

Tadeusz J. SOBCZYK

PROBLEMY MODELOWANIA MATEMATYCZNEGO PRĄDNIC SYNCHRONICZNYCH WZBUDZANYCH MAGNESAMI TRWAŁYMI

STRESZCZENIE *W pracy przedstawiono metodykę tworzenia tzw. obwodowych modeli matematycznych maszyn synchronicznych wzbudzanych magnesami trwałymi. Modele takie posługują się pojęciami indukcyjności własnych i wzajemnych, które są definiowane dla cewek umieszczonych w obwodach magnetycznych o liniowych charakterystykach. Wprowadzenie magnesu trwałego, bazującego na efekcie histerezy, do obwodu magnetycznego maszyny stawia pod znakiem zapytania możliwość tworzenia takich modeli. W pracy podano warunki na jakich jest możliwe stosowanie modeli obwodowych dla maszyn wzbudzanych magnesami trwałymi.*

Obiektem szczegółowej analizy w tej pracy jest prądnica synchroniczna wzbudzana magnesami trwałymi umieszczonymi na powierzchni wirnika. Dla klasy takich maszyn utworzono model matematyczny, bardzo zbliżony do dwuosiowego modelu prądnic synchronicznych wzbudzanych elektro-magnetycznie. Model taki wymaga określenia zakresu jego stosowalności ze względu na zagrożenie utraty własności magnetycznych magnesów na skutek działania prądów twornika. W pracy zdefiniowano strefę prądów dopuszczalnych, umożliwiającą prostą ocenę zagrożenia na odmagnesowanie w dowolnych stanach pracy oraz podano sposób jej określenia.

Słowa kluczowe: *prądnice synchroniczne z magnesami trwałymi, modele bazujące na ko-energii, model dwuosiowy prądnicy synchronicznej, efekt demagnetyzacji, graniczne wartości prądów*

prof. dr hab. inż. Tadeusz J. SOBCZYK
tjsobczyk@neostrada.pl

Zakład Maszyn Elektrycznych
Instytut Elektrotechniki

1. WSTĘP

Współczesne metody projektowania układów zasilania i sterowania maszynami elektrycznymi są wspomagane modelowaniem matematycznym. Bardzo często maszyna elektryczna jest najważniejszym elementem takiego układu i jej model matematyczny decyduje o właściwym zaprojektowaniu, a także o poprawnej eksploatacji układu jako całości. Wygenerowanie odpowiednio adekwatnego modelu matematycznego maszyny elektrycznej staje się więc istotnym uzupełnieniem procesu jej projektowania. Dla maszyn o klasycznych konstrukcjach, typu trójfazowa maszyna asynchroniczna czy synchroniczna, istnieje już całkowita jednoznaczność przyporządkowania modelu matematycznego tym konstrukcjom. Dla nowych typów maszyn nie są jeszcze jednoznacznie przypisanie im modele matematyczne. Do klasy takich maszyn należy zaliczyć także prądnice synchroniczne wzbudzane magnesami trwałymi. Z tego względu, w ramach zadania dotyczącego utworzenia algorytmu dla projektowania prądnic synchronicznych wzbudzanych magnesami trwałymi podjęto tematykę związaną z ich modelowaniem matematycznym.

W procesie projektowania maszyny elektrycznej następuje wygenerowanie cech geometrycznych obwodu magnetycznego, określenie użytych materiałów oraz ukształtowanie uzwojeń maszyny, a także innych bardzo ważnych układów takich jak: izolacyjnego, termo-kinetycznego czy mechanicznego. Każdy z nich może mieć swoją reprezentację w postaci modelu matematycznego. Jednak przez model matematyczny maszyny elektrycznej rozumie się jej reprezentację równaniami matematycznymi pozwalającymi w zadowalającym stopniu przewidywać zewnątrz wielkości elektryczne i mechaniczne, określające elektro-mechaniczną przemianę energii w niej zachodzącą. Na proces tworzenia modelu matematycznego składa się zarówno określenie struktury równań matematycznych jak również określenie parametrów w nich występujących. Ta druga część procesu jest możliwa jedynie po ukształtowaniu w procesie projektowania obwodu magnetycznego oraz uzwojeń maszyny.

Prądnice synchroniczne wzbudzane magnesami trwałymi znalazły się w sferze zainteresowania techniki stosunkowo niedawno ze względu na rozwój inżynierii materiałów magnetycznych i powstaniu magnesów trwałych nowej generacji o bardzo dobrych parametrach. Należą do nich magnesy utworzone na bazie pierwiastków ziem rzadkich typu Sm-Co oraz Ne-Fe-Bo, zapewniających możliwość wytwarzania pól magnetycznych o parametrach porównywalnych z wytwarzanymi elektro-magnetycznie. Zainteresowanie prądnicami synchronicznymi wzbudzanymi magnesami trwałymi jest związane z ogólnościowymi

tendencjami wspomagania energetyki lokalnymi siłowniami bazującymi na odnawialnych źródłach energii takich jak energia wody czy wiatru, w których generator synchroniczny ze wzbudzeniem magnetostaticznym wydaje się być najprostszym przetwornikiem energii. Z tego względu zarówno techniki projektowania jak i modelowania matematycznego tego typu przetworników energii są ciągle rozwijane i doskonalone.

Modele matematyczne prądnic synchronicznych wzbudzone magnesami trwałymi powinny zapewniać możliwość względnie prostego rozwiązywania różnych zagadnień operacyjnych związanych z wytwarzaniem energii elektrycznej ze źródeł odnawialnych. Do takiej klasy należą tzw. modele obwodowe maszyn elektrycznych, powszechnie wykorzystywane do rozwiązywania podobnych zadań dla klasycznych maszyn elektrycznych. Niniejsze opracowanie ma na celu zwrócenie uwagi na różnice w modelowaniu maszyn z magnesami trwałymi w stosunku do klasycznych maszyn synchronicznych oraz przedstawienie metodyki pozwalającej skutecznie tworzyć odpowiednie modele matematyczne. Przyjęto założenie, że mają to być modele matematyczne możliwie mało różniące się od powszechnie akceptowanych dwuosiowych modeli generatorów synchronicznych w postaci równań różniczkowych pozwalających odtwarzać zarówno stany dynamiczne jak i analizować współpracę takich generatorów z układami energoelektronicznymi.

2. ZASTOSOWANIE FORMALIZMU LAGRANGE'A DO TWORZENIA MODELI MATEMATYCZNYCH MASZYN WZBUDZANYCH MAGNESAMI TRWAŁYMI

Powszechnie akceptowaną drogą do formułowania równań maszyn elektrycznych jest formalizm Lagrange'a, szczególnie korzystny gdy głównym przedmiotem zainteresowania są elektromechaniczne przemiany energii. Jest to metoda powszechnie znana i stosowana dla tworzenia modeli obwodowych klasycznych maszyn elektrycznych o bardzo różnym stopniu szczegółowości. Jednak zastosowanie jej do tworzenia modeli maszyn wzbudzonych magnesami trwałymi napotyka zasadniczą przeszkodę na wstępie, już na etapie ogólnych założeń.

Dla przypomnienia, formalizm Lagrange'a bazuje na tzw. „energetycznym opisie elementów”, który zakłada, że stan elementu opisuje jednoznacznie jego energia lub ko-energia. W klasycznych maszynach elektrycznych elementami tworzącymi układ przetwarzający energię są elementy zachowawcze zdol-

ne bezstratnie akumulować energii, do których zaliczamy cewki i masy wirujące (także kondensatory oraz elementy sprężyste). Cewki, czyli tzw. elementy indukcyjne, magazynują energię (i ko-energię) w polu magnetycznym. Aby energia (lub ko-energia) opisywała jednoznacznie stan cewek ich charakterystyki tj. związki określające strumienie skojarzone cewek jako funkcję prądów i_1, \dots, i_N oraz kąta obrotu wirnika φ muszą być jednoznaczne:

$$\psi_n = \psi_n(\varphi, i_1, \dots, i_N), \quad (\text{dla } n \in \{1, \dots, N\}), \quad (2.1)$$

Wówczas energia i ko-energia, opisywane wyrażeniami:

$$E_m(\varphi, \Psi) = \sum_{n=1}^N \int_0^{\psi_n} i_n(\varphi, \psi_1, \dots, \psi'_n, 0, \dots, 0) d\psi'_n, \quad (2.2)$$

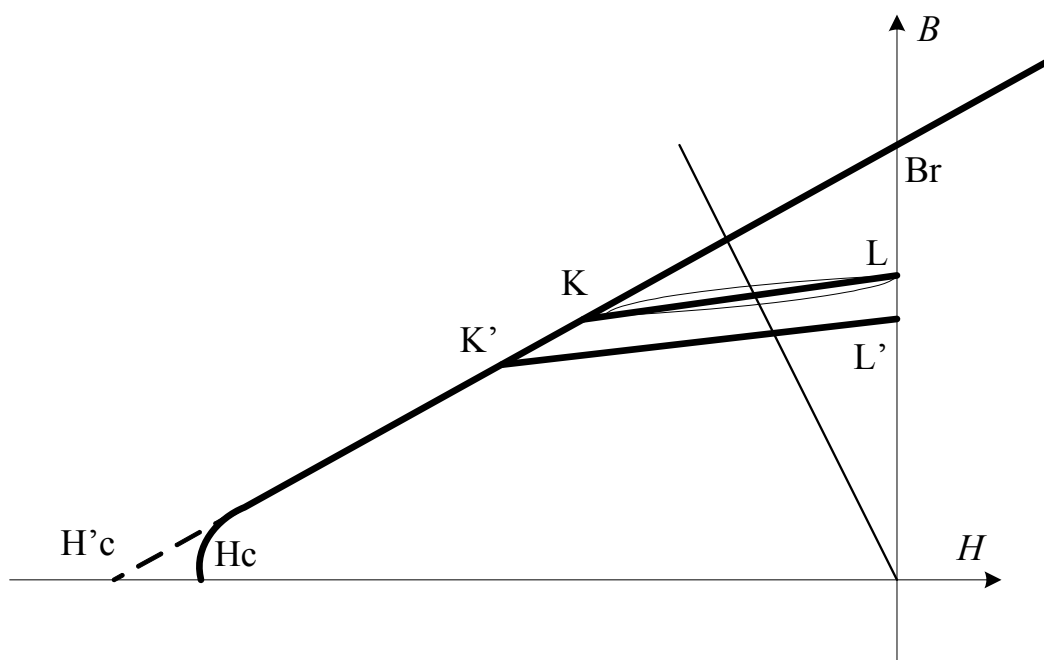
oraz:

$$E_{mo}(\varphi, \mathbf{i}) = \sum_{n=1}^N \int_0^{i_n} \psi_n(\varphi, i_1, \dots, i'_n, 0, \dots, 0) di'_n. \quad (2.3)$$

są jednoznacznie określone. Jest to założenie fundamentalne dla formalizmu Lagrange'a i oznacza fizycznie, że energia (oraz ko-energia) zmagazynowana w polu magnetycznym w maszynie zależą tylko od końcowych wartości – odpowiednio – strumieni skojarzonych lub prądów cewek, a nie zależą od sposobu gromadzenia energii. Eliminuje to możliwość uwzględniania zjawiska histerezy magnetycznej oraz jest równoznaczne z założeniem, że tory prądów w maszynie są jednoznacznie określone, czyli, że nie ma ośrodków ciągłych przewodzących prąd. W klasycznych maszynach, w których podstawowe uzwojenia wykonywane są z przewodów, efekty wynikające z istnienia pętli histerezy oraz z występowania prądów wirowych są zjawiskami drugorzędnymi dla procesu przetwarzania energii i są pomijane. W zależności od potrzeby są modelowane zastępczo.

W maszynach wzbudzanych magnesami trwałymi histereza jest podstawowym zjawiskiem. Gdy w obwodzie magnetycznym maszyny pojawia się magnes trwały, którego istota działania wynika ze zjawiska histerezy magnetycznej, nie można pominąć efektu histerezy. Własności magnesu trwałego określa charakterystyka odmagnesowania przechodząca przez punkty B_r oraz C . Dla współczesnych magnesów jest ona liniowa w prawie całym zakresie jak to pokazano na rys. 1. Indukcje B_r osiągają wartości rzędu 1,2 T, a natężenia koercji H_c wartości rzędu 1000 kA/m.

Analizując zmiany stanu magnesu trwałego pod wpływem oddziaływania uzwojeń maszyny okazuje się, że następują one zgodnie z wewnętrzną pętlą histerezy między punktami KL na rys. 1, która jest bardzo wąska i jest zazwyczaj zastępowana linią prostą, która dalej będzie nazywana krzywą powrotu. W takich warunkach pracy znika niejako efekt histerezowy i tę lokalną charakterystykę można uznać za jednoznaczną, jeżeli punkt K nie zostanie przekroczony. Jeżeli oddziaływanie uzwojeń zmieni punkt K na K' na charakterystyce odmagnesowania, ustali się nowa jednoznaczna krzywa K'L' wzdłuż której zmieniać się będzie punkt pracy magnesu. We współczesnych magnesach trwałych z metali ziem rzadkich te krzywe powrotu pokrywają się z charakterystyką odmagnesowania dla jej prostoliniowej części. Zatem można założyć, że dla zmian wywoływanych oddziaływaniem uzwojeń można założyć, że maszyny punkt pracy magnesu trwałego porusza się po jednoznacznej krzywej odmagnesowania, co odpowiada jednoznaczności zmian energii (oraz ko-energii) w układzie. Stwarza to możliwość wykorzystania formalizmu Lagrange'a do modelowania maszyn z magnesami trwałymi.



Rys. 1. Charakterystyka odmagnesowania oraz charakterystyki pracy magnesu trwałego w obwodzie magnetycznym maszyny elektrycznej

W tym celu należy jednak dokonać pewnych modyfikacji pojęć charakterystyk cewek oraz definicji energii i ko-energii cewek. Konieczność modyfikacji definicji charakterystyk cewek wynika z elementarnego faktu, że w maszy-

nie z magnesem trwałym każda z cewek może mieć niezerowy strumień sprzężony w stanie bezprądowym. W najprostszym przypadku liniowego obwodu magnetycznego charakterystyki cewek (czyli uzwojeń) klasycznej maszyny są opisywane funkcjami liniowymi względem prądów:

$$\psi_n = L_{n,1}(\varphi) \cdot i_1 + \dots + L_{n,N}(\varphi) \cdot i_N,$$

w których występują indukcyjności własne i wzajemne. Wynika z nich, że w stanie bezprądowym strumienie skojarzone uzwojeń są zerowe. W maszynie z magnesami trwałymi te same cewki będą opisywane funkcjami liniowymi względem prądów, lecz zawierającymi człon stały, który może zależeć od kąta obrotu:

$$\psi_n = L_{n,1}(\varphi) \cdot i_1 + \dots + L_{n,N}(\varphi) \cdot i_N + \psi_{0,n}(\varphi) \quad (2.4)$$

Współczynniki proporcjonalności $L_{n,k}(\varphi)$ w funkcjach (2.4) są indukcyjnościami własnymi (dla $n = k$) i wzajemnymi (dla $n \neq k$) uzwojeń maszyny, a człony stałe $\psi_{0,n}(\varphi)$ określają strumienie skojarzone uzwojeń w stanie bezprądowym. Dla nieliniowego obwodu magnetycznego charakterystyki uzwojeń maszyny z magnesami trwałymi można zapisać w ogólnej postaci:

$$\psi_n = \psi_{i,n}(\varphi, i_1, \dots, i_N) + \psi_{0,n}(\varphi), \quad \text{gdzie } \psi_{i,n}(\varphi, 0, \dots, 0) \equiv 0 \quad (2.5)$$

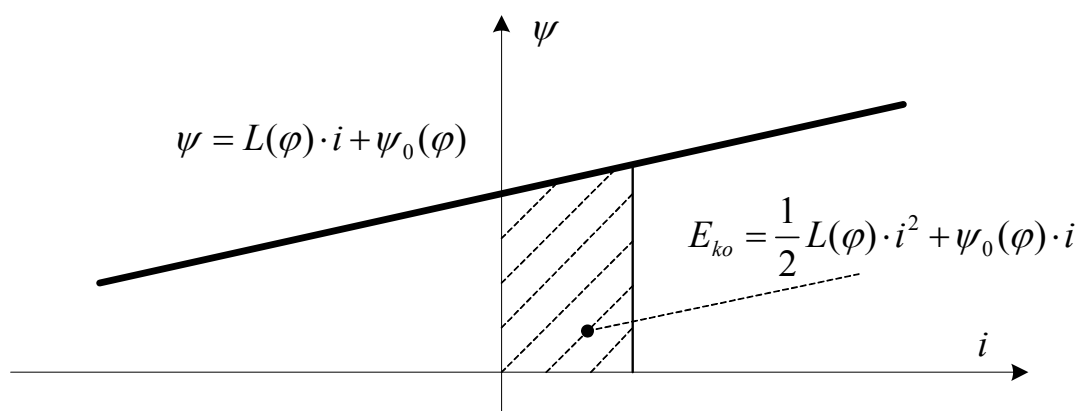
W konsekwencji ko-energia magnetyczna (konieczna przy tworzeniu równań Lagrange'a maszyny) układu cewek w liniowym obwodzie magnetycznym jest opisywana wzorem:

$$E_{ko}^{cewek}(\varphi, \mathbf{i}) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^N L_{n,k}(\varphi) i_n i_k + \sum_{n=1}^N \psi_{0,n}(\varphi) \cdot i_n \quad (2.6)$$

a dla nieliniowego obwodu ma postać:

$$E_{ko}^{cewek}(\varphi, \mathbf{i}) = \sum_{n=1}^N \int_0^{i_n} \psi_{i,n}(\varphi, i_1, \dots, i'_n, 0, \dots, 0) di'_n + \sum_{n=1}^N \psi_{0,n}(\varphi) \cdot i_n \quad (2.7)$$

W elementarnym przypadku, dla jednej cewki umieszczonej w liniowym obwodzie magnetycznym z magnesem trwałym zależności (2.5) oraz (2.6) mają bardzo prostą interpretację, którą ilustruje rys. 2.



Rys. 2. Charakterystyka oraz ko-energia cewki w obwodzie magnetycznym z magnesem trwałym

Ko-energia zgromadzona w obwodzie magnetycznym przez prądy musi zostać uzupełniona ko-energią zmagazynowaną w obwodzie magnetycznym przez magnes trwały w stanie bezprądowym. Składa się ona z dwóch części; ko-energii zgromadzonej w magnesie trwałym oraz w pozostałych częściach obwodu magnetycznego nie wykazujących histerezy, w tym głównie w szczelinie powietrznej:

$$E_{ko}^{mag}(\varphi, \theta) = E_{ko}^m(\varphi) + E_{ko}^\delta(\varphi) \quad (2.8)$$

Ze względu na proces przetwarzania energii istotne jest aby ta ko-energia zależała od współrzędnej mechanicznej, w maszynie elektrycznej od kąta obrotu. Wartości poszczególnych składowych ko-energii oblicza się ze wzorów:

- dla obszaru magnesu trwałego

$$E_{ko}^m(\varphi) = \int_{V_m} \left(\int_{H_c}^{H_m} B_m(H) dH \right) dV_m \quad (2.9)$$

- dla obszaru szczeliny powietrznej

$$E_{ko}^\delta(\varphi) = \int_{V_\delta} \left(\int_0^{H_\delta} B_\delta(H) dH \right) dV_\delta \quad (2.10)$$

Wpływ prądów na wartości ko-energii zgromadzonej w całym obwodzie magnetycznym, łącznie z magnesem trwałym, jest uwzględniany w ko-energii cewek. Całkowita ko-energia zgromadzona w obwodzie magnetycznym maszyny wzbudzanej magnesami trwałymi jest sumą ko-energii cewek oraz wprowadzanej do obwodu maszyny przez magnes trwały w stanie bezprądowym:

$$E_{ko}(\varphi, \mathbf{i}) = E_{ko}^{cevek}(\varphi, \mathbf{i}) + E_{ko}^{mag}(\varphi, \boldsymbol{\theta}) \quad (2.11)$$

Uzupełniona ko-energią ruchu obrotowego wirnika maszyny $E_{ko}^{mech} = \frac{1}{2} J \cdot \omega^2$ jest podstawą do tworzenia równań maszyn wzbudzanych magnesami trwałymi na bazie równań Lagrange'a o ogólnej postaci:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_{ko}(\varphi, \mathbf{i})}{\partial i_n} \right) = u_n - R_n i_n, \quad \text{dla } n \in \{1, \dots, N\} \quad (2.12a)$$

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} - \frac{\partial E_{ko}(\varphi, \mathbf{i})}{\partial \varphi} = T_m - D \omega \quad (2.12b)$$

Przy założeniu liniowości obwodu magnetycznego, co w maszynach wzbudzanych magnesami trwałymi jest przeważnie dopuszczalne ze względu na stosunkowo duże szczeliny powietrzne (wnoszone także przez magnes trwały), równania maszyny można zapisać w postaci:

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^N (L_{n,k}(\varphi) \cdot i_k) + \psi_{0,n}(\varphi) \right) + R_n \cdot i_n = u_n, \quad \text{dla } n \in \{1, \dots, N\} \quad (2.13a)$$

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + D \frac{d\varphi}{dt} = T_{em} + T_m \quad (2.13b)$$

gdzie:

$$T_{em} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial L_{n,k}(\varphi)}{\partial \varphi} \cdot i_n \cdot i_k \right) + \sum_{n=1}^N \left(\frac{\partial \psi_{0,n}(\varphi)}{\partial \varphi} \cdot i_n \right) + \frac{\partial E_{ko}^{mag}(\varphi, \boldsymbol{\theta})}{\partial \varphi} \quad (2.13c)$$

Równania te, dość oczywiste, są bardzo zbliżone do równań Lagrange'a klasycznych maszyn elektrycznych. Człony $\psi_{0,n}(\varphi)$ oraz $E_{ko}^{mag}(\varphi, \boldsymbol{\theta})$ wynikają z istnienia magnesów trwałych, jednak także indukcyjności uwzględniają fakt istnienia magnesów trwałych w obwodzie magnetycznym maszyny.

3. UWAGI OGÓLNE O MODELOWANIU MASZYN WZBUDZANYCH MAGNESAMI TRWAŁYMI

Równania maszyny z magnesami trwałymi w swej najogólniejszej formie (2.12), uwzględniające nieliniowość obwodu magnetycznego, wymagają znajomości ko-energii jako funkcji prądów wszystkich uzwojeń oraz kąta obrotu wirnika względem stojana. Jest to suma ko-energii poszczególnych części obwodu magnetycznego, czyli ko-energia w ferro-magnetyku, stanowiącym magnetowód, w szczelinie powietrznej oraz w magnesach trwałych. Obliczenie jej wartości jest możliwe jedynie na podstawie znajomości rozkładu pola w obwodzie magnetycznym maszyny, co jest możliwe jedynie na drodze numerycznego rozwiązywania równań pola magnetycznego. Jeżeli liczba niezależnych uzwojeń w maszynie jest duża, to wyznaczenie funkcji ko-energii jest bardzo trudne, tym bardziej, że wymagana jest dość duża dokładność jej wyznaczania, gdyż w równaniach (2.12) występują jej pochodne cząstkowe względem prądów oraz kąta obrotu, które powinny być znane z wystarczającą dokładnością. Dla maszyn trójfazowych wymaga to określenia ko-energii jako funkcji czterech zmiennych i jest zadaniem dość złożonym. Alternatywą jest określenie nieliniowych charakterystyk uzwojeń w postaci (2.5) oraz funkcji ko-energii wprowadzonej do obwodu magnetycznego przez magnes trwały w stanie bezprądowym. Należy jednak pamiętać, że takie charakterystyki muszą spełniać związki:

$$\frac{\partial \psi_n}{\partial i_k} = \frac{\partial \psi_k}{\partial i_n}, \quad \text{dla } n, k \in \{1, \dots, N\} \quad (3.1)$$

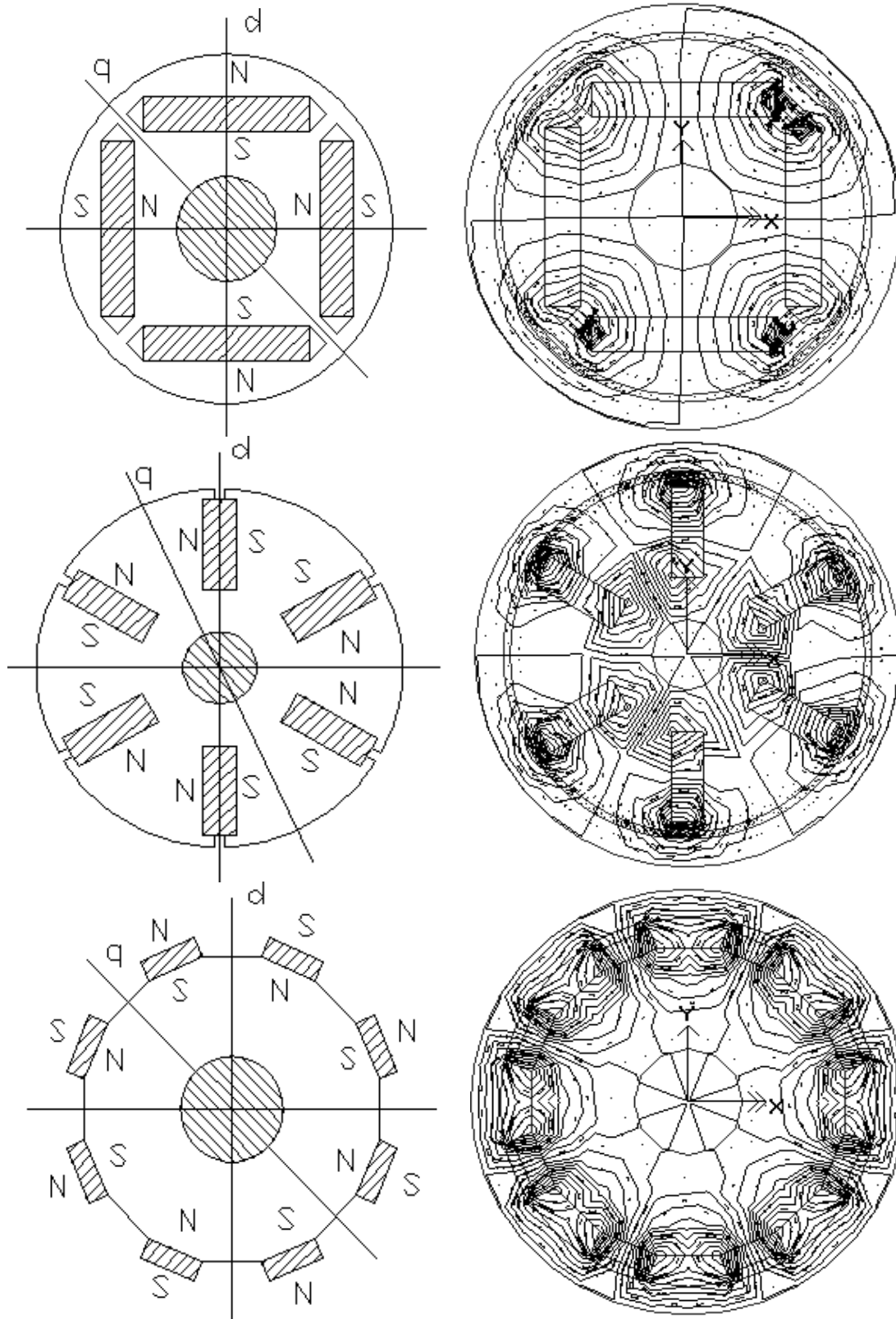
aby obliczona na ich podstawie ko-energia, niezbędna dla określenia momentu elektromagnetycznego, była jednoznaczna.

W przypadku dopuszczalności założenia o liniowości ferromagnetyka zadanie staje się nieco prostsze, bo dla równań (2.13) należy określić indukcyjności własne i wzajemne oraz strumienie sprzężone dla wszystkich uzwojeń jako funkcje kąta obrotu, a także ko-energię wprowadzaną do obwodu magnetycznego maszyny w stanie bezprądowym jako funkcję kąta. Jednak i w tym przypadku występują istotne różnice w stosunku do klasycznych maszyn. Obliczanie indukcyjności maszyn klasycznych jest zagadnieniem stosunkowo dobrze rozpracowanym i istnieje obszerna literatura tego przedmiotu. Znane i stosowane są różne podejścia od bardzo prostych, wykorzystujących jednowymiarowe, opisywane analitycznie, rozkłady pola w szczelinie powietrznej po

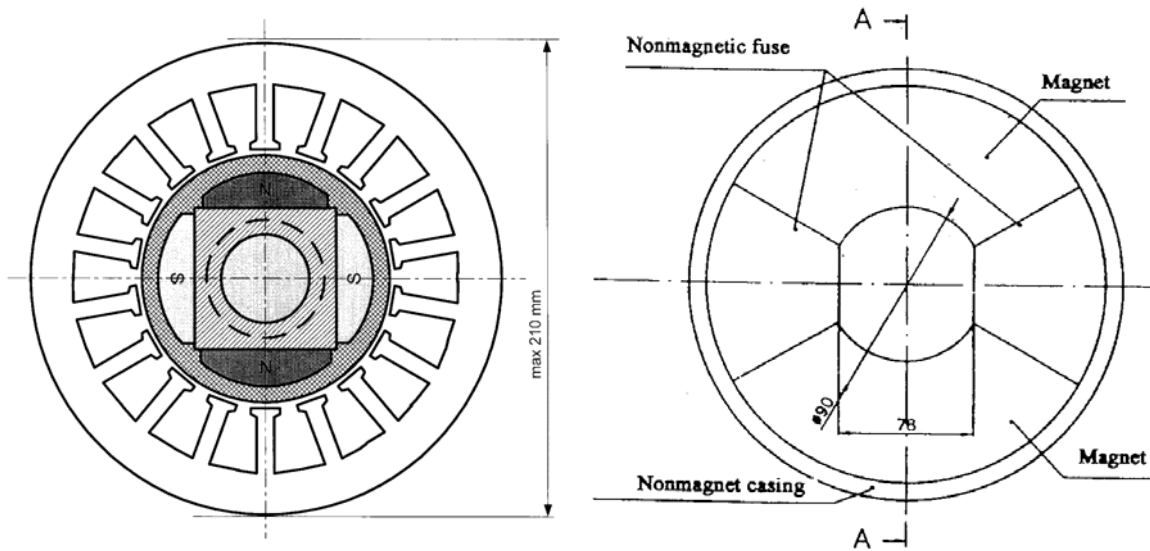
czysto numeryczne, bazujące na rozwiązaniach równań pola magnetycznego w przestrzeni trójwymiarowej. W modelach dynamicznych, opisanych powyżej bardzo ważne jest prawidłowe określenie jakościowych cech indukcyjności, strumieni skojarzonych czy ko-energii jako funkcji kąta obrotu wirnika. Numeryczne obliczanie wartości tych funkcji stwarza konieczność ich aproksymacji, co znacznie zwiększa pracochłonność pozyskiwania niezbędnych informacji. Dla najprostszych modeli maszyn klasycznych indukcyjności są obliczane na podstawie rozkładu składowej promieniowej pola w szczelinie powietrznej, na co pozwala specyficzna budowa ich obwodu magnetycznego. Geometria obwodu magnetycznego maszyn wzbudzanych magnesami trwałymi jest bardzo różnorodna i nie zawsze proste zależności, wystarczająco dokładne dla maszyn klasycznych, można wykorzystywać dla maszyn z magnesami trwałymi. Niezależnie od indukcyjności, dla tych maszyn należy także określić zmienność strumieni skojarzonych oraz ko-energii w funkcji kąta obrotu w stanie bezprądowym. Zatem w wielu wypadkach obliczanie parametrów równań maszyn z magnesami trwałymi będzie wymagało numerycznego określenia rozkładu pola w maszynie i na tej podstawie numeryczne obliczenie koniecznych parametrów.

Na rysunku 3 zestawiono spotykane w maszynach prądu przemiennego usytuowania magnesów trwałych na wirniku oraz obrazy pola magnetycznego przez nie wzbudzone w stanie bezprądowym. Z porównania tych rozkładów widać, że nie zawsze rozkłady pola są zbliżone do spotykanych w maszynach klasycznych. Pod tym względem najlepiej wypadają konstrukcje z magnesami trwałymi umieszczonymi powierzchniowo.

Na rysunku 4 przedstawiono proponowane w literaturze [4] rozwiązania konstrukcyjne wirników dla mini-turbogeneratorów napędzanych szybkoobrotowymi turbinami gazowymi. Magnesy trwałe zajmują w tych konstrukcjach znaczną część objętości wirnika, co powoduje, że szczeliny powietrzne dla uzwojenia stojana są bardzo duże i nie można zakładać, że pole w szczelinie wytworzone przez te uzwojenia ma kierunek promieniowy. Obliczanie parametrów takich maszyn musi się odbywać przy wsparciu metod polowych. W dalszych rozważaniach skoncentrowano się na obliczaniu parametrów maszyn z magnesami trwałymi umieszczonymi powierzchniowo na wirniku, uznając taką konstrukcję za najkorzystniejszą dla prądnic synchronicznych małej i średniej mocy przeznaczonych do lokalnych siłowni wykorzystujących odnawialne źródła energii.



Rys. 3. Sposoby rozmieszczenia magnesów trwałych oraz odpowiadające im obrazy pola w stanie bezprądowym



Rys. 4. Konstrukcje wirników mini-turbogeneratorów wysokoobrotowych

4. MODEL MATEMATYCZNY PRĄDNIC SYNCHRONICZNYCH WZBUDZANYCH MAGNESAMI TRWAŁYMI UMIESZCZONYMI POWIERZCHNIOWO NA WIRNIKU

A. Założenia

Przedmiotem rozważań jest klasa prądnic synchronicznych o klasycznie zbudowanym cylindrycznym stojanie, z symetrycznym 3-fazowym uzwojeniem umieszczonym w żłobkach. Wirnik prądnicy jest cylindryczny, a na jego powierzchni umieszczonych jest symetrycznie rozmieszczone $2p$ magnesów trwałych namagnesowane naprzemiennie. W celu reprezentacji uzwojeń stojana zostaną wykorzystane wielkości używane przy analizie klasycznych maszyn, takie jak okład prądu przepływ uzwojenia i jego rozkład harmoniczny. W celu czytelności rozważań założono, że uzwojenia stojana wytwarzają przepływ mono-harmoniczny p -tej harmonicznej w stosunku do obwodu maszyny.

$$\Theta_{s,m}(x,t) = i_{s,m}(t) \frac{4 w_s k_{s,p}}{\pi 2p} \cos p(x - (m-1)\alpha); \quad \alpha = \frac{2\pi}{3p}, \quad m \in \{1, 2, 3\} \quad (4.1)$$

gdzie x jest położeniem kątowym, w_s oznacza liczbę zwojów fazy stojana, a $k_{s,p}$ oznacza współczynnik uzwojenia dla podstawowej harmonicznej. Geometria szczeliny powietrznej jest reprezentowana ogólnie akceptowaną przy analizie maszyn klasycznych funkcją permeancji $\lambda(x - \varphi)$, uwzględniającą obecność magnesów trwałych na obwodzie wirnika. Magnesy trwałe są reprezentowane funkcją:

$$B_m(x - \varphi) = B_r \cdot \text{sgn}_{NS} p(x - \varphi) \quad (4.2)$$

określającą ich kątową lokalizację na obwodzie wirnika, własności magnetyczne oraz kierunek magnesowania. Założono, że magnesy trwałe są namagnesowane promieniowo, a ich charakterystyka odmagnesowania jest liniowa w całym zakresie i określona jednoznacznie przez wielkości indukcji remanentu oraz natężenie koercji:

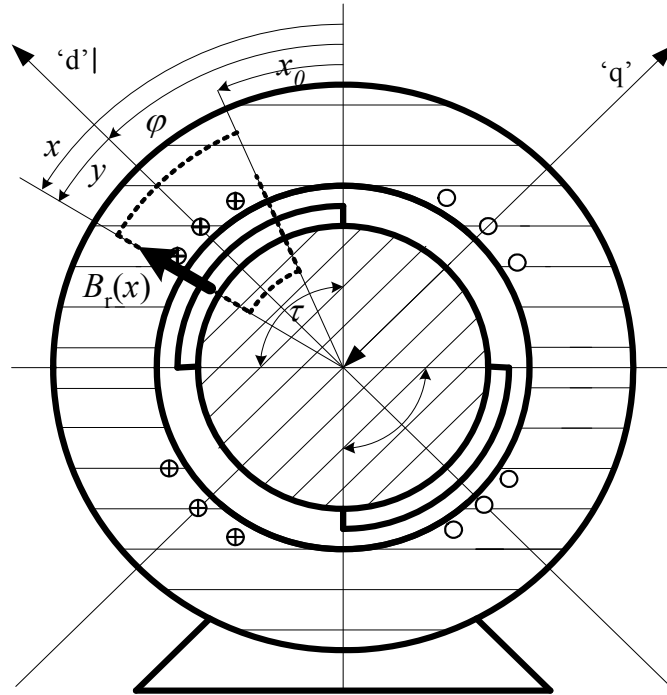
$$B = J + \mu_0 \cdot H = B_r + \mu_0 \cdot (1 + \chi) \cdot H; \quad \text{gdzie} \quad \mu_0 \cdot (1 + \chi) = \frac{B_r}{H'_c} \quad (4.3)$$

gdzie:

- J – polaryzacja magnetyczna,
- χ – podatność magnetyczna,
- B_r – indukcja remanentu, oraz
- H'_c – natężenie koercji po zlinearyzowaniu krzywej odmagnesowania.

B. Rozkład pola magnetycznego w szczelinie powietrznej

Przy takich założeniach można względnie prosto adaptować pojęcia i metody obliczania indukcyjności stosowane z powodzeniem dla maszyn klasycznych, do maszyn z magnesami trwałymi, uzupełniając je w miarę potrzeb cząstkowymi analizami polowymi. Podstawą rozważań jest jednowymiarowa analiza pola w szczelinie powietrznej w poprzecznym przekroju maszyny [7]. Na rysunku 5 przedstawiono schematycznie usytuowanie zastępczych uzwojeń stojana w osiach 'd-q' oraz magnesów trwałych na wirniku w celu objaśnienia tej analizy. Rozkład składowej promieniowej pola w szczelinie i magnesie wyznacza się z prawa przepływu w postaci całkowej $\oint \bar{H} \cdot d\bar{l} = \sum \Theta_s$ dla konturu zaznaczonego linią przerywaną na rys. 5 przy złożeniu prostoliniowej charakterystyki magnesu (4.3).



Rys. 5. Symbolicznie przedstawienie usytuowania magnesu względem uzwojeń 'd', 'q'

Przy powyższych założeniach składowa promieniowa pola w szczelinie opisywana jest zależnością:

$$B(x, \varphi, t) = \mu_0 \cdot \lambda(x - \varphi) \cdot \sum_{n=1}^3 \Theta_{s,n}(x, t) + \frac{\lambda(x - \varphi)}{\lambda'_m(x - \varphi)} \cdot (1 - k_\sigma) \cdot B_m(x - \varphi) \quad (4.4)$$

gdzie:

$$\lambda(x - \varphi) = \frac{1}{d_\delta(x - \varphi) + \frac{d_m(x - \varphi)}{(1 + \chi)}}$$

oraz:

$$\lambda'_m(x - \varphi) = \frac{(1 + \chi)}{d_m(x - \varphi)}$$

Pierwszy wyraz sumy we wzorze (4.4) określa składową pola wywołowaną prądami uzwojeń stojana, natomiast drugi człon określa składową wytworzoną przez magnesy trwałe w stanie bezprądowym. W tych zależnościach

wielkości $d_s(x - \varphi)$ oraz $d_m(x - \varphi)$ są długościami linii sił pola magnetycznego odpowiednio w szczelinie powietrznej oraz w magnesie trwałym dla danego położenie kąтового na obwodzie, a współczynnik k_σ określa procentowy udział strumienia rozproszenia magnesu trwałego w stanie bezprądowym. Dokładne określenie długości linii sił pola oraz wartości strumienia rozproszenia magnesu wymaga rozwiązania równań pola magnetycznego, lecz ich przybliżone wartości można określić na podstawie analitycznych formuł stosowanych w klasycznych maszynach wydatno-biegunowych.

C. Indukcyjności własne i wzajemne uzwojeń stojana

Przy założeniu mono-harmonicznego rozkładu okładu uzwojeń (4.1) oraz aproksymacji funkcji zastępczej permeancji w postaci:

$$\lambda(x - \varphi) = A_0 + A_2 \cos 2p(x - \varphi) \quad (4.5)$$

obliczanie indukcyjności zgodnie z ogólną definicją:

$$L_{n,k}(\varphi) = \frac{\psi_n}{i_k}$$

sprowadza się do obliczenia strumienia skojarzonego n -tego uzwojenia wytworzonego przez pole wzbudzone przez uzwojenie k -te, bez uwzględniania strumienia skojarzonego tego uzwojenia w stanie bezprądowym, które można zapisać:

$$B_k(x, \varphi, t) = i_{s,k}(t) \cdot \mu_0 \cdot (A_0 + A_2 \cos 2p(x - \varphi)) \cdot \frac{4}{\pi} \frac{w_s k_{s,p}}{2p} \cos p(x - (k-1)\alpha) \quad (4.6)$$

gdzie A_0 oraz A_2 są współczynnikami Fouriera funkcji zastępczej permeancji, która uwzględnia także obecność magnesu na powierzchni wirnika. Wykorzystując pojęcie zastępczych uzwojeń sinusoidalnych [5] strumień skojarzony uzwojenia n -tego można określić z wzoru:

$$\psi_n = p \cdot r \cdot l \cdot \int_{(n-1)\alpha - \pi/p}^{(n-1)\alpha} \left(\left(-\frac{2}{\pi} w_s k_{s,p} \sin p(x - (n-1)\alpha) \right) \cdot \int_x^{x+\pi/p} B_k(x', \varphi, t) dx' \right) dx \quad (4.7)$$

gdzie r oznacza promień wewnętrzny okna stojana, a przez l oznaczono zastępczą długość maszyny. W efekcie pozwala to obliczyć wszystkie indukcyjności

ci własne i wzajemne na podstawie wymiarów geometrycznych obwodu magnetycznego oraz budowy uzwojeń:

$$L_{n,k}(\varphi) = L \cdot \cos(p \cdot (n-k) \cdot \alpha) + \Delta L \cdot \cos(2p \cdot ((n-k) \cdot \alpha + (n-1) \cdot \alpha - \varphi)) \quad (4.8)$$

gdzie:

$$L = \frac{4}{\pi} \mu_0 \cdot A_0 \cdot r \cdot l \cdot \left(\frac{w_s k_{s,p}}{p} \right)^2; \quad \Delta L = \frac{2}{\pi} \mu_0 \cdot A_2 \cdot r \cdot l \cdot \left(\frac{w_s k_{s,p}}{p} \right)^2$$

W prądnicach z magnesami trwałymi wartość składowej zmiennej indukcyjności ΔL może być bardzo mała gdyż dla współczesnych magnesów podatność magnetyczna χ jest relatywnie mała. Wówczas indukcyjności uzwojeń prądnicy określa wzór:

$$L_{n,k}(\varphi) = L \cdot \cos(p \cdot (n-k) \cdot \alpha) \quad (4.9)$$

Tak obliczone indukcyjności należy uzupełnić indukcyjnościami rozproszonych, uwzględniając ewentualne sprzężenia uzwojeń stojana przez strumienie rozproszonych, które mogą być istotne ze względu na stosunkowo duże szczeliny powietrzne spowodowane powierzchniowym usytuowaniem magnesów trwałych. Do obliczania indukcyjności rozproszonych można zastosować metody stosowane dla maszyn klasycznych.

D. Strumienie skojarzone uzwojeń w stanie bezprądowym

Jak już wspomniano, maszyny z magnesami trwałymi odróżnia od maszyn klasycznych fakt, że w stanie bezprądowym z uzwojeniami jest sprzężony pewien strumień magnetyczny. Można go określić z wzoru analogicznego do (4.7), podstawiając w miejsce pola magnetycznego w całości wewnętrznej pole wytwarzane przez magnes w stanie bezprądowym:

$$\psi_{0,n}(\varphi) = p \cdot r \cdot l \cdot \int_{(n-1) \cdot \alpha - \pi/p}^{(n-1) \cdot \alpha} \left(\left(-\frac{2}{\pi} \cdot w_s k_{s,p} \sin p(x - (n-1)\alpha) \right) \cdot \int_x^{x+\pi/p} B_0(x', \varphi) dx' \right) dx \quad (4.10)$$

gdzie:

$$B_0(x, \varphi) = \frac{\lambda(x - \varphi)}{\lambda'_m(x - \varphi)} \cdot (1 - k_\sigma) \cdot B_r \cdot \text{sign}_{NS} p \cdot (x - \varphi) \quad (4.11)$$

Przy założeniu mono-harmoniczności przepływów uzwojeń stojana niezerową wartość całek w (4.7) otrzyma się tylko z podstawowej harmonicznej funkcji $B_0(x, \varphi)$:

$$B_{0,p}(x, \varphi) = B_p \cdot \cos(p \cdot (x - \varphi)) \quad (4.12)$$

w którym wartość B_p należy określić na podstawie (4.11). Wynik obliczeń można przedstawić w postaci:

$$\psi_{0,n}(\varphi) = \Psi_p \cdot \cos(p \cdot (\varphi - (n-1) \cdot \alpha)) \quad (4.13)$$

gdzie:

$$\Psi_p = 2 \cdot r \cdot l \cdot B_p \cdot \frac{w_s k_{s,p}}{p}$$

E. Zmienność ko-energii w stanie bezprądowym

Przy założeniu, że wewnętrzna powierzchnia stojana prądnicy jest cylindryczna, w stanie bezprądowym zarówno ko-energia w magnesie trwałym jak i w szczelinie powietrznej nie będą zależne od położenia wirnika, czyli nie będą zależne od współrzędnej mechanicznej φ .

$$E_{ko}^{mag}(\varphi, \theta) = \text{constant} \quad (4.14)$$

Oznacza to, że w stanie bezprądowym magnesy trwale nie będą wytwarzały momentu elektromagnetycznego.

F. Równania modelu matematycznego

Równania prądnicy, po uporządkowaniu w zapisie macierzowym przyjmują postać:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_{s,1} \\ u_{s,2} \\ u_{s,3} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} R & & \\ & R & \\ & & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{s,1} \\ i_{s,2} \\ i_{s,3} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \left(\begin{bmatrix} L_\sigma & M_\sigma & M_\sigma \\ M_\sigma & L_\sigma & M_\sigma \\ M_\sigma & M_\sigma & L_\sigma \end{bmatrix} + L \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} i_{s,1} \\ i_{s,2} \\ i_{s,3} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \Psi_p \cdot \begin{bmatrix} \cos(p\varphi) \\ \cos(p\varphi - \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(p\varphi - \frac{4\pi}{3}) \end{bmatrix} \\ &+ \Delta L \begin{bmatrix} \cos 2p\varphi & \cos(2p\varphi - \frac{2\pi}{3}) & \cos(2p\varphi - \frac{4\pi}{3}) \\ \cos(2p\varphi - \frac{2\pi}{3}) & \cos(2p\varphi - \frac{4\pi}{3}) & \cos 2p\varphi \\ \cos(2p\varphi - \frac{4\pi}{3}) & \cos 2p\varphi & \cos(2p\varphi - \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{s,1} \\ i_{s,2} \\ i_{s,3} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.15a)$$

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + D \frac{d\varphi}{dt} = T_{em} + T_m \quad (4.15b)$$

Wyrażenie określające moment elektromagnetyczny w tym równaniu przyjmuje postać:

$$T_{em} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^3 \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial L_{n,k}(\varphi)}{\partial \varphi} \cdot i_{s,n} \cdot i_{s,k} \right) + \sum_{n=1}^3 \left(\frac{\partial \psi_{0,n}(\varphi)}{\partial \varphi} \cdot i_{s,n} \right) \quad (4.15c)$$

Struktura tych równań jest bardzo zbliżona do równań klasycznego generatora synchronicznego wydawnego-biegunowego, wzbudzanego prądem o stałej wartości, który nie ulega zmianie pod wpływem prądów twornika. Można zatem uzyskać istotne uproszczenie postaci równań przez wprowadzenie dwu-osio-owego układu współrzędnych '0, d, q':

$$\begin{bmatrix} u_0 \\ u_d \\ u_g \end{bmatrix} = \mathbf{T}(\varphi) \cdot \begin{bmatrix} u_{s,1} \\ u_{s,2} \\ u_{s,3} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} i_0 \\ i_d \\ i_g \end{bmatrix} = \mathbf{T}(\varphi) \cdot \begin{bmatrix} i_{s,1} \\ i_{s,2} \\ i_{s,3} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

gdzie:

$$\mathbf{T}(\varphi) = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos(p\varphi) & \cos(p\varphi - \frac{2\pi}{3}) & \cos(p\varphi - 2 \cdot \frac{2\pi}{3}) \\ -\sin(p\varphi) & -\sin(p\varphi - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(p\varphi - 2 \cdot \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix}$$

W efekcie uzyskuje się równania o prawie standardowej postaci:

- dla składowej '0'

$$u_0 = R \cdot i_0 + (L_\sigma + 2M_\sigma) \cdot \frac{d}{dt} i_0 \quad (4.17a)$$

- dla składowych 'd, q'

$$\begin{bmatrix} u_d \\ u_q \end{bmatrix} = R \cdot \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_d & 0 \\ 0 & L_q \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + p \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 & -L_q \\ L_d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{3}{2}} \Psi_p \end{bmatrix} \right) \quad (4.17b)$$

- równanie mechaniczne

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + D \frac{d\varphi}{dt} = p \cdot (\psi_d \cdot i_q - \psi_q \cdot i_d) + T_m \quad (4.17c)$$

w których oznaczono:

$$L_d = (L_\sigma - M_\sigma) + \frac{3}{2}(L + \Delta L), \quad L_q = (L_\sigma - M_\sigma) + \frac{3}{2}(L - \Delta L)$$

$$\psi_d = L_d \cdot i_d + \sqrt{\frac{3}{2}} \Psi_p; \quad \psi_q = L_q \cdot i_q$$

5. OKREŚLANIE ZAKRESU STOSOWALNOŚCI MODELU PRĄDNIC SYNCHRONICZNYCH WZBUDZANYCH MAGNESAMI TRWAŁYMI UMIESZCZONYMI POWIERZCHNIOWO NA WIRNIKU

Jednym z najistotniejszych zagrożeń dla maszyn z magnesami trwałymi jest utrata własności magnetycznych przez magnesy trwałe w wyniku odmagnesującego działania przepływu uzwojeń twornika. Pomimo, że nowoczesne materiały magnetyczne stosowane w rdzeniach stojana mają bardzo korzystne charakterystyki, to ich relatywnie wysoka cena powoduje, że właściwie zaprojektowana maszyna nie powinna mieć zbyt dużych zapasów odmagnesowania w normalnych warunkach eksploatacyjnych.

Ocena zagrożenia utraty własności magnetycznych przez magnesy trwałe w prądnicach synchronicznych jest szczególnie ważna w stanach dynamicznych, zwłaszcza zwarc, gdy prądy mogą przyjmować znaczne wartości, a położenie wirnika względem osi odmagnesującego pola wytwarzanego przez uzwojenia stojana ulega dynamicznym zmianom. Stopień zagrożenia demagnetyzacją można ocenić na podstawie przedstawionego powyżej modelu prądnicy synchronicznej z magnesami trwałymi dla współrzędnych 'd, q'. W tym celu należy określić dla danej maszyny obszar dopuszczalnych wartości prądów i_d oraz i_q nie stwarzających takiego zagrożenia i porównywać je z wartościami prądów w stanach dynamicznych otrzymywanych z modelu dwuosiowego. Taka strefa dopuszczalnych prądów może być wyznaczona dla konkretnej maszyny na podstawie znajomości jej danych konstrukcyjnych oraz charakterystyk

użytych w niej magnesów trwałych. Może ona służyć także do określenia zagrożenia odmagnesowaniem na podstawie pomiarów prądów fazowych, napięć oraz mocy czynnej, jeżeli umożliwiają one określenie wartości prądów i_d oraz i_q .

W celu określenia strefy dopuszczalnych prądów i_d oraz i_q wygodniej jest zastąpić przepływy uzwojeń stojana prądnicy (4.1) przepływami zastępczymi w osiach 'd' oraz 'q' w układzie związanym z wirnikiem, na którym umieszczone są powierzchniowo magnesy trwałe. Przepływy Θ_d oraz Θ_q są także monoharmoniczne i opisują je zależności:

$$\Theta_d(x, t) = i_d(t) \frac{4 w_s k_{s,p}}{\pi 2p} \cos p \cdot (x - \varphi) = \Theta_{d,\max} \cos p \cdot y \quad (5.1)$$

$$\Theta_q(x, t) = i_q(t) \frac{4 w_s k_{s,p}}{\pi 2p} \sin p \cdot (x - \varphi) = \Theta_{q,\max} \sin p \cdot y \quad (5.2)$$

Składową promieniową indukcji magnetycznej w strefie magnesu określić można w przybliżeniu zakładając, że funkcja permeancji jest w tym obszarze stała i określona przez grubość szczeliny powietrznej d_δ , grubość magnesu d_m oraz jego podatność magnetyczną χ :

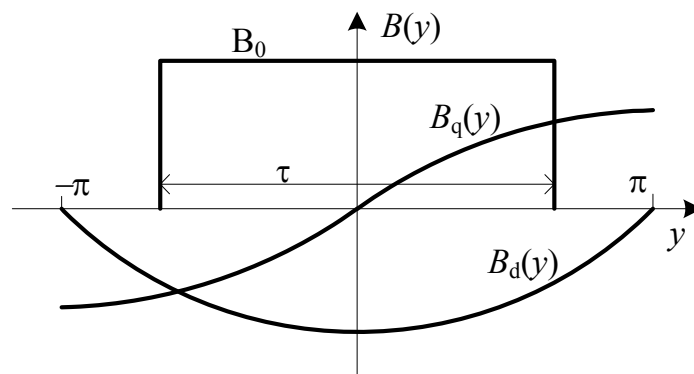
$$B(y, t) = B_{d,\max} \cos p \cdot y + B_{q,\max} \sin p \cdot y + B_0 \quad (5.3)$$

gdzie:

$$B_{d,\max} = \frac{\mu_0}{d_\delta + d_m / (1 + \chi)} \cdot \Theta_{d,\max}; \quad B_{q,\max} = \frac{\mu_0}{d_\delta + d_m / (1 + \chi)} \cdot \Theta_{q,\max};$$

$$B_0 = \frac{d_m / (1 + \chi)}{d_\delta + d_m / (1 + \chi)} \cdot (1 - k_\sigma) \cdot B_r$$

Wyrażenie (5.3) zilustrowano na rys. 6. Stanowi ono podstawę do obliczania granicznych wartości prądów i_d oraz i_q , rozpatrywanych jako dwie niezależne zmienne.



Rys. 6. Rozkłady indukcji magnetycznej pochodzące od uzwojeń 'd', 'q' oraz od magnesu trwałego

Graniczną wartość prądu i_d wyznaczyć można ze związku (5.3), zakładając $i_q \equiv 0$ oraz minimalną dopuszczalną indukcję w magnesie B_{\min} leżącą na prostoliniowej części charakterystyki odmagnesowania, który upraszcza się do postaci:

$$B_{\min} = B_{d,\max} + B_0$$

co daje:

$$I_{d,\max} = -\frac{B_0 - B_{\min}}{\mu_0/(1 + \chi)} \cdot d_m \cdot \left(\frac{\pi}{4} \frac{2p}{w_s \cdot k_{s,p}} \right) \quad (5.4)$$

Dla prądów $i_q \neq 0$ należy wyznaczyć wartości prądów $I_{d,\text{gr}}$ oraz $I_{q,\text{gr}}$, przy których jest spełniony warunek:

$$B_{\min} = B_{d,\max} \cos py + B_{q,\max} \sin py + B_0$$

Wynika z niego, że jeżeli maksimum wypadkowego przepływu uzwojeń 'd' i 'q' leży w obrębie magnesu trwałego, czyli w przedziale $-\tau/2 \leq y \leq \tau/2$, to wartości prądów granicznych spełniają związek:

$$\left(I_{d,\text{gr}} \right)^2 + \left(I_{q,\text{gr}} \right)^2 = \left(I_{d,\max} \right)^2 \quad (5.5)$$

Gdy prąd i_q stanie się na tyle duży, że maksimum przepływu wypadkowego przesunie się poza strefę magnesu trwałego, czyli będzie w przedziale

$\tau/2 \leq y \leq \pi/p$ lub $-\pi/p \leq y \leq -\tau/2$, wówczas wartości graniczne muszą spełniać warunek:

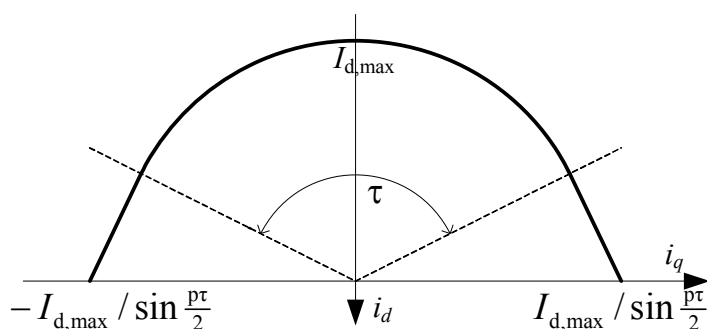
$$B_{\min} = B_{d,\max} \cos(p \frac{\tau}{2}) + B_{q,\max} \sin(p \frac{\tau}{2}) + B_0$$

który prowadzi do następującej zależności między wartościami prądów granicznych:

$$I_{d,\text{gr}} = (-I_{d,\max} + I_{q,\text{gr}} \cdot \sin(p \frac{\tau}{2})) / \cos(p \frac{\tau}{2}) \quad (5.6)$$

Jest to związek liniowy, z którego wynika, że dla $i_d = 0$:

$$I_{q,\max} = I_{d,\max} / \sin(p \frac{\tau}{2}) \quad (5.7)$$



Rys. 7. Strefa dopuszczalnych wartości prądów i_d oraz i_q

Na rysunku 7 przedstawiono krzywą ograniczającą strefę dopuszczalnych wartości prądów i_d oraz i_q nie powodujących odmagnesowania żadnej części magnesu trwałego. Prądy i_d oraz i_q , stanowiące rozwiązania modelu dwuosiowego

dla dowolnych stanów pracy, mogą być przedstawione w postaci trajektorii na płaszczyźnie (i_d, i_q) , która powinna mieścić się w strefie prądów dopuszczalnych. Strefa ta stanowi istotne uzupełnienie modelu matematycznego prądnic synchronicznych wzbudzanych magnesami trwałymi gdyż wyznacza zakres jego stosowalności.

Obliczenia wartości prądów granicznych zostały przeprowadzone w oparciu o uproszczoną jednowymiarową analizę pola w magnesie trwałym i mają szacunkowy charakter. Zwiększenie adekwatności modelu matematycznego oraz dokładniejsze wyznaczenie strefy bezpiecznej pracy magnesu trwałego można uzyskać zwiększając dokładność wyznaczenia rozkładu pola w obwodzie magnetycznym i magnesie trwałym. Można w tym celu wykorzystać analityczne me-

tody wyznaczania rozkładu pola w płaskim dwuwymiarowym przekroju maszyny [3], [9], [10], [11], [12] lub zastosować numeryczne algorytmy rozwiązywania równań pola magnetycznego i odpowiednie procedury przetwarzania uzyskanych informacji [6], oferowane przez komercyjne pakiety programowe dla obliczeń elektromagnetycznych.

6. PODSUMOWANIE

W pracy przedstawiono rozważania wykazujące, że model matematyczny prądnic synchronicznych wzbudzanych magnesami trwałymi można sprowadzić do klasycznego dwuosowego modelu maszyn synchronicznych. Wykorzystano w tym celu formalizm Lagrange'a, definiując zmodyfikowane funkcje energetyczne energii oraz ko-energii dla układu uzwojeń umieszczonych w obwodzie magnetycznym, w którym znajduje się magnes trwały. Wymagało to uściślenia pojęć stosowanych w teorii klasycznych maszyn elektrycznych. W rozważaniach koncentrowano się bardziej na metodycznych aspektach tworzenia modeli matematycznych prądnic synchronicznych z magnesami trwałymi niż na precyzyjnym określeniu parametrów technicznych jakiegoś konkretnego obiektu. W przypadku prądnic synchronicznych z magnesami trwałymi istotnym uzupełnieniem modelu matematycznego jest określenie zakresu jego stosowalności związane z odmagnesującym działaniem uzwojeń twornika. W pracy wprowadzono taki warunek w postaci strefy dopuszczalnych wartości prądów dwuosowego modelu prądnicy oraz przedstawiono metodykę jej wyznaczania. Obliczenia weryfikujące ilościowo zależności prezentowane w pracy wykonano w pracy doktorskiej [8], uzyskując zadowalającą zgodność z badaniami rzeczywistej prądnicy o danych $P_N = 2,5 \text{ kW}$, $U_N = 230 \text{ V}$, $I_N = 7,67 \text{ A}$, $\cos\varphi_N = 0,8$, $n_N = 1500 \text{ obr/min}$, $p = 3$, $f_N = 75 \text{ Hz}$, wzbudzonej magnesami trwałymi Ne-Fe-Bo o liniowej charakterystyce, dla których $B_r = 1,06 \text{ T}$, $H_c = 720 \text{ kA/m}$. Strefę dopuszczalnych wartości prądów tej prądnicy wyznaczono ilościowo w pracy [2].

Rozważania oparte na jednowymiarowej analizie składowej promieniowej pola magnetycznego, prezentowane w tej pracy, mogą okazać się w pewnych przypadkach zbyt uproszczone i powinny być wspierane w niektórych fragmentach dokładniejszymi analizami pola magnetycznego.

LITERATURA

1. Gieras J. F., Wing M.: *Permanent Magnet Motor Technology*, Marcel Dekker Inc. New York, 1997.
2. Pawluk K., Sobczyk T.J.: Wyznaczenie prądów granicznych dla maszyn synchronicznych z magnesami trwałymi umieszczonymi powierzchniowo, Proc. of SME 2006, Kraków, 2006, pp. 143-146.
3. Proca A. B., Keyhani A., El-Antably A., Lu W., Daj M.: *Analytical model for Permanent Magnet Motors with Surface Mounted Magnets*, IEEE Transactions on Energy Conversion, Vol. 18, 2003, No.3, pp. 386-391.
4. Danilevicz J., Sobczyk T., Kirichenko B., Shtainle L., Kruchinina I., Khozikov J.: High speed electromechanical converter for gas turbine, ICEM'02, Brugge, Belgium, CD.
5. Sobczyk T. J.: *Metodyczne aspekty modelowania matematycznego maszyn indukcyjnych*, WNT, Warszawa, 2004.
6. Tur Ł.: *Kształtowanie pola magnetycznego w silnikach elektrycznych z magnesami trwałymi*, Praca magisterska, Politechnika Krakowska, Wydz. Inżynierii Elektrycznej i Komputerowej, Kraków, 2006.
7. Węgiel T.: *Modelowanie maszyn synchronicznych wzbudzanych magnesami trwałymi*, Praca doktorska wykonana w Instytucie Elektromechanicznych Przemian Energii Politechniki Krakowskiej, Politechnika Śląska, Gliwice, 1997.
8. White D.C., Woodson H. H.: *Electromechanical Energy Conversion*, J. Wiley & Sons Inc., New York, 1959.
9. Zhu Z. Q., Howe D., Bolte E., Ackermann B.: *Instantaneous Magnetic Field Distribution in Brushless Permanent Magnet dc Motors, Part I: Open-Circuit Field*, IEEE Transactions on Magnetics, 1993, Vol. 29, No.1, pp. 124-134.
10. Zhu Z. Q., Howe D.: *Instantaneous Magnetic Field Distribution in Brushless Permanent Magnet dc Motors, Part II: Armature-Reaction Field*, IEEE Transactions on Magnetics, 1993, Vol. 29, No.1, pp. 136-142.
11. Zhu Z. Q., Howe D.: *Instantaneous Magnetic Field Distribution in Brushless Permanent Magnet dc Motors, Part III: Effects of Stator Slotting*, IEEE Transactions on Magnetics, 1993, Vol. 29, No.1, pp. 143-151.
12. Zhu Z. Q., Howe D.: *Instantaneous Magnetic Field Distribution in Brushless Permanent Magnet dc Motors, Part IV: Magnetic Field on Load*, IEEE Transactions on Magnetics, 1993, Vol. 29, No.1, pp. 152-158.

Rękopis dostarczono, dnia 27.02.2007 r.

Opiniował: prof. dr hab. inż. Krystyn Pawluk

PROBLEMS OF MATHEMATICAL
MODELLING OF PERMANENT MAGNET
SYNCHRONOUS GENERATOR

T.J. SOBCZYK

SUMMARY *Methodology of constitution a circuit model of permanent-magnet synchronous machines is discussed in the paper. Such circuit models operate, generally, with self and mutual inductances that are defined for coils located within a magnetic circuit supposed to be linear. Dilemma is whether permanent magnets that are characterized by the hysteresis phenomenon could be inserted into the circuit model and, in consequence, should such models be applied for the electric machines with permanent magnets. A synchronous generator with permanent magnets that are set on the machine rotor is considered. For such class of machines a very simple two-axis model is proposed. It refers to the widely known d - q approach to synchronous machines. For the model presented in the paper, a range of applicability should be determined excluding the case when the magnets lose magnetisation due to demagnetising armature currents. A safety zone for the permanent-magnet synchronous generator is determined. The zone allows to estimate a risk of demagnetising the magnets that could appear under operation of the generator.*