

Maciej PAŃCZYK
Jan SIKORA

TRANSFORMACJA GEOMETRII I WŁAŚCIWOŚCI FIZYCZNYCH OBIEKTU W ZAGADNIENIACH 2D METODY ELEMENTÓW BRZEGOWYCH Z ELEMENTAMI NIESKOŃCZONYMI

STRESZCZENIE *Zastosowanie elementów brzegowych nieskończonych w Metodzie Elementów Brzegowych (MEB) wiąże się z pewną komplikacją modelu obliczeniowego. Wprowadzane są odmienne funkcje kształtu, pojawia się funkcja zaniku, rozłącznie traktowana jest transformacja geometrii od transformacji własności fizycznych obiektu. W równaniu bazowym unika się obliczeń węzłów uciekających do nieskończoności. Wiąże się to przykładowo ze zmianami w metodach radzenia sobie z osobliwościami. Wcześniej należy również dobrać stosownie do obiektu typ zastosowanych elementów nieskończonych oraz odpowiednią dla charakteru badanego zjawiska funkcję zaniku analizowanego pola. Na tle tego schematu przedstawiony zostanie podstawowy etap, jakim jest transformacja geometrii elementów nieskończonych i jej implikacje na cały proces obliczeniowy MEB.*

Słowa kluczowe: *Metoda Elementów Brzegowych, zagadnienia dwuwymiarowe, Elementy Brzegowe Nieskończone*

mgr inż. Maciej PAŃCZYK
e-mail: maciejp@cs.pollub.pl
Politechnika Lubelska, Instytut Informatyki

prof. dr hab. inż. Jan SIKORA
e-mail: j.sikora@iel.waw.pl
Zakład Metrologii i Badań Nieniszczących
Instytut Elektrotechniki,
Politechnika Warszawska,
Instytut Elektrotechniki Teoretycznej
i Systemów Informacyjno-Pomiarowych

1. WSTĘP

Metoda Elementów Brzegowych (MEB) pozwala na nieinwazyjne badanie rozkładu wielkości fizycznych niedostępnego wnętrza obiektu. Zastosowanie elementów nieskończonych w MEB pozwala na redukcję liczby elementów siatki i uniknięcie problemu tworzenia sztucznej granicy zaniku pola w otoczeniu analizowanego obiektu. W praktyce oznacza to zmniejszenie czasu obliczeń, zapotrzebowania na pamięć oraz zmniejszenie błędów. Niestety do złożonego procesu doboru właściwego typu elementów brzegowych i doboru stosownych funkcji kształtu włączenie elementów nieskończonych do MEB wymaga dodatkowo doboru odpowiednich funkcji zaniku i zastosowania specjalnych transformacji geometrii różnych od stosowanych przy elementach klasycznych. W niniejszym artykule autorzy wybrali do omówienia transformacje geometrii, wraz z jej implikacjami na komplikacje modelu obliczeniowego MEB.

2. KRÓTKIE WPROWADZENIE DO METODY ELEMENTÓW BRZEGOWYCH

Jako punkt wyjściowy rozważań przedstawimy standardowe równanie bazowe Metody Elementów Brzegowych [4, 7, 9]:

$$c(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}) + \int_{\Gamma} \frac{\partial G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{\partial n} \Phi(\mathbf{r}') d\Gamma = \int_{\Gamma} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}')}{\partial n} d\Gamma \quad (1)$$

Postać macierzowa rozwiązywana numerycznie przedstawia się następująco:

$$[\mathbf{A}][\Phi] = [\mathbf{B}] \left[\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right] \quad (2)$$

W równaniu tym macierze $[\mathbf{A}]$ i $[\mathbf{B}]$ odwzorowują odpowiednio całki pochodnej normalnej $\partial G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)/\partial n$ i $G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$. Człon $c(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r})$ uwzględniony jest w macierzy $[\mathbf{A}]$.

W praktyce elementy macierzy $[\Phi]$ oraz macierzy $[\partial \Phi / \partial n]$ stanowią zbiór danych znanych z określonych lub pomierzonych warunków brzegowych wraz

z wartościami poszukiwanymi stanowiącymi po kolejnych przekształceniach prawą stronę równania macierzowego.

Dla danej klasy zagadnień funkcja Greena (rozwiązanie podstawowe) G z równania (1) jest znana. Przykładowo dla równania Laplace'a w przestrzeni dwuwymiarowej:

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (3)$$

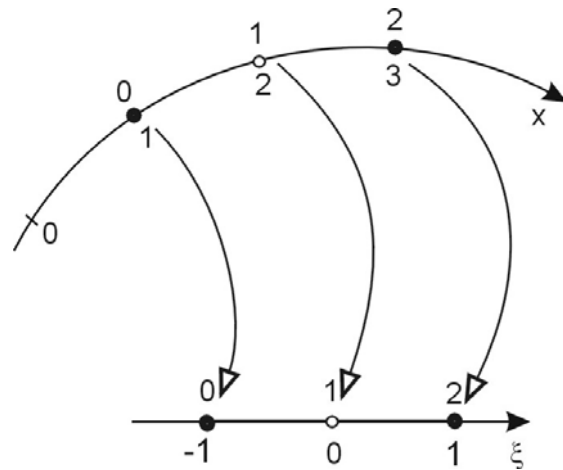
Niezbędne jest, więc jeszcze wyznaczenie elementów macierzy $[A]$ i $[B]$ związanych z danym rozwiązaniem podstawowym.

Obiekt po podziale na siatkę elementów brzegowych wymaga takich obliczeń dla wszystkich węzłów wszystkich elementów brzegowych.

3. TRANSFORMACJA GEOMETRII I WŁAŚCIWOŚCI FIZYCZNYCH OBIEKTU DLA ELEMENTÓW IZOPARAMETRYCZNYCH 2-GO RZĘDU

W celu umożliwienia całkowania numerycznego konieczna jest transformacja danego elementu brzegowego z rzeczywistego globalnego krzywoliniowego układu współrzędnych $(x, y$ w przypadku 2D) do prostoliniowego lokalnego układu współrzędnych ξ . Użycie do całkowania numerycznego kwadratury Gaussa wymusza, aby wszystkie transformowane elementy brzegowe rozciągały się od $\xi = -1$ do $\xi = +1$. Wówczas całkowanie numeryczne elementów trójwęzłowych można przedstawić następująco:

$$\int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) w_i \quad (4)$$



Rys. 1. Transformacja standardowego elementu brzegowego do współrzędnych lokalnych $\xi \in [-1, +1]$

Wartości punktów całkowania Gaussa i współczynników wag są opisane w literaturze np. [1]. Przykładowo wartości dla całkowania 4-ro i 6-cio punktowego przedstawia tab. 1.

TABELA 1
Jednowymiarowa kwadratura Gaussa

n	i	współrzędne punktów - ξ_i	współczynniki wag - w_i
4	1	-0.86113631159405257522	0.34785484513745385737
	2	-0.33998104358485626480	0.65214515486254614263
	3	+0.33998104358485626480	0.65214515486254614263
	4	+0.86113631159405257522	0.34785484513745385737
6	1	-0.93246951420315202781	0.17132449237917034504
	2	-0.66120938646626451366	0.36076157304813860757
	3	-0.23861918608319690863	0.46791393457269104739
	4	+0.23861918608319690863	0.46791393457269104739
	5	+0.66120938646626451366	0.36076157304813860757
	6	+0.93246951420315202781	0.17132449237917034504

Przejdźcie do lokalnego układu współrzędnych osiąga się poprzez wprowadzenie tzw. funkcji kształtu.

Dla obiektów dwuwymiarowych, których brzeg we współrzędnych lokalnych stanowią jednowymiarowe trójwęzłowe liniowe elementy brzegowe, funkcje te przedstawiają się następująco [3, 4, 12, 13]:

$$N_0^{1D}(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1), \quad N_1^{1D}(\xi) = 1 - \xi^2, \quad N_2^{1D}(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi + 1) \quad (5)$$

Transformacja geometrii odbywa się według wyrażeń:

$$\begin{aligned} x(\xi) &= \sum_{i=0}^2 N_i(\xi)x_i = N_0(\xi)x_0 + N_1(\xi)x_1 + N_2(\xi)x_2 \\ y(\xi) &= \sum_{i=0}^2 N_i(\xi)y_i = N_0(\xi)y_0 + N_1(\xi)y_1 + N_2(\xi)y_2 \end{aligned} \quad (6)$$

W elemencie izoparametrycznym takie same funkcje kształtu użyte zostaną również do interpolacji własności fizycznych obiektu.

$$\begin{aligned}\Phi(\xi) &= \sum_{i=0}^2 N_i(\xi)\Phi_i = N_0(\xi)\Phi_0 + N_1(\xi)\Phi_1 + N_2(\xi)\Phi_2 \\ \frac{\partial\Phi(\xi)}{\partial n} &= \sum_{i=0}^2 N_i(\xi)\frac{\partial\Phi_i}{\partial n} = N_0(\xi)\frac{\partial\Phi_0}{\partial n} + N_1(\xi)\frac{\partial\Phi_1}{\partial n} + N_2(\xi)\frac{\partial\Phi_2}{\partial n}\end{aligned}\quad (7)$$

4. WPROWADZENIE ELEMENTÓW NIESKOŃCZONYCH I TRANSFORMACJA GEOMETRII I WŁAŚCIWOŚCI FIZYCZNYCH OBIEKTU W OBSZARZE NIESKOŃCZONYM

Dla zobrazowania tematu wprowadzenia elementów brzegowych nieskończonych do Metody Elementów Brzegowych przedstawimy przykładowy model jak na rys. 2.

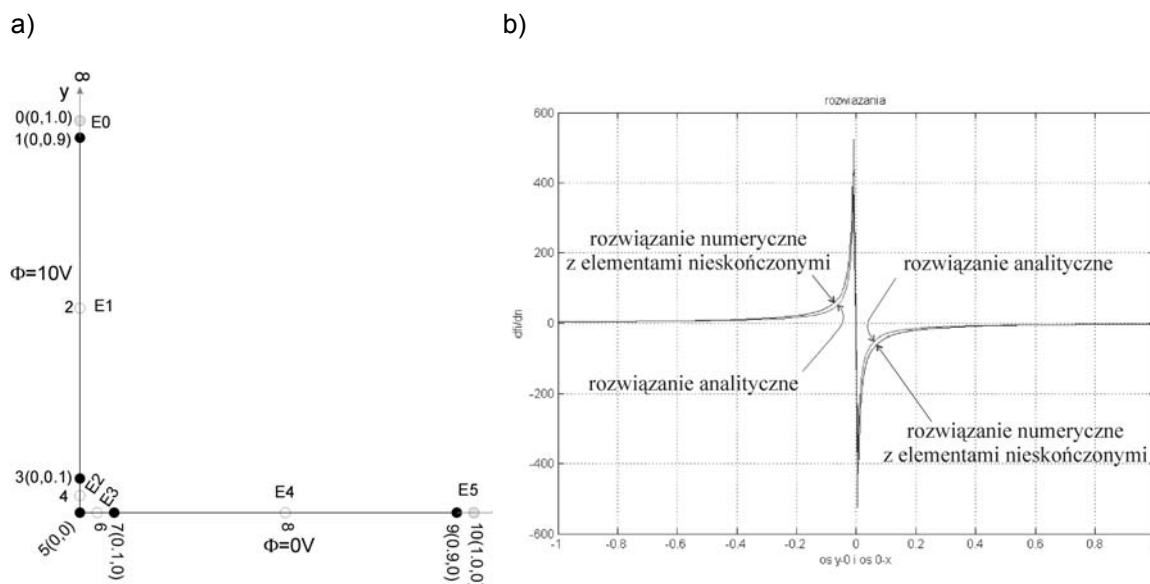
Po podziale badanego obszaru na obszar skończony Γ_F (elementy E1, E2, E3, E4) i obszar nieskończony Γ_I (elementy E0 i E5) równanie bazowe MEB przyjmie postać:

$$\begin{aligned}c(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}) + \int_{\Gamma_F} \frac{\partial G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{\partial n} \Phi(\mathbf{r}') d\Gamma + \int_{\Gamma_I} \frac{\partial G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{\partial n} \Phi(\mathbf{r}') d\Gamma = \\ = \int_{\Gamma_F} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \frac{\partial\Phi(\mathbf{r}')}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma_I} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \frac{\partial\Phi(\mathbf{r}')}{\partial n} d\Gamma\end{aligned}\quad (8)$$

Znane jest rozwiązanie analityczne tego przykładu:

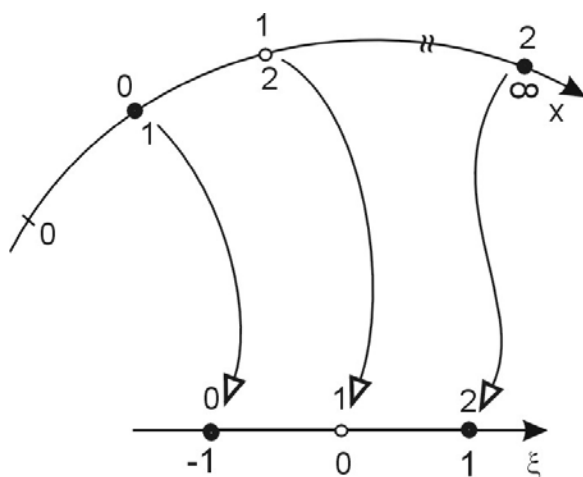
$$\varphi(x, y) = \frac{V_0}{\pi} 2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad \frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial \mathbf{n}} = \frac{V_0}{\pi} 2 \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{1}_y - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{1}_x \right) \quad (9)$$

Dane są warunki brzegowe Dirichleta, a niewiadomą jest w pierwszym etapie obliczeń pochodna normalna potencjału



Rys. 2.

a) przykład obiektu z elementami nieskończonymi E0 i E5 wraz z b) wynikami $\partial\Phi/\partial n$ na jego brzegu



Rys. 3. Transformacja Elementu nieskończonego do lokalnego układu współrzędnych

Dla elementów brzegowych nieskończonych musimy jednak wprowadzić odmienne funkcje kształtu transformujące taki element (rys. 3) do współrzędnych lokalnych ξ .

W elementach nieskończonych będziemy mieć do czynienia z dwoma zestawami funkcji kształtu, standardowymi funkcjami kształtu (N) i nieskończonymi funkcjami kształtu (M) [8, 17] lub [11, 12]. Nieskończone funkcje kształtu (M) pozwalają na trans-

formację geometrii uwzględniającą 3-ci uciekający do nieskończoności węzeł. Standardowe funkcje kształtu (N) znajdują zastosowanie jedynie do transformacji wartości pola.

Geometria jest, więc interpolowana funkcjami kształtu M [11, 12] następująco:

$$\begin{aligned}
 x &= M_1 x_1 + M_2 x_2 \\
 M_1 &= -\frac{2\xi}{1-\xi} \quad M_2 = \frac{1+\xi}{1-\xi}
 \end{aligned} \tag{10}$$

dla

$$x = x_1 \quad \xi = -1,$$

dla

$$x = x_2 \quad \xi = 0,$$

i

$$x_3 = \lim_{\xi \rightarrow 1} \frac{-2\xi x_1 + (1+\xi) x_2}{1-\xi} = \infty \tag{11}$$

Tworzenie macierzy stanu przebiega standardowo z wyjątkiem wykorzystania mapowania funkcjami M_1 i M_2 użytymi do wyznaczenia Jakobianu, jego odwrotności i wyznacznika.

Równanie (8) zawierające oba podobszary – skończony i nieskończony w postaci zdyskretyzowanej umożliwiające wskazanie umiejscowienia wymienionych wcześniej elementów transformacji jest następujące:

$$\begin{aligned}
 &c(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}) + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^2 \Phi(\mathbf{r}') \int_{-1}^{+1} \frac{\partial G(\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|)}{\partial n} N_j(\xi) J(\xi) d\xi + \\
 &+ \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^1 \Phi(\mathbf{r}') \int_{-1}^{+1} \frac{\partial G(\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|)}{\partial n} N_j(\xi) DJ(\xi) d\xi = \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^2 \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}')}{\partial n} \int_{-1}^{+1} G(\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|) N_j(\xi) J(\xi) d\xi + \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^1 \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}')}{\partial n} \int_{-1}^{+1} G(\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|) N_j(\xi) DJ(\xi) d\xi
 \end{aligned} \tag{12}$$

5. FUNKCJE KSZTAŁTU W ODNIESIENIU DO LICZENIA OSOBLIWOŚCI

Równanie (1) dla elementów standardowych we współrzędnych lokalnych ξ przedstawia się następująco:

$$c(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}) + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^2 \Phi(\mathbf{r}') \int_{-1}^{+1} \frac{\partial G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{\partial n} J(\xi) d\xi = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^2 \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}')}{\partial n} \int_{-1}^{+1} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) J(\xi) d\xi \quad (13)$$

Gdzie n – liczba elementów standardowych, po których następuje sumowanie wartości liczonych we wszystkich węzłach każdego z elementów $i = 0 \div n - 1$.

Wyznaczenie współczynników macierzy A i B równania (2):

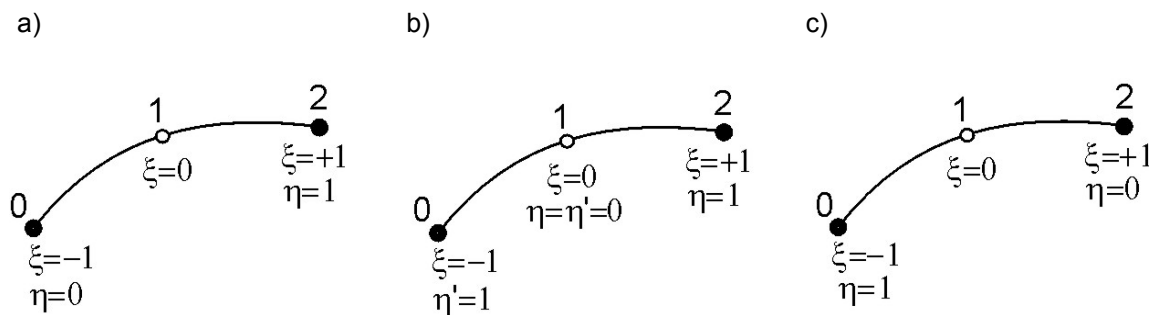
$$A_{i,j}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int_{-1}^{+1} \frac{\partial G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{\partial n} N_j(\xi) J(\xi) d\xi \quad B_{i,j}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int_{-1}^{+1} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) N_j(\xi) J(\xi) d\xi \quad (14)$$

W przypadku, gdy punkt źródła pokrywa się z punktem obserwacji tj. $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ pojawią się osobiwości. Widać to wyraźnie równaniu (3) gdzie $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$.

Całka tej postaci może być liczona z wykorzystaniem specjalnej logarytmicznej kwadratury Gaussa [8, 9]:

$$\int_0^1 f(\eta) \ln \frac{1}{\eta} d\eta = \sum_{i=0}^{gl-1} w_i f(\eta_i) \quad (15)$$

gdzie gl jest liczbą punktów całkowania logarytmicznej kwadratury Gaussa.



Rys. 4. Transformacja elementu zawierającego osobiwości z układu współrzędnych $\xi \in \langle -1, +1 \rangle$ do $\eta \in \langle 0, 1 \rangle$. a) gdy \mathbf{r} znajduje się w pierwszym węźle, b) w drugim, c) w trzecim

Odległość $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$ odpowiednio dla węzłów $i = 0, 1, 2$ liczymy ponownie wykorzystując funkcje kształtu:

$$\begin{aligned} R^2 &= [(x'(\xi) - x_i)^2 + (y'(\xi) - y_i)^2] = \\ &= \left[(N_0(\xi)x_0 + N_1(\xi)x_1 + N_2(\xi)x_2 - x_i)^2 + \right. \\ &\quad \left. + (N_0(\xi)y_0 + N_1(\xi)y_1 + N_2(\xi)y_2 - y_i)^2 \right] \end{aligned} \quad (16)$$

Analogicznie dla elementów nieskończonych i węzłów $i = 0, 1$ wykorzystamy funkcje kształtu nieskończone M (15):

$$\begin{aligned} R^2 &= [(x'(\xi) - x_i)^2 + (y'(\xi) - y_i)^2] = \\ &= \left[(M_0(\xi)x_0 + M_1(\xi)x_1 - x_i)^2 + (M_0(\xi)y_0 + M_1(\xi)y_1 - y_i)^2 \right] \end{aligned} \quad (17)$$

Dodatkowa liniowa transformacja z układu współrzędnych ξ do η przedstawia się następująco:

a) gdy \mathbf{r} znajduje się w pierwszym węźle:

$$\eta = 0.5(1 + \xi)$$

b) gdy \mathbf{r} znajduje się w drugim węźle:

$$\eta = -\xi \quad \text{dla } -1 < \xi < 0 \quad \text{i} \quad \eta = \xi \quad \text{dla } 0 < \xi < 1$$

c) gdy \mathbf{r} znajduje się w trzecim węźle:

$$\eta = 0.5(1 - \xi)$$

6. PODSUMOWANIE

Proces wzbogacenia tradycyjnej Metody Elementów Brzegowych o elementy nieskończone jest koncepcyjnie prosty. Sumaryczny model obliczeniowy MEB pozostaje nie zmieniony. Przytoczony dwu-wymiarowy przypadek wskazuje kroki w MEB, które należy zmienić lub rozszerzyć przy wprowadzaniu

elementów nieskończonych. Założeniem było uniknięcie komplikacji związanych z doбором rodzaju użytych elementów brzegowych, doбором stosownych funkcji zaniku i innymi elementami, których stopień komplikacji wzrasta dla obiektów trójwymiarowych i innych niż Laplace'a klas zagadnień. Zastosowanie elementów nieskończonych zmniejsza liczbę danych wejściowych, skraca czas obliczeń oraz eliminuje konieczność tworzenia sztucznej granicy siatki elementów i warunków brzegowych. Wysilek włożony w rozbudowę poszczególnych kroków obliczeniowych związanych z implementacją numeryczną elementów nieskończonych w MEB jest opłacalny. Powyższe rozważania winny ułatwić modyfikację istniejącego oprogramowania MEB związaną z wprowadzeniem elementów nieskończonych.

LITERATURA

1. Abramowitz M., Stegun I.A., Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables. John Wiley, New York, 1973.
2. Beer G., Watson J. O., (1989), Infinite Boundary Elements., International Journal for Numerical Methods in Engineering Vol. 28 1233-1247, 1989.
3. Beer G., Programming the boundary element method., John Wiley & Sons, Ltd , 2001.
4. Bettess P., Infinite Elements., (1977) International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.11:53-64, 1977
5. Bettess P., (1980) More on Infinite Elements., International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.15:1613-1626, 1980.
6. Bolkowski St., Sikora J., Skoczylas J., Sroka J., Stabrowski M., Wincenciak ST., (1986) Komputerowe metody analizy pola elektromagnetycznego. Wydawnictwa Politechniki Warszawskiej 1986.
7. Gratkowski S., (1996) Elementy specjalne w metodzie elementów skończonych stosowanej do obliczeń elektromagnetycznych., Prace naukowe Politechniki Szczecińskiej Nr 532, KETil Nr 5, Szczecin 1996.
8. Jabłoński P., Metoda Elementów Brzegowych w analizie pola elektromagnetycznego., Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej, Częstochowa 2003.
9. Kurgan E., Analiza pola magnetostatycznego w środowisku niejednorodnym metodą elementów brzegowych. Uczelniane wydawnictwa naukowo-dydaktyczne AGH, Kraków 1999.
10. Ross Mike: Modeling Methods for Silent Boundaries in Infinite Media. ASEN 5519-006: Fluid-Structure Interaction Aerospace Engineering Sciences-University of Colorado at Boulder, 2004.
11. Moser W., Duenser Ch., (2004) Beer G.. Mapped infinite elements for three-dimensional multi-region boundary element analysis. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.61:317-328, 2004.

12. Watson J. O., Advanced implementation of the boundary element method for two- and three-dimensional elastostatics. *Developments in Boundary Element Methods - 1* (Editors P.K. Banerjee and R. Butterfield), Elsevier Applied Science Publishers, pp.31-63 1979.
13. Zienkiewicz O. C., Emson C., Bettess P., (1983) A novel boundary infinite element. *Int. J. for Num. Methods in Eng.* Vol. 16, 393-404, 1983.

Rękopis dostarczono, dnia 12.03.2007 r.

Opiniował: prof. dr hab. inż. Krystyn Pawluk

GEOMETRY AND PHYSICAL QANTITY
TRANSFORMATIONS IN 2D BOUNDARY ELEMENT
METHOD WITH INFINITE ELEMENTS

M. PAŃCZYK
J. SIKORA

ABSTRACT *Incorporation of Infinite Elements into Boundary Elements Method requires to introduce special shape functions for infinite region mapping. Two-dimensional object is the simplest example to follow changes made by these transformations. Both sets of shape functions, standard and infinite are quoted. Their application to geometry and field variables calculations is presented. Brief description of singularity treatment and its relation to shape functions is remained. Finally Boundary Integral Equation including infinite elements with related transformation steps is presented. It is for clarifying the application of infinite elements into existing BEM software.*