

Andrzej Popenda, Andrzej Rusek
 Politechnika Częstochowska, Częstochowa

WYZNACZANIE OBCIĄŻEŃ UKŁADU NAPĘDOWEGO HUTNICZEJ LINII TRANSPORTOWEJ METODĄ TRZECH MOMENTÓW

DETERMINATION OF METALLURGICAL ROLLER TABLE DRIVE LOAD USING THREE MOMENTS METHOD

Abstract: The load of both metallurgical roller table and statically incalculable multi-span beams can be determined in the same way. The choice of appropriate basic scheme and application of special form of forces' method, known as "three moments' method", simplifies solving this problem. Designation of load function for metallurgical roller table is significant at both planning mechanical strength of the table and choice of driving motor power. Formulating the mathematical models of driving systems with specially designed induction motor and considering real load function in these models is important to determine the design directives during realization of this type of driving systems under real operating conditions.

1. Wstęp

Analiza pracy układów elektromechanicznych sprowadza się do rozwiązania kilku istotnych zagadnień, do których należy zaliczyć [1-7]:

- sporządzenie schematu kinematycznego części mechanicznej układu,
- sformułowanie modelu matematycznego dla części elektrycznej i części mechanicznej układu,
- identyfikacja parametrów układu elektromechanicznego po stronie elektrycznej i mechanicznej,
- określenie zewnętrznych obciążeń,
- wykonanie komputerowych badań symulacyjnych z wykorzystaniem modelu matematycznego układu elektromaszynowego,
- weryfikacja pomiarowa wyników badań symulacyjnych na stanowisku badawczym lub w układzie przemysłowym.

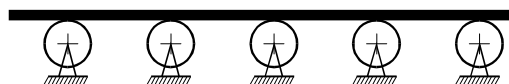
Taki sposób analizy jest stosowany między innymi do układów elektromechanicznych, zawierających elementy wyposażenia hutniczych samotokowych linii transportowych. Motoreduktorowe układy napędowe hutniczych linii transportowych, z uwagi na specyficzne warunki pracy, muszą spełniać specjalne wymogi. Do wymogów tych należą między innymi: silnik napędowy o zwiększonym momencie rozruchowym, reduktor zębaty o specjalnej konstrukcji, układ transportowy dostosowany do technologicznych wymogów pracy linii transportowej. Sformułowanie modeli matematycznych układów napędowych z silnikami indukcyjnymi specjalnego wykonania i uwzględnienie rzeczywistych przebiegów obciążeń w tych modelach, ma zasadnicze znaczenie przy określeniu wytycznych projektowych podczas realizacji tego typu układów napędowych w rzeczywistych warunkach eksplo-

atacyjnych. Ponadto określenie przebiegu obciążenia pojedynczej rolki i całego układu napędowego hutniczej samotokowej linii transportowej jest istotne przy planowaniu wytrzymałości mechanicznej tej linii i przy doborze mocy silnika napędowego. Przeprowadzenie komputerowych badań symulacyjnych z wykorzystaniem sformułowanych modeli matematycznych jest istotne do określenia wymogów prowadzących do optymalizacji pracy układów napędowych z zastosowaniem prototypowych silników indukcyjnych specjalnego wykonania. Analiza składowych sił reakcji w podporze i-tej rolki układu napędowego linii samotokowej oraz analiza położenia elementu transportowanego w układzie dwuwymiarowym, pozwala na określenie rzeczywistych przebiegów momentów obciążenia i-tej rolki. Poprzez wprowadzenie tych przebiegów do modelu matematycznego układu elektromaszynowego jest możliwe przeprowadzenie komputerowych obliczeń numerycznych z uwzględnieniem rzeczywistych obciążeń.

2. Analiza obciążeń

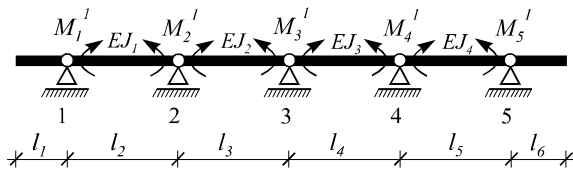
2.1 Wprowadzenie

Zagadnienie wyznaczania obciążeń rolki w hutniczej samotokowej linii transportowej (rys. 1) można sprowadzić do rozwiązywania wieloprzęsłowych belek statycznie niewyznaczalnych.



Rys. 1. Hutnicza samotokowa linia transportowa

Rozwiązanie wieloprzęślowych belek statycznie niewyznaczalnych przy równomiernym rozłożeniu obciążenia ciągłego $q(x)$ wzdłuż płyta można ułatwić w znaczącym stopniu przez dobranie odpowiedniego schematu podstawowego oraz zastosowanie szczególnej postaci metody sił zwanej metodą trzech momentów [8]. Najbardziej dogodnym schematem zastępczym (podstawowym) jest schemat, w którym zostanie przerwana ciągłość belki (transportowanego płyta) przez wprowadzenie przegubów nad podporami i zostaną przyjęte nadliczbowe niewiadome w postaci momentów podporowych (rys. 2). Jako podpory przyjmuje się punkty styczności płyty z rolką.



Rys. 2. Schemat podstawowy

W rozważaniach założono jako wiodący wpływ momentów. Wpływ sił normalnych i poprzecznych w zginanym płacie jest znikomy. Układ równań kanonicznych zapisuje się w postaci:

$$[\delta_{ij}] \{M_j\} + \{\delta_{i0}\} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

$$\{M_j\} = -[\delta_{ij}]^{-1} \{\delta_{i0}\} \quad (2)$$

gdzie: δ_{ij} – przemieszczenie na kierunku i -tej więzi nadliczbowej od jednostkowej j -tej niewiadomej w układzie podstawowym, δ_{i0} – przemieszczenie na kierunku i -tej więzi nadliczbowej od obciążenia zewnętrznego w układzie podstawowym. W celu otrzymania współczynników k -tego wiersza macierzy podatności $[\delta_{ij}]$, należy wykres momentów mnożyć kolejno przez pozostałe wykresy. W wyniku obliczeń otrzymuje się następujące równanie dla dowolnego k [8]:

$$M_{k-1} \frac{l_k}{EJ_k} + 2M_k \left(\frac{l_k}{EJ_k} + \frac{l_{k+1}}{EJ_{k+1}} \right) + M_{k+1} \frac{l_{k+1}}{EJ_{k+1}} + 6\delta_{k0} = 0 \quad (3)$$

Mnożąc następnie równanie przez sztywność porównawczą EJ_0 uzyskuje się równanie zwane

równaniem trzech momentów. W równaniu tym występują trzy sąsiednie momenty podporowe:

$$M_{k-1} l'_k + 2M_k (l'_k + l'_{k+1}) + M_{k+1} l'_{k+1} = -6EJ_0 \delta_{k0} \quad (4)$$

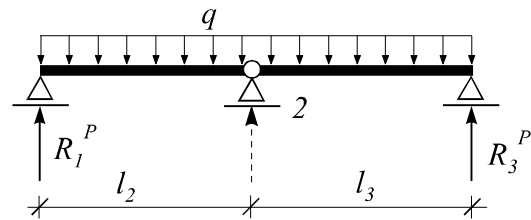
$$l'_k = l_k \frac{EJ_0}{EJ_k} \quad (5)$$

gdzie: l'_k jest długością sprowadzoną (długość zastępcza). Poszczególne przęśła płyta mogą mieć różną sztywność EJ_k , lecz stałą na całej długości przęśła.

Do dalszych rozważań przyjęto dwa sąsiednie, dowolnie wybrane przęśła płyta l_2 i l_3 oraz założono stałą sztywność EJ na całej jego długości.

2.2 Rozwiązanie układu podstawowego od obciążenia zewnętrznego

Reakcje od obciążenia siłami w układzie podstawowym pokazano na rys. 3. Obciążenie powstaje na skutek równomiernie rozłożonej wzdłuż płyta siły ciężenia.



Rys. 3. Reakcje od obciążenia siłami w układzie podstawowym

Równania równowagi momentów dla lewej i prawej strony przegubu 2 (rys. 3):

$$\sum M_{2l} = R_1^P l_2 - q \frac{l_2^2}{2} = 0 \Rightarrow R_1^P = \frac{q l_2}{2} \quad (6)$$

$$\sum M_{2p} = -R_3^P l_3 + q \frac{l_3^2}{2} = 0 \Rightarrow R_3^P = \frac{q l_3}{2} \quad (7)$$

W dowolnej osi poprzecznej płyta, oddalonej o x od podpory 1, moment zginający wynosi:

- dla przęśła l_2

$$M_{2l}^P(x) = R_1^P x - q \frac{x^2}{2} = -\frac{q}{2} x(x - l_2) \quad (8)$$

- dla przęśła l_3

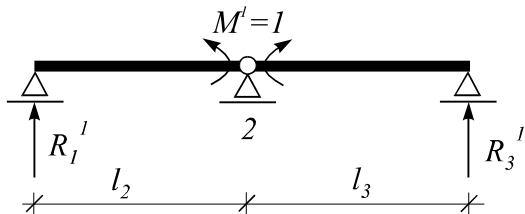
$$M_{2p}^P(x) = R_3^P(l-x) - q \frac{(l-x)^2}{2} =$$

$$= -\frac{q}{2}(x-l)(x-l_2) \quad (9)$$

przy czym wprowadzono zmienną pomocniczą:
 $l = l_2 + l_3$.

2.3 Rozwiązanie układu podstawowego od nadliczbowego M^l

Reakcje od nadliczbowego momentu podporowego $M^l = l$ w układzie podstawowym pokazano na rys. 4. Nadliczbowy moment podporowy pojawia się wskutek przerwania ciągłości transportowanego płata przez wprowadzenie przegubów nad podporami.



Rys. 4. Reakcje od nadliczbowego $M^l = l$ w układzie podstawowym

Równania równowagi momentów dla lewej i prawej strony przegubu 2 (rys. 4):

$$\sum M_{2l} = R_1^l l_2 - M^l = 0 \Rightarrow R_1^l = \frac{1}{l_2} \quad (10)$$

$$\sum M_{2p} = -R_3^l l_3 + M^l = 0 \Rightarrow R_3^l = \frac{1}{l_3} \quad (11)$$

W dowolnej osi poprzecznej płata, oddalonej o x od podpory 1, moment zginający wynosi:

- dla przęsła l_2

$$M_{2l}^1(x) = \frac{x}{l_2} \quad (12)$$

- dla przęsła l_3

$$M_{2p}^1(x) = -\frac{1}{l_3}(x-l) \quad (13)$$

2.4 Obliczenie współczynników równania

Aby policzyć wyraz macierzy podatności δ_{11} należy przemnożyć wykres $M^l(x)$ przez ten sam wykres. W obliczeniach uwzględniono:
 $EJ_1 = EJ_2 = \dots = EJ$.

$$EJ\delta_{11} = \int_0^{l_2} [M_{2l}^1(x)]^2 dx + \int_{l_2}^l [M_{2p}^1(x)]^2 dx = \frac{l}{3} \quad (14)$$

Aby policzyć wyraz wektora prawej strony δ_{10} należy przemnożyć wykres $M^l(x)$ przez wykres $M^P(x)$.

$$EJ\delta_{10} = \int_0^{l_2} M_{2l}^1(x) M_{2l}^P(x) dx +$$

$$+ \int_{l_2}^l M_{2p}^1(x) M_{2p}^P(x) dx = \frac{q}{24}(l_2^3 + l_3^3) \quad (15)$$

2.5 Obliczenie reakcji w podporach

Po rolkach linii transportowej przemieszcza się płat z wolnymi, nie podpartymi końcami (rys. 2). Odległość końca płata od najbliższej, obciążonej rolki jest przy tym zmienna i przyjmuje wartości od zera do całkowitej odległości między dwiema sąsiednimi rolkami. W takim przypadku układ wymaga uwzględnienia warunków brzegowych. Momenty na końcach płata można łatwo obliczyć i wtedy, zgodnie z rys. 2:

$$M_1 = -q \frac{l_1^2}{2}, \quad M_5 = -q \frac{l_6^2}{2} \quad (16)$$

Przyjmując wcześniejsze założenia, można napisać następujące równania odpowiednio dla 1, 5, 2, 3 i 4 podpory w układzie z rys. 2:

$$M_1 = -q \frac{l_1^2}{2}, \quad M_5 = -q \frac{l_6^2}{2}$$

$$M_1 l_2 + 2M_2(l_2 + l_3) + M_3 l_3 = -\frac{q}{4}(l_2^3 + l_3^3) \quad (17)$$

$$M_2 l_3 + 2M_3(l_3 + l_4) + M_4 l_4 = -\frac{q}{4}(l_3^3 + l_4^3)$$

$$M_3 l_4 + 2M_4(l_4 + l_5) + M_5 l_5 = -\frac{q}{4}(l_4^3 + l_5^3)$$

Proste zależności dla podpory 1 i 5 można podstawić odpowiednio do równań dla podpory 2 i 4 redukując liczbę równań o 2. Z układu tych równań należy obliczyć niewiadome M_2, M_3, M_4 . Kolejny układ równań umożliwi obliczenie reakcji w podporach: R_i , gdzie $i = 1, \dots, 5$.

$$M_2 = R_1 l_2 - q \frac{(l_1 + l_2)^2}{2}$$

$$M_3 = R_1(l_2 + l_3) + R_2l_3 - q \frac{(l_1 + l_2 + l_3)^2}{2}$$

$$M_4 = R_5l_5 - q \frac{(l_5 + l_6)^2}{2} \quad (18)$$

$$M_3 = R_4l_4 + R_5(l_4 + l_5) - q \frac{(l_4 + l_5 + l_6)^2}{2}$$

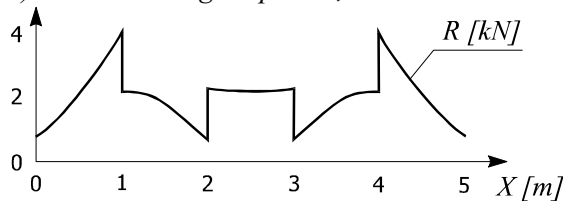
$$R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 -$$

$$- q(l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5 + l_6) = 0$$

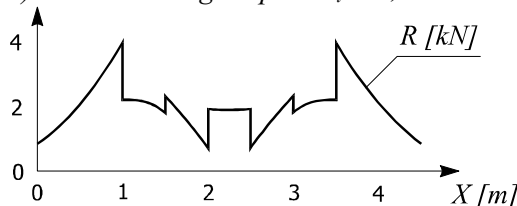
3. Przebiegi obciążeń

Na rys. 5 pokazano przykładowe przebiegi obciążenia pojedynczej rolki od chwili pierwszej styczności z płatem w zależności od przemieszczenia X płata, przy założeniu następujących wartości parametrów: $q = 2$ kN/m, $l_2 = l_3 = l_4 = l_5 = 1$ m oraz dwóch różnych długości płata: (a) $l_t = 5$ m, (b) $l_t = 4,5$ m, przy czym l_t – całkowita długość płata.

a) całkowita długość płata $l_t = 5$ m



b) całkowita długość płata $l_t = 4,5$ m



Rys. 5. Przykładowe przebiegi obciążenia rolki w zależności od przemieszczenia X płata

Zaprezentowane przebiegi odnoszą się do obciążenia pochodzącego od rozłożonego ciężaru płata. Ponadto przy rozpatrywaniu obciążenia układu napędowego należy uwzględnić ciężar poszczególnych rolek.

Otrzymane przebiegi obciążenia pojedynczej rolki mogą być przydatne przy planowaniu wytrzymałości mechanicznej linii transportowej oraz przy doborze mocy silnika napędowego. Mogą być również przydatne przy modelowaniu układów napędowych w hutniczej linii transportowej.

4. Podsumowanie

Zaletą opisanej metody obliczania reakcji w podporach jest prostota i mała ilość obliczeń. Wadą jest założenie stałej sztywności dla danego przęsła lub dla całego płata, co w praktyce ogranicza zastosowanie tej metody do płatów o regularnych kształtach i jednorodnym rozkładzie masy. W przypadku płatów o nieregularnych kształtach zagadnienie się komplikuje, ponieważ zarówno obciążenie rozłożone w sposób ciągły q jak i sztywność zginania EJ nie mają stałych wartości. Warto wówczas skorzystać z metody opartej na formalnej analogii między równaniami różniczkowymi momentów zginających $M(x)$ i równaniem różniczkowym ugiętej osi płata (belki) $w = w(x)$. Sztywność zginania EJ rozważanego płata zależy od modułu sprężystości podłużnej E o stałej wartości i zależnego od współrzędnej x geometrycznego momentu bezwładności $J = J(x)$ względem poprzecznej osi obojętnej z . Moment bezwładności J względem osi z oblicza się z następującej zależności:

$$J(x) = \int_A y^2 dA \quad (19)$$

gdzie: A – pole poprzecznego przekroju płata. Skupioną siłę ciężkości Q wynikającą z obciążenia ciągłego $q(x)$ można obliczyć korzystając z następującego wzoru:

$$Q(x) = \int_0^x q(x) dx \quad (20)$$

Elementarny moment dM pochodzący od elementarnej siły ciężkości $dQ = q(x)dx$ w odległości x od wybranej (obojętnej) osi porzecznej płata wynosi $dM = x dQ$, stąd:

$$M_q(x) = \int_0^x x q(x) dx \quad (21)$$

Różniczkowe równania ugiętej linii płata, kątów ugięcia i równanie linii ugięcia wzdłuż osi x :

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EJ(x)} \quad (22)$$

$$\frac{dw}{dx} = -\int_0^x \frac{M(x)}{EJ(x)} dx + C \quad (23)$$

$$w(x) = -\int_0^x \left[\int_0^x \frac{M(x)}{EJ(x)} dx \right] dx + Cx + D \quad (24)$$

Przy określonym porządku zapisywania i całkowania równań różniczkowych odkształconej osi płata (belki) można zredukować ilość dowolnych stałych całkowania do liczby dwóch: C i D (metoda Clebscha). Równanie różniczkowe odkształconej osi belki:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w}{dx^2} = & -\frac{1}{EJ(x)} \left[-M_q(x) \Big|_{l_1} + R_1(x-x_1) \Big|_{l_2} + \right. \\ & + R_2(x-x_2) \Big|_{l_3} + R_3(x-x_3) \Big|_{l_4} + \\ & \left. + R_4(x-x_4) \Big|_{l_5} + R_5(x-x_5) \Big|_{l_6} \right] \end{aligned} \quad (25)$$

Równanie kątów obrotu przekrojów belki:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dx} = & \int_0^x \frac{1}{EJ(x)} \left[M_q(x) \Big|_{l_1} - R_1(x-x_1) \Big|_{l_2} - \right. \\ & - R_2(x-x_2) \Big|_{l_3} - R_3(x-x_3) \Big|_{l_4} - \\ & \left. - R_4(x-x_4) \Big|_{l_5} - R_5(x-x_5) \Big|_{l_6} \right] dx + C \end{aligned} \quad (26)$$

Równanie odkształconej osi belki:

$$\begin{aligned} w(x) = & \int_0^x \int_0^x \frac{1}{EJ(x)} \left[M_q(x) \Big|_{l_1} - R_1(x-x_1) \Big|_{l_2} - \right. \\ & - R_2(x-x_2) \Big|_{l_3} - R_3(x-x_3) \Big|_{l_4} - R_4(x-x_4) \Big|_{l_5} - \\ & \left. - R_5(x-x_5) \Big|_{l_6} \right] dx dx + Cx + D \end{aligned} \quad (27)$$

W powyższym równaniu uwzględnia się określone wcześniej funkcje $J(x)$ i $M_q(x)$. Zawiera ono 7 niewiadomych: 5 reakcji (R_1, \dots, R_5) w podporach oraz 2 stałe całkowania (C, D). Zapisując powyższe równanie pięciokrotnie z warunkami brzegowymi:

$$w(x_1) = w(x_2) = w(x_3) = w(x_4) = w(x_5) = 0 \quad (28)$$

oraz uzupełniając otrzymany w ten sposób układ równań dwoma równaniami równowagi sił i momentów:

$$R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 - \int_0^{l_1} q(x) dx = 0 \quad (29)$$

$$\begin{aligned} R_1 x_1 + R_2 x_2 + R_3 x_3 + R_4 x_4 + R_5 x_5 - \\ - \int_0^{l_1} x q(x) dx = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

można obliczyć niewiadome reakcje i stałe całkowania.

Przemieszczenie X płata wzdłuż linii transportowej zależy od jego prędkości liniowej v :

$$X = \int_0^t v dt \quad (31)$$

Prędkość liniowa v jest powiązana z prędkością kątową rolek linii transportowej. Jeśli średnica D rolek linii transportowej jest jednakowa i nie występuje poślizg między płatem i rolkami, wówczas prędkościątowe napędów wszystkich rolek, na których aktualnie znajduje się płat, są jednakowe: $\omega = 2vi/D$, gdzie i przełożenie przekładni motoreduktora. Przyjmując, że płat znajduje się jednocześnie na n rolkach, można napisać równanie ruchu dla mas wirujących w następującej postaci:

$$\theta \frac{d\omega}{dt} = M_{e1} + M_{e2} + \dots + M_{en} - M_t \quad (32)$$

gdzie: θ – zastępczy moment bezwładności sprowadzony na wał dowolnego silnika:

$$\theta = n \left(\theta_m + \theta_r \frac{1}{i^2} \right) + m \left(\frac{v}{\omega} \right)^2 \quad (33)$$

θ_m, θ_r – momenty bezwładności wirnika i rolki, m – masa płata, $M_{e1}, M_{e2}, \dots, M_{en}$ – momenty rozwijane przez silniki napędów poszczególnych rolek, M_t – zastępczy moment obciążenia sprowadzony na wał silnika, i – przełożenie przekładni motoreduktorów. W rozważaniach pominięto momenty bezwładności wałów i kół zębatach przekładni motoreduktorów z powodu ich nieznaczonej wartości. Obciążenie napędów poszczególnych rolek jest spowodowane tarciami w łożyskach rolek, wirnika i kół zębatach przekładni motoreduktorów oraz tarciami na styku płata z rolką. Poszczególne obciążenia zależą od ciężaru płata i rolek. Całkowity moment tarcia w łożyskach rolek sprowadzony na wał dowolnego silnika wynosi:

$$M_{t1} = \frac{d\mu}{2\eta i} (nQ_r + Q_t) \quad (34)$$

gdzie: Q_r , Q_t – ciężar pojedynczej rolki i całkowity ciężar płata, μ – współczynnik tarcia w łożyskach, η – sprawność przekładni motoreduktorów, d – średnica ułożyskowanego wału rolki.

Z powyższego wynika, że całkowite obciążenie grupy napędów n rolek, na których znajduje się płat, nie zależy od rozkładu obciążenia na poszczególnych rolkach, lecz od ciężaru rolek i płata.

Należy zauważyć, że w danej chwili płat może się znajdować na n lub $n - 1$ rolkach. Przy przechodzeniu płata z n na $n - 1$ rolek redukuje się jeden moment napędowy M_{e1} lub M_{en} w równaniu ruchu oraz zmniejsza się całkowite obciążenie rolek z $nQ_r + Q_t$ do $(n-1)Q_r + Q_t$. W konsekwencji zmniejsza się również skokowo całkowity moment tarcia w łożyskach.

5. Literatura

- [1]. Flaszka J.: *Stany dynamiczne samotokowego układu napędowego z motoreduktorami konstrukcji specjalnej przy uwzględnieniu rzeczywistych obciążeń*. Praca doktorska. Politechnika Częstochowska, 2002.
- [2]. Flaszka J.: *Analiza pracy samotokowego układu napędowego z motoreduktorem typu 2SM - HCS i indukcyjnym silnikiem samotokowym o zwiększonym momencie rozruchowym*. Napędy i Sterowanie 1/2003. ISSN 15471764.
- [3]. Lis M.: *Stany dynamiczne motoreduktorowego układu napędowego z silnikiem samotokowym*. Praca doktorska. Politechnika Częstochowska, 2001.
- [4]. Popenda A., Rusek A.: *Model matematyczny układu napędowego reaktora procesu polimeryzacji z uwzględnieniem wybranych problemów procesu technologicznego – część I i II*. Zeszyty Problemowe Maszyny Elektryczne nr 75/2006, wyd. BOBRME Komel, Katowice, s. 5-9, 11-16.
- [5]. Rusek A., Flaszka J.: *Przebiegi dynamiczne w układzie transportowym na linii samotokowej*. Konferencja Naukowo-Techniczna „Kierunki rozwoju produkcji rur”. Materiały konferencyjne. Ustroń-Zawodzie, 1999.
- [6]. Rusek A., Popenda A., *Transient states of polymerizer drive including real load of specially designed induction motor*. 17th Int. Conf. on Electrical Machines, Chania, Crete Island, Greece, September 2-5, 2006. Materiały dostępne w postaci CD ROM.
- [7]. Rusek A., Popenda A., Flaszka J., Lis M., Gapik A.: *Opracowanie i wykonanie silnika indukcyjnego specjalnego wykonania z przetwornicą częstotliwości o zmodyfikowanym układzie sterowania do uruchomienia produkcji głównych układów napędowych reaktorów polimeryzacji*. Część nr 1 – Opis badań. Część nr 2 – Wyniki badań i dokumentacja. Załącznik do części nr 2 – Rysunki wykonawcze. Sprawozdanie końcowe z realizacji zadań badawczych wykonanych w projekcie celowym Nr 6 T10 2003C/06105. (opracowanie niepublikowane).
- [8]. Rakowski J. i inni.: *Teoria sprężystości*. Politechnika Poznańska 2004; http://www.ikb.poznan.pl/almamater/wyklady/teoria_sprezystosci_03-04/.