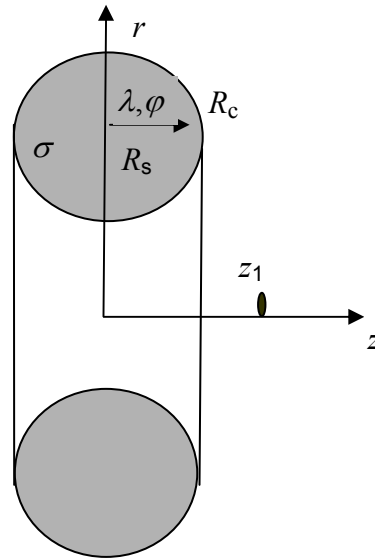
którą można obliczyć kwadraturą Gaussa, patrz Dodatek 2, jak następuje:

$$B(z_1) = \frac{\mu_0 I_s}{8} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\rho_j^2 \cdot W_i \cdot W_j}{\left[ \rho_j^2 + (z_1 - \zeta_i)^2 \right]^{3/2}} \quad (10)$$

gdzie  $\zeta_i = a \cdot U_i$ ;  $\rho_j = R_s + b \cdot U_j$ , przy czym  $U_i, U_j, W_i, W_j$  – współczynniki i wagi kwadratury rzędu  $N$ , np.  $N = 4$  – patrz Dodatek 2.



Rys. 2. Pętla z prądem o przekroju prostokątnym



Rys. 3. Pętla z prądem o przekroju kołowym

### Przypadek 3.

Rozpatrzmy teraz przewód o przekroju kołowym. W tym przypadku wygodnie jest posłużyć się pomocniczo nowym lokalnym układem współrzędnych biegunowych  $(\lambda, \varphi)$  zdefiniowanym na powierzchni przekroju przewodu (rys. 3). Składowa osiowa indukcji magnetycznej na osi pętli wyraża się teraz następującą całką:

$$B_z(z_1) = \frac{\mu_0 \sigma_3}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_c} \frac{\rho^2 \cdot \lambda \, d\lambda \, d\varphi}{\left[ \rho^2 + (z_1 - \zeta)^2 \right]^{3/2}} \quad (11)$$

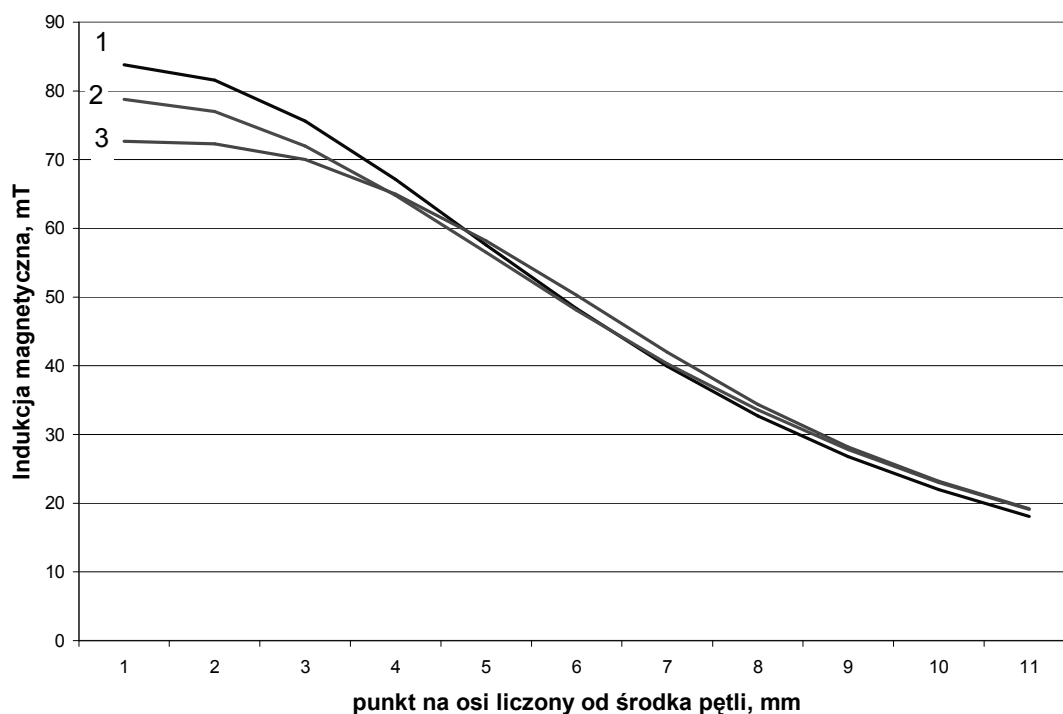
gdzie  $\rho = R_s + \lambda \sin \varphi$ ,  $\zeta = \lambda \cos \varphi$ . Stosownie do (D2-2) obliczenie tej całki można przeprowadzić podaną poniżej kwadraturą, w której współczynniki i wagi kwadratury Gaussa stosuje się tylko do zmiennej  $\rho$ , a wobec zmiennej  $\varphi$  przyjmuje się dyskretyzację polegającą na  $M$ -krotnym (np.  $M = 16$ ) podziale kąta pełnego. Tak więc, po dokonaniu stosownych podstawień będzie:



$$B_z(z_1) = \frac{\mu_0 I_s}{2 R_c} \frac{2\pi}{M} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \frac{\rho_{ij}^2 \cdot \lambda_i \cdot W_i}{\left[ \rho_{ij}^2 + (z_1 - \zeta_{ij})^2 \right]^{3/2}} \quad (12)$$

gdzie  $\lambda_i = \frac{R_c}{2}(1+U_i)$ ;  $\varphi_j = \frac{2\pi}{M}(j-1)$ ;  $\rho_{ij} = R_s + \lambda_i \sin \varphi_j$ ;  $\zeta_{ij} = \lambda_i \cos \varphi_j$ .

Porównanie wyników obliczenia składowej osiowej indukcji magnetycznej wzbudzonej prądem pojedynczej pętli dla trzech wyżej omówionych wariantów pokazano na rysunku 4. W punkcie P odpowiadającym  $z_1 = 0$  (środek geometryczny pętli) różnica na korzyść prądu skupionego w osi przekroju przewodu (krzywa 1) jest wyraźna, 83,8 mT wobec 78,0 mT dla przekroju kołowego (krzywa 2) i 72,7 mT dla przekroju kwadratowego (krzywa 3).



**Rys. 4. Składowa osiowa indukcji magnetycznej wzbudzonej pętlą z prądem  $I_s = 1\,000\text{ A}$ ,  $R_s = 7,5\text{ mm}$  : 1 – prąd skupiony w osi przekroju pętli, 2 – przewód o przekroju kołowym  $R_c = 5,0\text{ mm}$ , 3 – przewód o przekroju kwadratowym  $a = b = 5,0\text{ mm}$**

W miarę oddalania się punktu polowego od środka pętli następuje oczywiście zmniejszanie wartości indukcji magnetycznej, lecz dla wartości  $z_1$  zbliżonej do krańca bocznego przekroju przewodu ( $z_1 \approx a$ , czy też,  $z_1 \approx R$ ) indukcja magnetyczna dla przypadku kwadratowego nieznacznie przewyższa indukcję przy przewodzie kołowym, co oczywiście tłumaczy się oddziaływaniem gęstości prądu w obszarze dolnego naroża przekroju kwadratowego. Przy dalszym oddalaniu się punktu P( $z_1$ ) od pętli z prądem wpływ rozmiarów

przekroju przewodu zanika. Z danych powyższego przykładu wynika ważny wniosek, co do dopuszczalnych uproszczeń przy obliczaniu pola magnetycznego w całym solenoidzie sprowadzających się do dopuszczalności pomijania wpływu rozmiarów przekroju przewodu, szczególnie w przypadku dłuższych solenoidów.

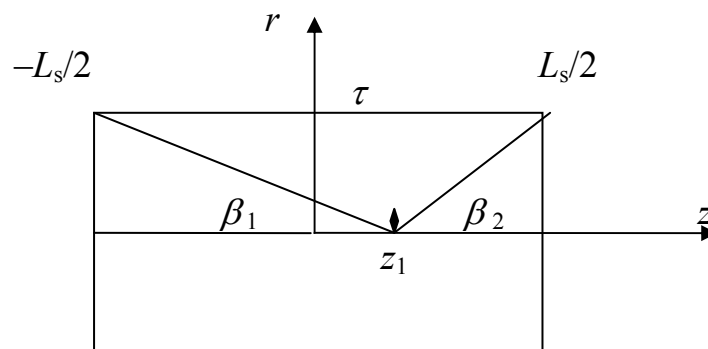
## 4. POLE MAGNETYCZNE W OSI SOLENOIDU

Przechodząc od analizy pojedynczej pętli do pola magnetycznego w osi solenoidu rozpatrzmy 3 modele strukturalne:

- model tubowy z okładem prądu,
- układ współosiowych pętli z prądem,
- solenoid o uzwojeniu spiralnym.

### 4.1 Model tubowy z okładem prądu

Najprostszym modelem strukturalnym solenoidu przytaczanym w podstawowych podręcznikach z zakresu elektromagnetyzmu, patrz [3] i [6], jest tuba o długości  $L_s$ , i o promieniu  $R_s$ , na powierzchni której występuje gęstość liniowa prądu (okład prądu) o wartości  $\tau_s = N_s I_s / L_s$  skierowana stycznie do powierzchni tuby (rys. 4).



Rys. 5. Tubowy model solenoidu z okładem prądu  $\tau$

Model ten o tyle różni się od pętli, że zamiast przyjmowania w obliczeniach stałej wartości prądu skupionego w środku przewodu pętli musi być przeprowadzone całkowanie gęstości liniowej prądu  $\tau$  względem zmiennej źródłowej  $\zeta$ . Zamiast wyrażenia (8) otrzymamy więc:

$$B_z(z_1) = \frac{\mu_0 \tau_s}{2} \int_{-L_s/2}^{L_s/2} \frac{R_s^2 d\zeta}{\left[ R_s^2 + (z_1 - \zeta)^2 \right]^{3/2}} \quad (13)$$

Wyrażenie to daje się scałkować analitycznie po podstawieniu:  $\zeta = z_1 - R_s \operatorname{ctg} \beta$

i konsekwentnie  $d\zeta = \frac{R_s}{\sin^2 \beta} d\beta$ , co prowadzi do prostego wzoru na składową

osiową indukcji magnetycznej w osi solenoidu reprezentowanego modelem tubowym z okładem prądu:

$$B_z(z_1) = \frac{N_s I_s}{2L_s} \int_{\beta_1}^{\pi - \beta_2} \sin \beta d\beta \quad (14)$$

w którym w granicach całki występują wartości kosinusów kątów  $\beta_1$  i  $\beta_2$  pokazanych na rysunku 5. Po scałkowaniu otrzymuje się:

$$B_z(z_1) = \frac{N_s I_s}{2L_s} [\cos \beta_1 + \cos \beta_2] \quad (15)$$

gdzie  $\cos \beta_{1,2} = \frac{L_s \pm 2z_1}{\sqrt{4R_s^2 + (L_s \pm 2z_1)^2}}$ .

Oczywiście powyższe wyrażenie wprowadza pełne uśrednienie wyników obliczenia i nie uwzględnia subtelnych wpływów rzeczywistych wymiarów przekroju uzwojenia solenoidu ani odstępów międzyzwojowych, które mają dyskretny charakter.

#### 4.2. Pole magnetyczne w osi układu współosiowych pętli z prądem

Solenoid można także analizować w oparciu o inny model uproszczony, jako układ identycznych, współosiowych pętli w liczbie  $N_s$  zasilanych

identycznym prądem  $I_s$ . Składową osiową indukcji magnetycznej w osi takiego układu otrzymuje się przez proste sumowanie indukcji wzbudzonej prądami poszczególnych pętli z uwzględnieniem ich wzajemnej odległości. W obliczeniach dogodnie jest przyjąć początek układu współrzędnych w geometrycznym środku układu pętli, tj. w środku pętli środkowej, gdy liczba pętli  $N_s$  jest liczbą nieparzystą, lub w środku między dwoma centralnymi pętlami przy parzystym  $N_s$ .

Na przykład w przypadku, gdy cały prąd poszczególnych pętli jest traktowany jako skupiony w środku przekroju przewodu, to dla składowej osiowej indukcji magnetycznej w osi solenoidu obowiązywać będzie odpowiednia, łatwa do zaprogramowania suma wyrażień (8),

$$B_z(z_1) = \frac{\mu_0 I_s}{2} \sum_{k=1}^{N_s} \frac{R_s^2}{\left[ R_s^2 + (z_1 - \zeta_k)^2 \right]^{3/2}} \quad (16)$$

gdzie  $\zeta_k = p_s \left( k - \frac{N_s + 1}{2} \right)$  określa położenie poszczególnych pętli względem środka solenoidu, przy czym  $p_s$  – poskok uzwojenia solenoidu.

W przypadku uwzględniania gęstości prądu rozłożonego równomiernie po powierzchni przekroju przewodu poszczególnych pętli, odpowiednie wyrażenia otrzymuje się w drodze prostych uogólnień wzorów (10) i (12). Będzie więc dla solenoidu o przewodzie prostokątnym, zgodnie z (D2-1):

$$B(z_1) = \frac{\mu_0 I_s}{8} \sum_{k=1}^{N_s} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\rho_j^2 \cdot W_i \cdot W_j}{\left[ \rho_j^2 + (z_1 - (\zeta_i + \zeta_k))^2 \right]^{3/2}} \quad (17)$$

i dla solenoidu o przewodzie o przewodzie okrągłym, zgodnie z (D2-2):

$$B_z(z_1) = \frac{\mu_0 I_s}{2 R_c} \frac{2\pi}{M} \sum_{k=1}^{N_s} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \frac{\rho_{ij}^2 \cdot \lambda_i \cdot W_i}{\left[ \rho_{ij}^2 + (z_1 - (\zeta_{ij} + \zeta_k))^2 \right]^{3/2}} \quad (18)$$

gdzie  $\zeta_k$  jak w (16),  $\zeta_i$  i  $\rho_j$  jak w (10), a  $\rho_{ij}$ ,  $\zeta_{ij}$  i  $\lambda_i$  jak w (12).

### 4.3. Pole magnetyczne w osi solenoidu o spiralnej linii uzwojenia

Najdokładniejsze obliczenie indukcji magnetycznej w osi solenoidu otrzymuje się traktując linię uzwojenia solenoidu jako odpowiadającą rzeczywistości linię spiralną  $S$  o średnim promieniu  $R_s$ , dla której równania we współrzędnych walcowych  $r, \theta, z$  (zapisane w bliźniaczych współrzędnych  $\rho, \phi, \zeta$  jak dla zmiennych punktu źródłowego) są następujące:

$$\rho = R_s \quad ; \quad \zeta = \frac{p_s}{2\pi} \phi \quad (19)$$

lub we współrzędnych kartezjańskich:

$$\xi = R_s \cos \phi \quad ; \quad \eta = R_s \sin \phi \quad ; \quad z = \frac{p_s}{2\pi} \phi \quad (20)$$

Początek układu współrzędnych wybiera się w geometrycznym środku solenoidu, który traktujemy jako zbudowany ze skończonej liczby  $N_s$  połączonych szeregowo identycznych zwojów spiralnych o poskoku  $p_s = L_s/N_s$  i o promieniu  $R_s$ . Zgodnie z powyższym płaszczyzna  $(x, y)$  jest tak usytuowana, że dla kąta  $\phi = 0$  punkt  $(x, y) = (R_s, 0)$  leży na linii spiralnej, jest więc dla pola magnetycznego punktem źródłowym o współrzędnych  $Q(R_s, 0)$ , a punkt  $(x, y) = (0, R_s)$  leży na  $1/4$  poskoku  $p_s$  od linii spiralnej i tym samym nie jest punktem źródłowym pola magnetycznego.

Zgodnie z powyższym wektor wodzący punktu  $P(z_1)$  na osi solenoidu liczony od punktu  $Q$  na linii spiralnej dany jest wyrażeniem

$$\mathbf{r}_{QP} = -\mathbf{i} R_s \cos \phi - \mathbf{j} R_s \sin \phi + \mathbf{k} \left( z_1 - \frac{p_s \phi}{2\pi} \right) \quad (21)$$

przy czym  $\phi \in [-N_s \pi, N_s \pi]$ , a normą euklidesową wektora wodzącego jest:

$$r_{QP} = |\mathbf{r}_{QP}| = \left[ R_s^2 + \left( z_1 - \frac{p_s \phi}{2\pi} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (22)$$

Prawo Biota-Savarta wyrażające indukcję magnetyczną na osi solenoidu przyjmuje postać:

$$B(P) = -\frac{\mu_0 I_s}{4\pi} \int_{-N_s\pi}^{N_s\pi} \frac{\begin{array}{ccc} i & j & k \\ -R_s \sin \phi d\phi & R_s \cos \phi d\phi & 0 \\ -R_s \cos \phi & -R_s \sin \phi & z_1 - \frac{p_s \phi}{2\pi} \end{array}}{\left( R_s^2 + \left( z_1 - \frac{p_s \phi}{2\pi} \right)^2 \right)^{3/2}} \quad (23)$$

przy czym całkowanie przebiega od minus do plus  $N_s/2$  krotności kąta  $2\pi$ .

Wybierając z (23) składnik proporcjonalny do wektora jednostkowego  $k$  i dokonując odpowiedniego całkowania (przez wprowadzenie nowej zmiennej  $\beta$ , podobnie jak w przypadku całki (13), znajduje się, patrz [7], że w punkcie połowym  $P(z_1)$  na osi solenoidu obowiązuje następujące wyrażenie analityczne na składową osiową indukcji magnetycznej:

$$B(z_1) = \frac{\mu_0 I_s}{2p_s} \left[ \frac{N_s p_s + 2z_1}{\sqrt{4R_s^2 + (N_s p_s + 2z_1)^2}} + \frac{N_s p_s - 2z_1}{\sqrt{4R_s^2 + (N_s p_s - 2z_1)^2}} \right] \quad (24)$$

Warto zwrócić uwagę, że ułamki w nawiasie kwadratowym określają te same kosinusy kątów  $\beta_1$  i  $\beta_2$ , które pokazano na rys. 4 w odniesieniu do modelu tubowego z okładem prądu.

Autorski program Solenoid\_1 z pakietu Solenoid, patrz Dodatek 1, jest przeznaczony do obliczania składowej osiowej indukcji magnetycznej dla określonej liczby punktów połowych na osi solenoidu (zarówno wewnątrz jak i poza jego krańcami) przy założeniu, że prąd jest traktowany jako skupiony w osi przewodu. Obliczenie jest realizowane według dwóch wariantów:

- S) – uzwojenie solenoidu ma kształt linii śrubowej,
- C) – uzwojenie solenoidu jest modelowane układem współosiowych pętli kołowych.

W tabeli 1 pokazano charakterystyczne różnice między wariantami S (lub C), a wariantem tubowym z okładem prądu, odnoszące się do wnętrza solenoidu o danych  $I_s = 1000$  A;  $R_s = 13,0$  mm;  $N_s = 40$ ;  $L_s = 47,0$  mm, stąd  $p_s = 1,175$  mm. W obliczonym przypadku obliczenie wg S daje wartości identyczne (przynajmniej w zakresie trzech miejsc znaczących) z wariantem C,

i to zarówno wewnątrz solenoidu jak i poza jego końcami. Natomiast wariant tubowy z okładem prądu daje w środku solenoidu wartość zawyżoną o około 2 %, a na końcu wartość zaniżoną o ponad 2 %. W tabeli 1 podano również zakresy na długości solenoidu, wzdłuż których ubytek wartości  $B_z$  nie przekracza tolerancji 5 % i 15 % wartości  $B_z(0)$ .

TABELA 1

	Indukcja magnetyczna	Wg wariantów S i C	Wg wariantu tubowego
1	w środku solenoidu $B_z(0)$	0,918 T	0,936 T
2	na końcu solenoidu $B_z(L_s/2)$	0,527 T	0,515 T
3	$B_z > 0,95 B_z(0)$	na długości 0,43 $L_s$	
4	$B_z > 0,85 B_z(0)$	na długości 0,68 $L_s$	

Z przytoczonego tu przykładu, dla którego ten aspekt wyników  $B_z$  na osi potwierdził się w obliczeniach dla kilku innych danych solenoidu, można wnioskować, że jeśli ograniczyć się do uproszczenia pomijającego rozkład prądu na powierzchni przewodu, to obydwa warianty: C (współosiowe pętle) i S (przewód spiralny) dają identyczne wyniki, z dokładnością do trzech miejsc znaczących. Od strony programowej wariant S jest oczywiście prostszy niż wariant C.

W przypadku, gdy długość solenoidu jest znacząco większa od jego promienia, można także wyrazić analitycznie wartość składowej radialnej na osi:

$$B_r = \frac{\mu_0 I_s}{p_s} [u K_0(u) + K_1(u)] \quad (25)$$

której wartość jest praktycznie stała na całej długości solenoidu, lecz jej kierunek zmienia się periodycznie wraz kątem  $\phi$  opisującym linię spiralną solenoidu, patrz [6]. W wyrażeniu (25)  $K_0(u)$ ,  $K_1(u)$  oznaczają zmodyfikowane funkcje Bessela drugiego rodzaju, odpowiednio zerowego i pierwszego rzędu, rzeczywistego argumentu  $u = 2\pi R_s/p_s$ , równego stosunkowi obwodu walca opisującego solenoid do jego poskoju. W praktycznie interesujących przypadkach  $u > 5,0$  co pozwala do obliczenia  $K_0$  i  $K_1$  zastosować względnie proste szeregi asymptotyczne, ograniczone tylko do kilku pierwszych wyrazów, patrz [1] i [7]. Autor posłużył się w obliczeniach odpowiednio przekształconą, podaną poniżej postacią tego szeregu, łatwą do algorytmizacji:

$$K_n(u) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2u}} e^{-u} \left[ 1 + \frac{4n^2 - 1^2}{8u} \left[ 1 + \frac{4n^2 - 3^2}{2 \cdot 8u} \left[ 1 + \frac{4n^2 - 5^2}{3 \cdot 8u} \left[ 1 + \frac{4n^2 - 7^2}{4 \cdot 8u} [1 + \dots] \right] \right] \right] \right] \right] \quad (26)$$

którą, w razie konieczności można łatwo uzupełnić; np. w kolejnym, nie zapisanym tu członie wystąpi  $(4n^2 - 9^2)/(5 \cdot 8u)$  itd.

Obliczanie  $B_r$  ma oczywiście sens tylko w przypadku solenoidów dostatecznie długich i o stosunkowo małej średnicy. Np. dla danych:  $L_s = 250$  mm;  $R_s = 4,5$  mm;  $N_s = 48$ ;  $I_s = 1000$  A otrzymujemy  $u = 5,31$  stąd  $B_r = 0,00320$  T wobec  $B_r(0) = 0,192$  T, tak więc w tym przykładzie składowa radialna stanowi około 1,5 % składowej osiowej występującej w środku solenoidu.

Przewód solenoidu o przekroju kołowym. Żeby uwzględnić skończone wymiary przekroju kołowego uzwojenia solenoidu, wyrażenie (24) na składową osiową indukcji magnetycznej w osi solenoidu powinno być dostosowane do superpozycji oddziaływania elementarnych solenoidów utworzonych stosownie do podziału kwadraturowego. Przyjmujemy zatem, że solenoid wykonany przewodem, którego przekrój jest kołowy o promieniu  $R_c$ , zastępujemy umownymi solenoidami cząstkowymi w liczbie  $N \times M$  (w autorskich programach zastosowano  $4 \times 16 = 64$ ), stosownie do idei wyrażonej w Dodatku 2. Odpowiednio zmodyfikowane wyrażenie (24) przyjmie postać całki:

$$B(z_1) = \frac{\mu_0 \sigma}{2p_s} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_c} \left[ \frac{N_s p_s + 2z_{ij}}{\sqrt{4R_{ij}^2 + (N_s p_s + 2z_{ij})^2}} + \frac{N_s p_s - 2z_{ij}}{\sqrt{4R_{ij}^2 + (N_s p_s - 2z_{ij})^2}} \right] \rho d\rho d\varphi \quad (27)$$

którą można obliczyć kwadraturą jak następuje:

$$B(z_1) = \frac{\mu_0 I}{4R_s p_s} \frac{2}{M} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \left[ \frac{N_s p_s + 2z_{ij}}{\sqrt{4R_{ij}^2 + (N_s p_s + 2z_{ij})^2}} + \frac{N_s p_s - 2z_{ij}}{\sqrt{4R_{ij}^2 + (N_s p_s - 2z_{ij})^2}} \right] \rho_i W_i \quad (28)$$

gdzie:  $\rho_i = \frac{R_c}{2}(1 + U_i)$ ;  $\varphi_j = \frac{2\pi}{M}(j-1)$ ;  $z_{ij} = z_1 - \rho_i \cos \varphi_j$ ;  $R_{ij} = R_s + \rho_i \sin \varphi_j$ .

Przewód solenoidu o przekroju prostokątnym. W tym przypadku odpowiednie wyrażenie całkowe przyjmuje postać:



$$B(z_1) = \frac{\mu_0 \sigma}{2p_s} \int_{R_p-b}^{R_p+b} \int_{-a}^a \left[ \frac{N_s p_s + 2z_{ij}}{\sqrt{4R_{ij}^2 + (N_s p_s + 2z_{ij})^2}} + \frac{N_s p_s - 2z_{ij}}{\sqrt{4R_{ij}^2 + (N_s p_s - 2z_{ij})^2}} \right] d\zeta d\rho \quad (29)$$

Obliczenie kwadraturą przeprowadza się według wzoru:

$$B(z_1) = \frac{\mu_0 I}{4p_s} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left[ \frac{Np + 2z_i}{\sqrt{4R_j^2 + (Np + 2z_i)^2}} + \frac{Np - 2z_i}{\sqrt{4R_j^2 + (Np - 2z_i)^2}} \right] \cdot W_i W_j \quad (30)$$

gdzie:  $z_i = z_1 - aU_i$ ;  $R_j = R_s + bU_j$

## 5. POLE MAGNETYCZNE MODELU WSPÓŁOSIOWYCH PĘTLI Z PRĄDEM – UOGÓLNIENIE NA PUNKTY POŁOWE $P(R, Z)$

Ze względu na znaczny stopień zgodności wyników obliczeń składowej indukcji magnetycznej w osi solenoidu wykonanych według modelu współosiowych cewek i według cewki spiralnej, w uogólnieniach dotyczących pola magnetycznego poza osią solenoidu ograniczono się tylko do pierwszego modelu.

### 5.1. Wektorowy potencjał magnetyczny pętli

Rozpatrzmy więc najpierw pole magnetyczne pętli z prądem skupionym w osi przekroju przewodu pętli nie ograniczając się tylko do punktów połowych na jej osi. Stosując cylindryczny układ współrzędnych oznaczmy współrzędne punktu połowego  $P(r, \theta, z)$  usytuowanego w dowolnym punkcie przestrzeni (poza samym przewodem pętli); ze względu na symetrię osiową pola magnetycznego ograniczamy się do wybranej stałej wartości  $\theta = 0$ , tak więc punkt połowy będziemy oznaczać w skrócie  $P(r, z)$ . Dla punktu źródłowego usytuowanego w środku powierzchni przekroju pętli wprowadzimy współrzędne  $Q(R_s, \phi)$ . Ze względu na symetrię osiową pola wektorowy potencjał magnetyczny  $A$  w dowolnym punkcie  $P(r, z)$  przestrzeni otaczającej pętlę z prądem elektrycznym ma w układzie współrzędnych cylindrycznych tylko

składową obwodową, tj.  $A = e_\theta A_\theta$ ; dla której obowiązuje następująca zależność definicyjna:

$$A_\theta = \frac{\mu_0 I_S}{4\pi} \oint_C \frac{d\mathbf{l}}{|\mathbf{r}_{QP}|} = \frac{\mu_0 R_S I_S}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \phi d\phi}{\left[ z_1^2 + R_S^2 + r_1^2 - 2R_S r_1 \cos \phi \right]^{1/2}} \quad (31)$$

Z intencją sprowadzenia tego wyrażenia do postaci praktycznie obliczalnej wprowadza się nową zmienną  $\varphi = \frac{\pi - \theta}{2}$ , stąd  $\cos \phi = 2 \sin^2 \varphi - 1$ , co prowadzi do wyrażenia  $A_\theta$  za pomocą całek eliptycznych:

$$A_\theta = \frac{\mu_0 I_S}{\pi k} \left( \frac{R_S}{r} \right)^{1/2} \left[ \left( 1 - \frac{1}{2} k^2 \right) K(k) - E(k) \right] \quad (32)$$

gdzie  $K(k)$  i  $E(k)$  to całki eliptyczne zupełne pierwszego i drugiego rodzaju:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad ; \quad E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \quad (33)$$

wyliczalne łatwo dostępnymi programami komputerowymi, a  $k$  oznacza ich moduł, który jest równy:

$$k = \left[ \frac{4R_S r_1}{z_1^2 + (R_S + r_1)^2} \right]^{1/2} \quad (34)$$

i zależny od współrzędnych punktów: polowego P i źródłowego Q, przy czym jego moduł komplementarny wyraża się jako:

$$k' = (1 - k^2)^{1/2} = \left[ \frac{z_1^2 + (R_S - r)^2}{z_1^2 + (R_S + r)^2} \right]^{1/2} \quad (35)$$

## 5.2. Indukcja magnetyczna pętli

Składowe indukcji magnetycznej w P otrzymujemy z wektorowego potencjału magnetycznego  $A = e_\theta A_\theta$  przez następujące definicje różniczkowe:

$$B_r = -\frac{\partial A_\theta}{\partial z} \quad ; \quad B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) \quad (36)$$

Uwzględniając wyrażenia na pochodne cząstkowe całek eliptycznych zupełnych względem ich modułu, patrz [2]:

$$\frac{\partial K(k)}{\partial k} = \frac{1}{k} \left( \frac{E(k)}{k'^2} - K(k) \right) ; \quad \frac{\partial E(k)}{\partial k} = \frac{1}{k} (E(k) - K(k)) \quad (37)$$

i podobnie wyrażenia na pochodne cząstkowe modułu  $k$  względem zmiennych  $r$  i  $z$ :

$$\frac{\partial k}{\partial r} = \frac{k}{2r} - \frac{k^3}{4} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{z} \right) ; \quad \frac{\partial k}{\partial z} = -\frac{zk^3}{4R_s r} \quad (38)$$

otrzymujemy następujące wyrażenia na współrzędne wektora indukcji magnetycznej  $\mathbf{B}$  w punkcie  $P(r_1, z_1)$  w otoczeniu pętli z prądem :

$$B_r = \frac{\mu_0 I_s}{4\pi} \frac{k}{\sqrt{R_s r_1}} \frac{z_1}{r_1} [k_r E(k) - K(k)] \quad (39)$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I_s}{4\pi} \frac{k}{\sqrt{R_s r}} [k_z E(k) + K(k)] \quad (40)$$

gdzie  $k_r = \frac{R_s^2 + r_1^2 + z_1^2}{(R_s - r_1)^2 + z_1^2} ; \quad k_z = \frac{R_s^2 - r_1^2 - z_1^2}{(R_s - r_1)^2 + z_1^2}$

Dla wartości granicznych dla  $r_1 \rightarrow 0$  mamy  $\frac{k}{\sqrt{R_s r_1}} = \frac{2}{\sqrt{R_s^2 + z_1^2}}$ , a całki eliptyczne  $K(k) = E(k) = \pi/2$ ; wyrażenie w nawiasie (39) znika dając  $\lim_{r \rightarrow 0} B_r = 0$ , a wyrażenie w nawiasie (40) równa się  $\pi$ , tak że dla  $\lim_{r \rightarrow 0} B_z$  otrzymuje się wyrażenie identycznie z (8).

Wyrażenia (39) i (40) dotyczą przypadku, gdy prąd pętli jest skupiony w środku przekroju przewodu pętli. Uogólnienia na przypadek uwzględniający skończone rozmiary przekroju przewodu mogą być dokonane za pomocą odpowiednich wyrażań całkowych, w duchu rozwiązań przedstawionych w Rozdziale 3.

Moduł  $k$  całek eliptycznych będzie w tym przypadku funkcją lokalnych zmiennych  $\rho$  i  $\zeta$ . Oznaczając go, odróżniając od  $k = \text{const}$  występującego we wzorze (35), przez  $\hat{k} = k(\rho, \zeta)$  otrzymamy  $\hat{k} = k(\rho, \zeta) = \left[ \frac{4\rho r_1}{(z_1 - \xi)^2 + (\rho + r_1)^2} \right]^{1/2}$

i podobnej modyfikacji ulegają współczynniki:  $\hat{k}_r = \frac{R_s^2 + r_1^2 + (z_1 - \zeta)^2}{(R_s - r_1)^2 + (z_1 - \zeta)^2}$   
i  $\hat{k}_z = \frac{R_s^2 - r_1^2 - (z_1 - \zeta)^2}{(R_s - r_1)^2 + (z_1 - \zeta)^2}$ , tak że wyrażenia na składowe indukcji magnetycznej

w  $P(r, z)$  dla przewodu o przekroju prostokątnym  $2a \times 2b$  będą:

$$B_r = \frac{\mu_0 \sigma_s}{4\pi} \int_{R_s-b}^{R_s+b} \int_{-a}^a \frac{\hat{k}}{\sqrt{\rho r_1}} \frac{z_1 - \zeta}{r_1} [\hat{k}_r \mathbf{E}(\hat{k}) - \mathbf{K}(\hat{k})] d\zeta d\rho \quad (41)$$

$$B_z = \frac{\mu_0 \sigma_s}{4\pi} \int_{R_s-b}^{R_s+b} \int_{-a}^a \frac{\hat{k}}{\sqrt{\rho r_1}} [\hat{k}_z \mathbf{E}(\hat{k}) + \mathbf{K}(\hat{k})] d\zeta d\rho \quad (42)$$

Odpowiednie wyrażenia kwadraturowe będą następujące

$$B_r = \frac{\mu_0 I_s}{16\pi} \sum_i^N \sum_j^N \frac{\hat{k}}{\sqrt{\rho_j r_1}} \frac{z_1 - \zeta_i}{r_1} [\hat{k}_r \mathbf{E}(\hat{k}) - \mathbf{K}(\hat{k})] \cdot W_i \cdot W_j \quad (43)$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I_s}{16\pi} \sum_i^N \sum_j^N \frac{\hat{k}}{\sqrt{\rho_j r_1}} [\hat{k}_z \mathbf{E}(\hat{k}) + \mathbf{K}(\hat{k})] \cdot W_i \cdot W_j \quad (44)$$

gdzie  $\zeta_i = a \cdot U_i$ ;  $\rho_j = R_s + b \cdot U_j$ , przy czym  $U_i, U_j, W_i, W_j$  – współczynniki i wagi kwadratury, a  $N$  – rząd kwadratury, patrz (D2). Odpowiedniej korekcie w stosunku do wzorów (39) i (40) podlegają także współczynniki  $k_r$  i  $k_z$ , które

przyjmują tutaj postać  $\hat{k}_r = \frac{\rho_j^2 + r_1^2 + (z_1 - \zeta_i)^2}{(\rho_j - r_1)^2 + (z_1 - \zeta_i)^2}$  i  $\hat{k}_z = \frac{\rho_j^2 - r_1^2 - (z_1 - \zeta_i)^2}{(\rho_j - r_1)^2 + (z_1 - \zeta_i)^2}$

Podobnie dla przewodu o przekroju kołowym o promieniu  $R_c$ :

$$B_r = \frac{\mu_0 \sigma_s}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_c} \frac{\hat{k}}{\sqrt{\rho r_1}} \frac{(z_1 - \zeta)}{r_1} [k_r \mathbf{E}(\hat{k}) - \mathbf{K}(\hat{k})] \lambda d\lambda d\alpha \quad (45)$$

$$B_z = \frac{\mu_0 \sigma_s}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_c} \frac{\hat{k}}{\sqrt{\rho r_1}} [k_z \mathbf{E}(\hat{k}) - \mathbf{K}(\hat{k})] \lambda d\lambda d\alpha \quad (46)$$

gdzie  $\lambda$  i  $\alpha$  to zmienne lokalnego układu biegunowego na powierzchni przekroju przewodu pętli, a ponadto:  $\rho = R_s + R_c \sin \alpha$ ;  $\zeta = R_c \cos \alpha$ .

$$B_r = \frac{\mu_0 I_s}{8\pi R_c} \frac{2}{M} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \frac{\hat{k}}{\sqrt{\rho_{ij} r_1}} \frac{(z_1 - \zeta_{ij})}{r_1} \left[ \hat{k}_r E(\hat{k}) - K(\hat{k}) \right] \lambda_i \cdot W_i \quad (47)$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I_s}{8\pi R_c} \frac{2}{M} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \frac{\hat{k}_{ij}}{\sqrt{\rho_{ij} r_1}} \left[ \hat{k}_z E(\hat{k}) - K(\hat{k}) \right] \lambda_i \cdot W_i \quad (48)$$

gdzie  $\lambda_i = \frac{R_c}{2}(1 + U_i)$ ;  $\varphi_j = \frac{2\pi}{M}(j-1)$ ;  $\rho_{ij} = R_s + \lambda_i \sin \varphi_j$ ;  $\zeta_{ij} = \lambda_i \cos \varphi_j$ . przy

czym  $\hat{k} = k(\rho_{ij}, \zeta_{ij}) = \left[ \frac{4\rho_{ij} r_1}{(z_1 - \zeta_{ij})^2 + (\rho_{ij} + r_1)^2} \right]^{1/2}$ ;  $\hat{k}_r = \frac{\rho_{ij}^2 + r_1^2 + (z_1 - \zeta_{ij})^2}{(\rho_{ij} - r_1)^2 + (z_1 - \zeta_{ij})^2}$

i podobnie  $\hat{k}_z = \frac{\rho_{ij}^2 - r_1^2 - (z_1 - \zeta_{ij})^2}{(\rho_{ij} - r_1)^2 + (z_1 - \zeta_{ij})^2}$ .

### 5.3. Indukcja magnetyczna wzbudzona układem współosiowych pętli

Przy założonym początku układu współrzędnych w geometrycznym środku solenoidu kolejne położenia osiowe zwoju wzbudzającego pole magnetyczne w punkcie  $P(r_1, z_1)$  są określone przez następujące wartości współrzędnej  $\zeta$ :

$$\zeta_m = L_s \left( \frac{m-1}{N_s-1} - \frac{1}{2} \right) \quad (49)$$

gdzie:  $m = 1, 2, \dots, N_s$

W przypadku, gdy prąd pętli traktowany jest jako skupiony w geometrycznym środku przekroju przewodu, to współrzędne wektora indukcji magnetycznej w punkcie  $P(r_1, z_1)$  otrzymuje się przez odpowiednie sumowanie wyrażień (39) i (40) po wszystkich powyższych położeniach zwojów pętli:

$$B_r = \frac{\mu_0 I_s}{4\pi} \sum_{m=1}^{N_s} \frac{k_m}{\sqrt{R_s r_1}} \frac{z_1 - \zeta_m}{r_1} \left[ k_{r, m} E(k_m) - K(k_m) \right] \quad (50)$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I_s}{4\pi} \sum_{m=1}^{N_s} \frac{k_m}{\sqrt{R_s r_1}} \left[ k_{z,m} E(k_m) + K(k_m) \right] \quad (51)$$

przy czym poszczególne moduły całek eliptycznych będą dane wyrażeniem:

$$k_m = \left[ \frac{4R_s r_1}{(z_1 - \zeta_m)^2 + (R_s + r_1)^2} \right]^{1/2} \quad (52)$$

i podobnie współczynniki

$$k_{rm} = \frac{R_s^2 + r_1^2 + (z_1 - \zeta_m)^2}{(R_s - r_1)^2 + (z_1 - \zeta_m)^2} ; \quad k_{zm} = \frac{R_s^2 - r_1^2 - (z_1 - \zeta_m)^2}{(R_s - r_1)^2 + (z_1 - \zeta_m)^2} \quad (53)$$

przy czym  $\zeta_m$  jak w (49).

Uogólniając to na przypadek, w którym honorujemy równomierny rozkład gęstości prądu po przekroju prostokątnym  $2a \times 2b$  pętli; wyrażenia (50) i (51) przyjmą postać:

$$B_r = \frac{\mu_0 I_s}{16\pi} \sum_{m=1}^{N_s} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\hat{k}}{\sqrt{\rho_j r_1}} \frac{z_1 - (\zeta_i + \zeta_m)}{r_1} \left[ \hat{k}_r E(\hat{k}) - K(\hat{k}) \right] \cdot W_i \cdot W_j \quad (54)$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I_s}{16\pi} \sum_{m=1}^{N_s} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\hat{k}}{\sqrt{\rho_j r_1}} \left[ \hat{k}_z E(\hat{k}) + K(\hat{k}) \right] \cdot W_i \cdot W_j \quad (55)$$

gdzie  $\hat{k} = \left[ \frac{4\rho_j r_1}{(z_1 - (\zeta_i + \zeta_m))^2 + (\rho_j + r_1)^2} \right]^{1/2} ; \quad \hat{k}_r = \frac{\rho_j^2 + r_1^2 + (z_1 - (\zeta_i + \zeta_m))^2}{(\rho_j - r_1)^2 + (z_1 - (\zeta_i + \zeta_m))^2}$

$$\hat{k}_z = \frac{\rho_j^2 - r_1^2 - (z_1 - (\zeta_i + \zeta_m))^2}{(\rho_j - r_1)^2 + (z_1 - (\zeta_i + \zeta_m))^2}, \quad \zeta_m \text{ jak w (49), a } \zeta_i \text{ i } \rho_j \text{ jak w (45) i (46).}$$

Podobnie w przypadku przewodu o przekroju kołowym o promieniu  $R_c$  otrzymamy:

$$B_r = \frac{\mu_0 I_s}{8\pi R_c} \frac{2}{M} \sum_{m=1}^{N_s} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \frac{\hat{k}}{\sqrt{\rho_{ij} r_1}} \frac{z_1 - (\zeta_{ij} + \zeta_m)}{r_1} \left[ \hat{k}_r E(\hat{k}) - K(\hat{k}) \right] \lambda_i W_i \quad (56)$$

$$B_z = \frac{\mu_0 \sigma_1}{8\pi R_c} \frac{2}{M} \sum_{m=1}^{N_s} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \frac{\hat{k}}{\sqrt{\rho_{ij} r_1}} \left[ \hat{k}_z E(\hat{k}) + K(\hat{k}) \right] \cdot \lambda_i \cdot W_i \quad (57)$$

Tutaj  $\hat{k} = \left[ \frac{4\rho_{ij} r_1}{(z_1 - (\zeta_{ij} + \zeta_m))^2 + (\rho_{ij} + r_1)^2} \right]^{1/2}$   $\hat{k}_r = \frac{\rho_{ij}^2 + r_1^2 + (z_1 - (\zeta_{ij} + \zeta_m))^2}{(\rho_{ij} - r_1)^2 + (z_1 - (\zeta_{ij} + \zeta_m))^2}$

$\hat{k}_z = \frac{\rho_{ij}^2 - r_1^2 - (z_1 - (\zeta_{ij} + \zeta_m))^2}{(\rho_{ij} - r_1)^2 + (z_1 - (\zeta_{ij} + \zeta_m))^2}$  przy czym  $\lambda_i, \varphi_j, \rho_{ij}$  i  $\zeta_{ij}$  jak w (47) i (48).

W tabeli 2 podano porównanie wybranych wyników obliczenia  $B_z$  według modelu współosiowych pętli realizowanego przy założeniu, że:

- prąd pętli jest skupiony w środku przekroju przewodu – wariant CP,
- uwzględnia się gęstość prądu rozłożoną równomiernie po powierzchni przekroju przewodu – wariant CR,

dla następujących danych solenoidu:  $L_s = 195$  mm,  $R_s = 16,25$  mm,  $N_s = 48$ ,  $a = 2,0$  mm,  $b = 0,5$  mm,  $I_s = 1000$  A.

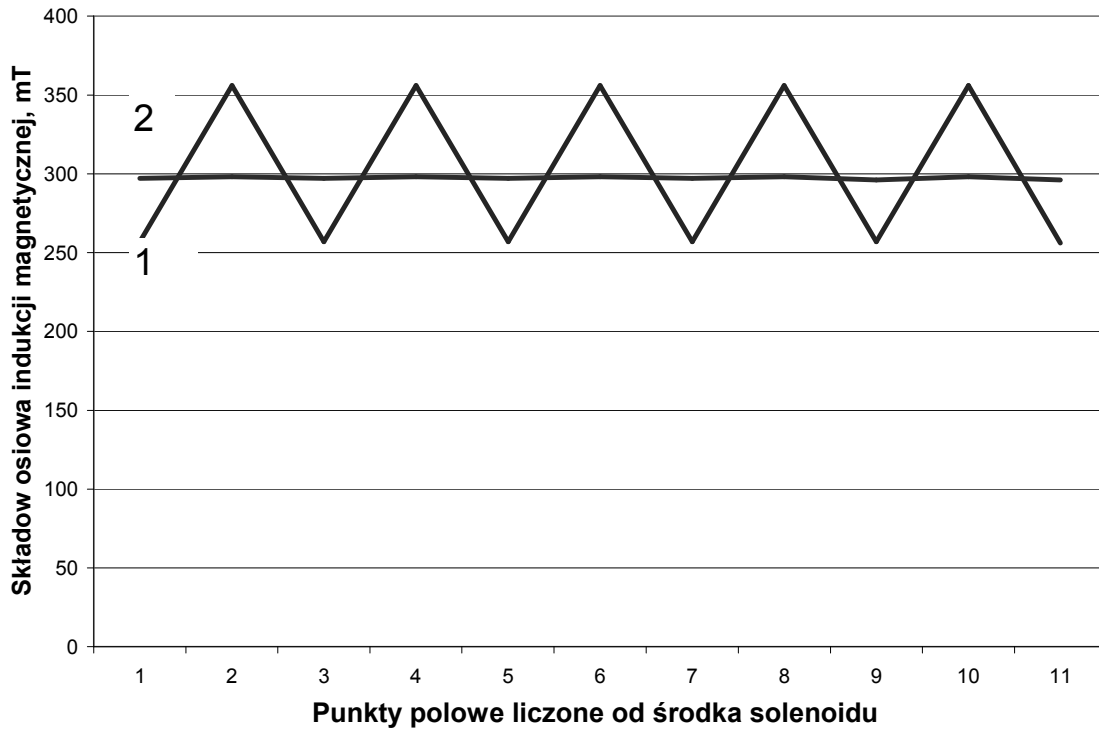
Charakterystyki obliczone dla punktów polowych usytuowanych na osi i podobnie wzdłuż linii na promieniu 7,5 mm nie wykazują dla wariantów CP i CR znaczących rozbieżności. Inaczej jest dla charakterystyki dotyczącej promienia  $r = 15,0$  mm, a więc punktów polowych oddalonych o 0,75 mm od drutu przewodu, to jest, praktycznie rzecz biorąc, przylegających do izolacji przewodu. Krok obliczeniowy punktów polowych wybrano jako równy  $p_s/2$ , to znaczy, że kolejne obliczane punkty odpowiadają na przemian środkowi poszczególnych pętli i środkowi odległości między dwoma sąsiednimi pętlami.

**TABELA 2**

	Wybrane dane z charakterystyki osiowej $B_z(r, z)$ dla $r = 15$ mm	Wariant CP	Wariant CR
1	w środku solenoidu $B_{z0}$	306,5 mT	297,0 mT
2	na krańcu solenoidu $B_{z_{k+}}$	235,5 mT	213,0 mT
3	na krańcu solenoidu $B_{z_{k-}}$	130,0 mT	150,0 mT
4	40 mm poza solenoidem $B_{ze}$	9,0 mT	9,0 mT

Na rysunku 6 pokazano charakterystykę  $B_z(z)$  dla  $r = 15$  mm w zakresie od środka solenoidu do punktu 11 – odpowiadającego odległości 20,745 mm, obliczoną autorskimi programami Solenoid\_4 i \_6, patrz Dodatek 1. W wariacie CP (prąd skupiony) różnice  $B_z$  między dwoma sąsiednimi punktami

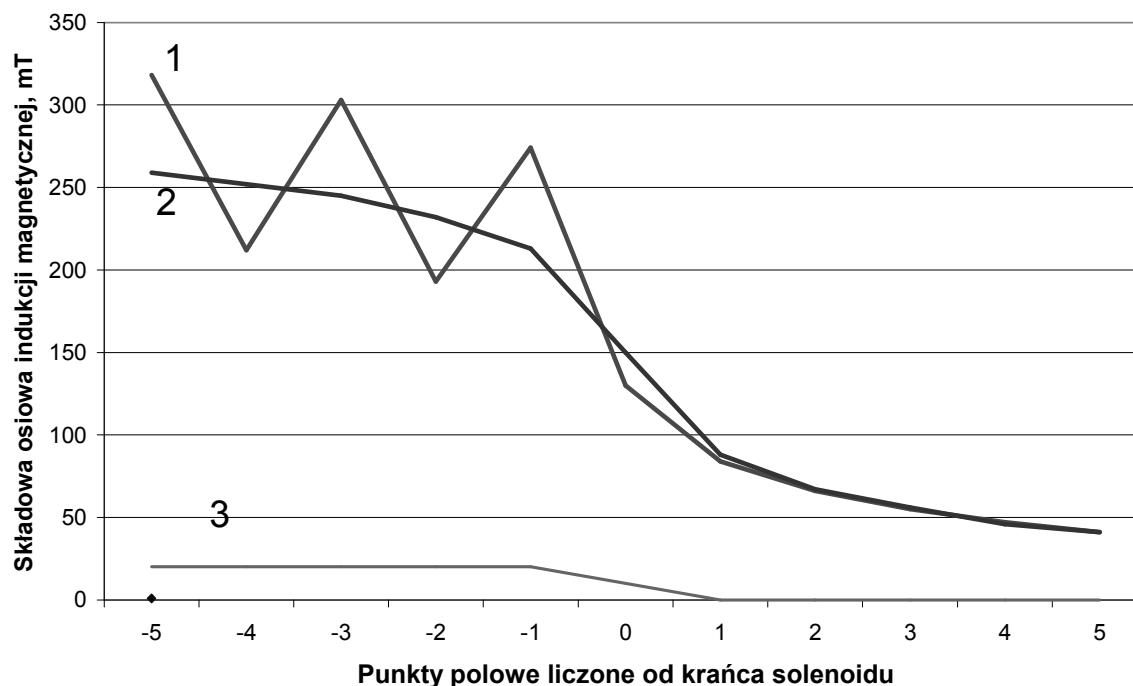
polowymi są znaczne, rzędu kilkunastu procent w stosunku do średniej, którą podano w tabeli 2. W wariancie CR (prąd rozłożony po prostokącie) te różnice są znikome.



**Rys. 6.**  $B_z$  wzdłuż solenoidu o danych:  $L_s = 195$  mm,  $R_s = 16,25$  mm,  $N_s = 48$ ,  $a = 2,0$  mm,  $b = 0,5$  mm,  $I_s = 1000$  A, obliczona na promieniu  $r = 15$  mm, punkty polowe w odległości 2,074 mm, 1 – wariant CP, 2 wariant CR

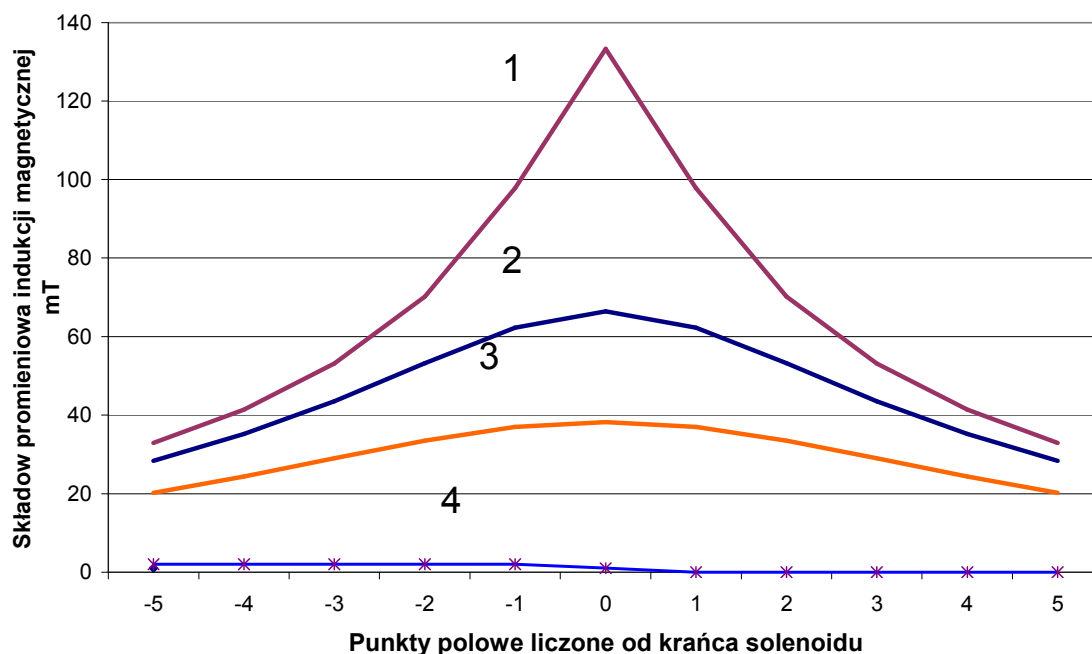
Ogólnie, średnia obliczonych wartości wg wariantu CP daje wewnątrz samego solenoidu wartości zawyżone w porównaniu do wariantu CR, a tuż poza solenoidem sytuacja jest odwrotna, wariant CP daje wartości zaniżone w stosunku do wariantu CR, lecz w niewielkiej odległości od solenoidu wyniki obliczeń schodzą się. Sytuację tę ilustruje rysunek 7, na którym punkty polowe z numeracją ujemną odnoszą się do wnętrza solenoidu tuż przy jego krańcu, a punkty z numeracją dodatnią określają obszar tuż poza krańcem.





**Rys. 7.**  $B_z$  wzdłuż obszaru krańcowego solenoidu o danych:  $L_s = 195$  mm,  $R_s = 16,25$  mm,  $N_s = 48$ ,  $a = 2,0$  mm,  $b = 0,5$  mm,  $I_s = 1000$  A, obliczona na promieniu  $r = 15$  mm, punkty połowe w odległości 2,074 mm, 1 – wariant CP, 2 – wariant CR, 3 – zarys solenoidu

Składowa radialna wewnątrz solenoidu zeruje się na osi, poza osią ma wartość skończoną, lecz znacznie mniejszą od wartości składowej promieniowej. Przyjmuje ona większe wartości, gdy punkty połowe zbliżają się do przewodu. Na rysunku 8 pokazano obliczone charakterystyki  $B_r(z)$   $r = \text{const}$  według wariantu CR, tj. dla prądu równomiernie rozłożonego po powierzchni prostokątnej przewodu, dla trzech wartości współrzędnej  $r = 7,5$  mm, 11,25 mm i 15,0 mm. Zakres charakterystyki obejmuje otoczenie krańca solenoidu, identycznie jak na rysunku 7. Przebieg  $B_r$  wykazuje charakterystyczną wartość maksymalną tuż za krańcem solenoidu. Ogólnie biorąc, wartości  $B_r$  wzrastają w miarę oddalania się punktu połowego od osi solenoidu.



**Rys. 8.**  $B_r$  wzdłuż obszaru krańcowego solenoidu o danych:  $L_s = 195$  mm,  $R_s = 16,25$  mm,  $N_s = 48$ ,  $a = 2,0$  mm,  $b = 0,5$  mm,  $I_s = 1000$  A, obliczona na promieniach: 1 –  $r = 7,5$  mm, 2 –  $r = 11,25$  mm, 3 –  $r = 11,25$  mm, 4 – zarys solenoidu; poszczególne punkty polowe w odległości 2,074 mm,

## 6. PODSUMOWANIE

Teoria pola magnetycznego w solenoidzie została opracowana we wczesnym okresie rozwoju elektrotechniki i dotyczy stanów stacjonarnych. Kilka podstawowych modeli solenoidu przytaczanych w podręcznikach elektrotechniki, ograniczających się do traktowania prądu w cewce solenoidu jako skupionego w środku przekroju przewodu cewki lub operujących pojęciem okładu prądu prowadzą w wyniku obliczeń składowej osiowej indukcji magnetycznej w punktach usytuowanych na osi solenoidu do prawie identycznych wyników. Prawdopodobnie ten fakt zaciążył na tym, że w zasadzie zaniechano uszczegółowienia tego tematu i podobnie przystosowania problemu obliczania pola magnetycznego w solenoidzie do współczesnym możliwości obliczeniowych.

Klasyczna elektrotechnika nie rozpatruje przypadków, gdy powyższe założenia co do prądu nie są spełnione. Potrzeba traktowania prądu jako rozłożonego po całej powierzchni przekroju przewodu, równomiernie lub z uwzględnieniem zjawiska wypierania prądu, występuje, gdy obliczeniu ma

podlegać indukcja magnetyczna w punktach polowych usytuowanych poza osią solenoidu. W takich przypadkach nieodzowne jest rozszerzenie klasycznego podejścia o odpowiednie całkowania po powierzchni przewodu.

Omówione w niniejszym artykule modele solenoidu przyjęto jako podstawę do opracowania kilku programów komputerowych. Mogą one posłużyć do weryfikacji doświadczalnej pod kątem widzenia wykorzystania zjawiska rotacji Faradaya w odniesieniu do aparatów i maszyn elektrycznych. Wykaz szczegółowy tych programów podano w Dodatku 1.

Wykonane za pomocą tych programów obliczenia kontrolne, w szczególności porównania wyników pomiarów wykonanych różnymi programami a odnoszących się do takiej samej sytuacji fizycznej, pozwalają na sformułowania następujących wniosków:

- W obliczeniach składowej osiowej indukcji magnetycznej w punktach leżących na osi solenoidu, zarówno wewnątrz jak i poza jego krańcami wystarczy posługiwać się modelem uproszczonym pomijającym wymiary przekroju przewodu cewki, honorując jej trasę spiralną: wyrażenie (24), program Solenoid\_1, patrz Dod. 1.
- W obliczeniach składowej promieniowej indukcji magnetycznej w punktach leżących na osi wewnątrz długiego solenoidu, wystarczy posługiwać się modelem uproszczonym pomijającym wymiary przekroju przewodu cewki, honorując jej trasę spiralną: wyrażenie (25), program Solenoid\_5, patrz Dod. 1.
- W obliczeniach składowej osiowej indukcji magnetycznej w punktach leżących poza osią solenoidu, zarówno wewnątrz jak i poza jego krańcami trzeba posługiwać się modelem uproszczonym sformułowanym przez układ współosiowych pętli z prądem, lecz honorować skończone wymiary przekroju przewodu pętli: wyrażenia (55) lub (57), programy Solenoid\_6 lub \_7.
- W obliczeniach składowej promieniowej indukcji magnetycznej w punktach leżących na osi solenoidu, lecz tylko poza jego krańcami trzeba posługiwać się modelem uproszczonym sformułowanym przez układ współosiowych pętli z prądem, lecz honorując skończone wymiary przekroju przewodu pętli: wyrażenia (54) lub (56), programy Solenoid\_6 lub \_7.
- Przytoczone w pracy wyrażenia na składowe indukcji magnetycznej odpowiadają ściśle stanom stacjonarnym, to jest dotyczą prądu stałego, lub przemiennego o częstotliwości na tyle niskiej, że efekt wypierania prądu w cewce solenoidu jest zaniedbywany. Przypadek, gdy należy liczyć się z wypieraniem prądu, może być również traktowany za pomocą podejścia przestawionego w niniejszej pracy, pod warunkiem, że rozkład gęstości prądu po przekroju przewodu zostanie niezależnie obliczony.

Podstawowa modyfikacja wyrażeń opisujących pole stacjonarne polega na wciągnięciu pod znak całki wartości lokalnych gęstości prądu, np.  $\sigma_2$  w równaniu (9), i stosownych dalszych całkowaniach kwadraturowych.

## Dodatek 1

Pakiet programów komputerowych Solenoid

klasyfikacja Przyjęte symbole systematyzujące problematykę traktowaną w niniejszej pracy podano w tabeli D1-1

TABELA D1-1

	Zasada klasyfikacji	Symbole klasyfikacyjne
1	Według typu cewki solenoidu	S – cewka spiralna – model rzeczywisty C – cewki współosiowe – model przybliżony
2	Według rodzaju przewodu	CP – przekrój przewodu pomijalny CR – przekrój przewodu prostokątny CC – przekrój przewodu kołowy
3	Według obszaru obliczeniowego	AX – wewnątrz i na zewnątrz, lecz tylko na osi OU – wewnątrz i na zewnątrz, poza osią
4	Według obliczanej wielkości	BZ – składowa osiowa indukcji magnetycznej BR – składowa promieniowa indukcji magnetycznej

Programy komputerowe Wykaz opracowanych programów do obliczania indukcji magnetycznej w solenoidzie podano w tabeli D1-2.

TABELA D1-2

	Nazwa programu	Funkcje obliczeniowe
1	Solenoid_1	C-CP-AX-BZ & S-CP-AX-BZ
2	Solenoid_2	C-CR-AX-BZ & S-CR-AX-BZ
3	Solenoid_3	C-CC-AX-BZ & S-SS-AZ-BZ
4	Solenoid_4	C-CP-OU-BZ
5	Solenoid_5	S-CP-OU-BR
6	Solenoid_6	C-CR-OU-BZ & C-CR-OU-BR
7	Solenoid_7	C-CC-OU-BZ & C-CC-OU-BR

Dodatek 2

Całkowanie numeryczne po powierzchni prostokąta i koła wg kwadratur Gaussa

1. Całkowanie po prostokącie

Przy założeniu, że funkcja podcałkowa dwóch zmiennych  $f(x, y)$  jest ciągła i nie ma osobliwości w obszarze całkowania, jej obliczenie kwadraturą Gaussa sprowadza się do podwójnej sumy:

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \frac{(b-a)(d-c)}{4} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N f(x_i, y_j) \cdot W_i \cdot W_j \quad (D2-1)$$

gdzie  $x_i = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} U_i$  ;  $y_j = \frac{c+d}{2} - \frac{c-d}{2} U_j$  przy czym  $U_i$  (i podobnie  $U_j$ ) są kolejnymi pierwiastkami wielomianu Legendre'a stopnia  $N$ , a  $W_i$  (i podobnie  $W_j$ ) to odpowiadające im wagi tej kwadratury. Np. dla  $N = 4$  mamy:

TABELA D2-1

$i$	Odcięte $U_i$	Wagi $W_i$
1	-0,861 136 311 594 053	0,347 854 845 137 454
2	-0,339 981 043 584 856	0,652 145 154 862 546
3	0,339 981 043 584 856	0,652 145 154 862 546
4	0,861 136 311 594 053	0,347 854 845 137 454

2. Całkowanie po kole

Klasyczna literatura dotycząca całkowania numerycznego nie podaje gotowych rozwiązań całkowania numerycznego po powierzchni koła. Poniżej zamieszczamy rozwiązanie (sprawdzone przez autora, patrz [3]) oparte na podziale koła na  $M$  równych wycinków o kącie wierzchołkowym równym  $\varphi_1 = 2\pi/M$  i na zastosowaniu dla zmiennej  $r$  jednowymiarowej kwadratury Gaussa rzędu  $N$ :

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R f(r, \varphi) r dr d\varphi = \frac{2\pi}{M} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M f(r_i, \varphi_j) \cdot r_i \cdot W_i \quad (D2-2)$$

gdzie współrzędne radialna układu biegunowego wyraża się jako  $r_i = \frac{R}{2}(1+U_i)$

a współrzędna obwodowa jako  $\varphi_j = \frac{2\pi}{M}(j-1)$ . Ich odpowiedniki w układzie prostokątnym są:  $x_{ij} = r_i \cos \varphi_j$ ;  $y_{ij} = r_i \sin \varphi_j$ .

## LITERATURA

1. Angot A., Complément de mathématiques. Collection technique et scientifique du C.N.S.T. Édition de la Revue Optique, Paris, 1961.
2. Byrd P.F., Friedman M.D., Handbook of elliptic integrals for engineers and scientists. Springer Verlag, Berlin, 1970.
3. Krakowski M., Elektrotechnika techniczna, t. 2: Pole elektromagnetyczne. PWN, 1999.
4. McLachlan N.W.: Funkcje Bessela dla inżynierów. W-wa, PWN, 1964.
5. Pawluk K.: O indukcyjności pierścieniowych struktur przewodzących. Prace I.El., z. 170, 1992, str. 5-24,
6. Sikora R.: Teoria pola elektromagnetycznego. WNT, 1998.
7. Smyte W.R.: Static and dynamic electricity. New York, 1950.
8. Życki Z., Błażejczyk T.: Wykorzystanie efektów magnetoptycznych w pomiarach pola magnetycznego w układach magnetycznych. Przegląd Elektrotechniczny, Nr 12, 2008.

*Rękopis dostarczono dnia 3.11.2008 r.*

**Opiniował: prof. dr hab. inż. Jan SIKORA**

## PERTURBATIONS IN COMPUTATION THE MAGNETIC FIELD IN A SOLENOID

Krystyn PAWLUK

**Abstract** *Algorithms for computation the magnetic flux density within a solenoid with respect to the various kind of mathematical models of a solenoid coil were analysed. The consideration of measurement systems that are based on the Faraday's magneto-optic effect can take a practical advantage from the results of such analysis. The author's computer programs were done and some particular calculation results of the both axial and*

*radial components of the magnetic flux density as well within the solenoid itself as outside its ends were presented. It made possible to choose the most convenient mathematical models of the solenoid coil which results in high accuracy of the magnetic field calculation.*

**Prof. dr hab. inż. Krystyn Pawluk**, ur. w 1926 r. otrzymał dyplom inżyniera magistra elektryka w 1951 r. w Akademii Górniczo-Hutniczej w Krakowie, i tamże uzyskał w 1959 r. stopień naukowy doktora nauk technicznych, a stopień naukowy doktora habilitowanego – w 1974 r. w Instytucie Elektrotechniki w Warszawie.

W latach 1951-61 pracował jako asystent, a następnie jako adiunkt w Zakładzie Maszyn i Pomiarów Elektrycznych na Wydziale Elektrotechniki Górniczej i Hutniczej Akademii Górniczej w Krakowie, a od roku 1961 w Instytucie Elektrotechniki w Warszawie, w Zakładzie Maszyn Elektrycznych i w Zakładzie Badań Podstawowych Elektrotechniki, a w latach 1981-83 pracował na stanowisku profesora w Institut Agronomique et Vétérinaire w Rabacie, Maroko. Tytuł profesora nadała mu Rada Państwa w 1980 r.

Od roku 1985 prof. Pawluk jest ekspertem Polskiego Komitetu Normalizacyjnego w zakresie terminologii, symboli i jednostek miar w elektryce, przewodniczy Polskiemu Komitetowi Terminologii Elektryki SEP, Komitetowi Technicznemu Nr 8 PKN i bierze udział w spotkaniach komitetów i grup roboczych IEC poświęconych opracowywaniem norm międzynarodowych z zakresu tej tematyki.

Profesor Pawluk jest autorem wielu publikacji naukowych; ostatnia z nich to Międzynarodowy Słownik Terminologiczny Elektryki, wydany przez Zakłady Szkolenia i Wydawnictw SEP, opracowany w postaci elektronicznej.