

Krzysztof POLAKOWSKI
Jan SIKORA
Stefan F. FILIPOWICZ

ALGEBRAICZNE METODY KONSTRUKCJI OBRAZÓW TOMOGRAFII ULTRADŹWIĘKOWEJ

STRESZCZENIE *W artykule przedstawiono zastosowanie tomografii ultradźwiękowej do tworzenia obrazów rozkładu prędkości gazów przepływających w rurze walcowej. Do pomiaru średniej wartości współosiowej prędkości przepływu gazu w rurze wykorzystano przepływomierz ultradźwiękowy.*

Metodę pomiaru przepływów rozszerzono o badanie profilu rozkładu prędkości w całym przekroju poprzecznym rury. Idea ta stanowi istotę działania ultradźwiękowej tomografii wielościeżkowej.

Do tworzenia obrazów tomograficznych zastosowano liniowe zadanie najmniejszych kwadratów. Zaproponowana metoda została zilustrowana wynikami uzyskanymi z numerycznych symulacji.

Słowa kluczowe: *tomografia ultradźwiękowa, badania profilu prędkości, zadanie najmniejszych kwadratów, obrazowanie tomograficzne*

dr inż. Krzysztof POLAKOWSKI
e-mail: kp@zkue.ime.pw.edu.pl

prof. dr hab. inż. Jan SIKORA
e-mail: sik@iem.pw.edu.pl

dr hab. inż. Stefan F. FILIPOWICZ
e-mail: 2xf@nov.iem.pw.edu.pl

Politechnika Warszawska,
Wydział Elektryczny

1. WSTĘP

Przy badaniach prędkości i strumienia przepływu objętości w dużych przekrojach wydaje się interesującym zastosowanie ultradźwiękowych metod tomograficznych, pozwalających obrazować badane przepływy wielofazowe wraz z możliwością pomiaru prędkości poszczególnych składników [2, 6]. Pierwsze publikacje poświęcone zastosowaniu ultradźwięków do pomiaru prędkości i strumienia objętości pojawiły się przed siedemdziesięciu laty, zaś pierwszy patent związany z zastosowaniem pomiaru przepływu opublikowano w 1929 roku [12]. O dokładności przepływomierzy ultradźwiękowych przed czterdziestu laty i wcześniej decydował układ elektroniczny, obecnie dzięki zastosowaniu mikroprocesorów o dokładności decyduje znajomość modelu matematycznego problemu pomiarowego [12]. Współczesne przepływomierze ultradźwiękowe powinny, więc charakteryzować się większą dokładnością oraz niższymi kosztami obsługi i utrzymania.

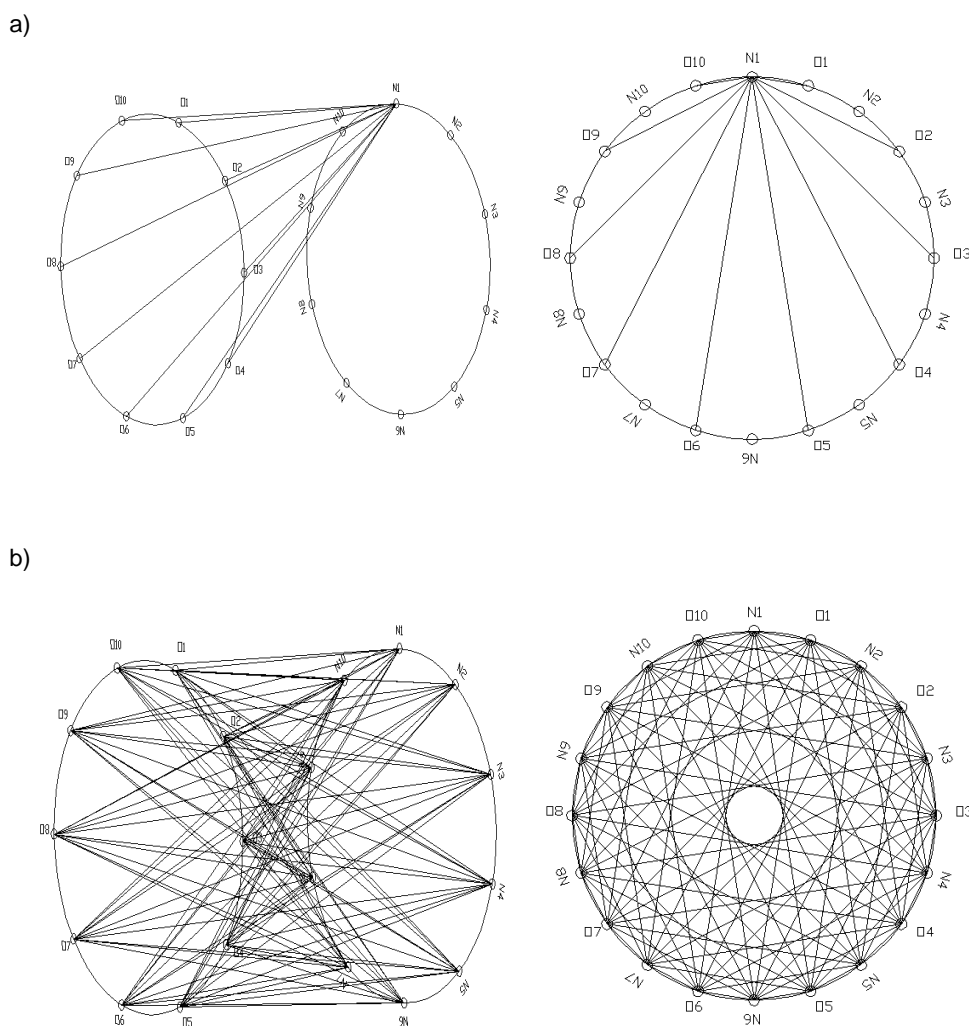
Przepływomierze można podzielić na dwie podstawowe grupy. Pierwsza grupa, w której wykorzystywane są zjawiska fizyczne związane z energią generowaną przez same przepływy, (czyli najogólniej ujmując zjawiska związane z pomiarem strat energii przepływów). Do drugiej grupy należy zaliczyć przepływomierze, w których wykorzystuje się zjawiska związane z pomiarem przepływów z pomocą energii zewnętrznej dostarczanej do przepływającego strumienia, w formie energii pola magnetycznego, fal dźwiękowych lub ciepła [8, 12].

2. PRZEPŁYWOMIERZE ULTRADŹWIĘKOWE

Podstawową zaletą ultradźwiękowej metody pomiarowej jest fakt, że bazuje ona na bezkontaktowym nieinwazyjnym pomiarze przepływu, nie powodującym zmian ciśnienia ani innych parametrów fizyko-chemicznych w badanym środowisku. Dzięki zastosowaniu impulsów wysokoczęstotliwościowych minimalizowane są w pomiarach błędy powodowane efektami związanymi z pulsacją i fluktuacją przepływu. Umożliwia ona ponadto pomiar przepływu niezależnie od temperatury, ciśnienia i gęstości mierzonego medium. Przepływomierze ultradźwiękowe charakteryzują się dużą czułością, nie posiadają żadnych ruchomych części stykających się z mierzonym przepływającym medium, są proste w instalacji i stosunkowo niedrogie.

W tomografii ultradźwiękowej wykorzystywane są układy pomiarowe wyposażone w wieloscieżkowe układy pobudzające, pozwalające odbierać syg-

nały jednocześnie przez wszystkie czujniki odbiorcze [6]. Na rysunku 1 przedstawiono drogi pobudzających sygnałów ultradźwiękowych dla jednego i wszystkich kolejnych pobudzeń nadajników.



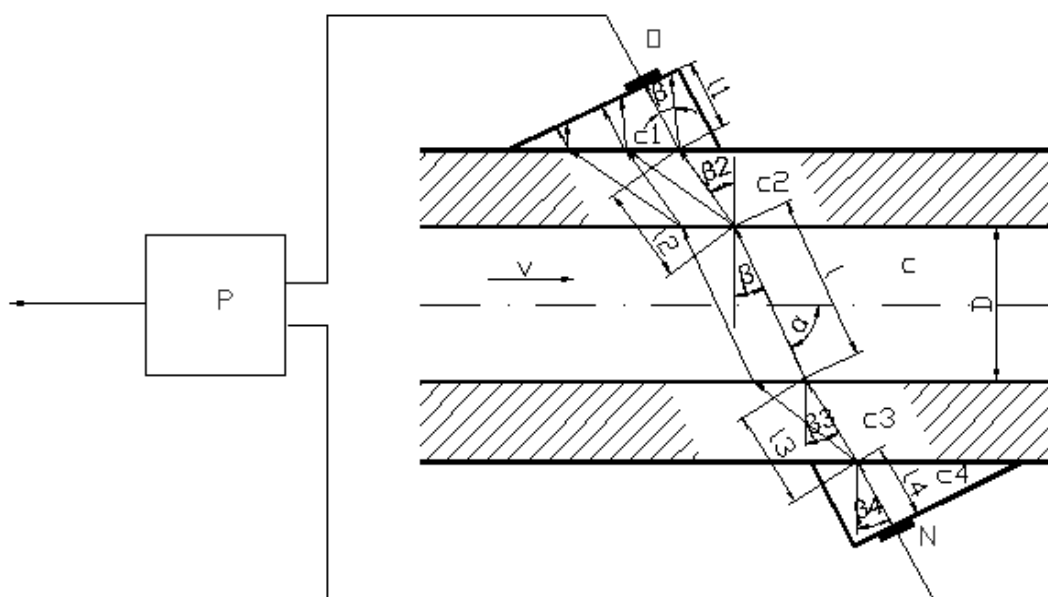
Rys. 1. Ścieżki pomiarowe: a) pomiędzy pierwszym nadajnikiem N1, a wszystkimi odbiornikami (O1÷O10), b) wszystkie ścieżki pomiarowe pomiędzy wszystkimi nadajnikami (N1÷N10) i odbiornikami (O1÷O10)

Pobudzenie jednego nadajnika i zebranie danych (są to opóźnienia czasowe) z wszystkich czujników pomiarowych, nazwano projekcją, zaś pełny cykl pobudzeń wszystkich nadajników ultradźwiękowych wraz uzyskaniem danych z wszystkich odbiorników – skanem obiektu. Odbieranym sygnałom przypisane są standardowe opóźnienia czasowe związane z różną odległością od nadajnika. Zakłócenia strumienia ultradźwiękowego przez przemieszczające się z pew-

ną prędkością medium wprowadzają dodatkowe opóźnienia. System kontrolno pomiarowy powinien dokonywać archiwizacji zebranych danych z każdej projekcji [6].

W opisywanym układzie (rys. 1) czujniki ultradźwiękowe rozmieszczono równomiernie na obwodzie profilu zewnętrznego rurociągu w dwóch płaszczyznach prostopadłych do osi rurociągu. W jednej płaszczyźnie znajduje się zespół czujników nadawczych zaś w drugiej płaszczyźnie są czujniki odbiorcze. Kolejne nadajniki generują impulsy ultradźwiękowe w systemie sekwencyjnym, które z różnym opóźnieniem docierają do czujników odbiorczych. Przyjmując częstotliwość pobudzającą poniżej 100 kHz kąt rozprzestrzeniania się fali ultradźwiękowej jest wystarczająco duży, aby swym zasięgiem objąć wszystkie elementy odbiorcze. W przypadku montowania głowic ultradźwiękowych nakładanych na rurociąg należy uwzględnić przechodzenie promieni fali ultradźwiękowej przez różne ośrodki [3].

Jedna z wybranych możliwości przechodzenia fali ultradźwiękowej przedstawiona jest na rys. 2.



Rys. 2. Przechodzenie strumienia fali ultradźwiękowej w urządzeniu pomiarowym nakładanym na ściankę rurociągu; N – nadajnik, O – odbiornik, P – przetwornik pomiarowy, c , c_1 , c_2 , c_3 , c_4 – prędkości fali podłużnej na drodze l , l_1 , l_2 , l_3 , l_4 od nadajnika do odbiornika, D – średnica wewnętrzna rury, v – prędkość badanego przepływu.

Fala ultradźwiękowa jest falą mechaniczną i na granicy dwóch ośrodków o różnych oporach akustycznych właściwych ulega załamaniu zgodnie z prawem Snelliusa i w drugim ośrodku powstaje zarówno fala podłużna jak i poprzeczna [12].

$$\frac{\sin \beta_{l1}}{c_{l1}} = \frac{\sin \beta_{t1}}{c_{t1}} = \frac{\sin \beta_{l2}}{c_{l2}} = \frac{\sin \beta_{t2}}{c_{t2}} \quad (1)$$

gdzie:

- c_{l1}, c_{l2} – prędkość fali podłużnej w ośrodkach 1 i 2,
- c_{t1}, c_{t2} – prędkość rozchodzenia się fali poprzecznej w ośrodkach 1 i 2,
- β_{l1} – kąt padania i odbicia fali podłużnej,
- β_{l2} – kąt załamania fali podłużnej,
- β_{t1} – kąt odbicia fali poprzecznej,
- β_{t2} – kąt załamania fali poprzecznej.

W ośrodku ciekłym lub gazowym może rozchodzić się tylko fala podłużna, więc do klina w głowicy będącej odbiornikiem, dociera ona w trzech miejscach. Jako drogę fali ultradźwiękowej wybiera się tę, w której stosunek czasu przebiegu w cieczy lub gazie, do czasu przebiegu między przetwornikami będzie największy. Warunek ten może być sformułowany jako wymaganie maksymalnej wartości kąta między promieniem centralnym fali ultradźwiękowej w cieczy lub gazie a prostopadłą do osi rurociągu.

Podstawową niedogodnością tej metody jest fakt, że prędkość rozchodzenia się fali ultradźwiękowej jest silnie zależna od temperatury i wilgotności ośrodka, co wymusza przy projektowaniu urządzeń wykorzystujących zjawiska rozprzestrzeniania się takich fal, wprowadzania odpowiednich korekcji lub odpowiednich bliźniaczych układów pomiarowych.

Czasy przebiegu fali ultradźwiękowej t_1 między przetwornikami ultradźwiękowymi (ściankach rurociągu, cieczy i głowicach) w kierunku pod prąd cieczy i t_2 z prądem cieczy można określić wzorami [12]:

$$t_1 = \frac{l}{c - v_l \sin \beta} + \sum_{i=1}^4 \frac{l_i}{c_i} \quad (2)$$

$$t_2 = \frac{l}{c + v_l \sin \beta} + \sum_{i=1}^4 \frac{l_i}{c_i}$$

Z powyższej zależności wynika, że na pomiar prędkości przepływu głównie mają wpływ zależności geometryczne układu pomiarowego i czasy przebiegów fal ultradźwiękowych w mierzonym środowisku.

W celu dokładniejszego określenia wartości prędkości przepływu niezbędne jest [8] matematyczne oszacowanie średniej wartości prędkości V_{sr} , na

przykład poprzez wprowadzenie zintegrowanych współczynników wagowych w_i , zgodnie z zależnością:

$$V_{sr} = \sum_{i=1}^n w_i V_i \quad (3)$$

gdzie:

- V_i – wartość prędkości z i -tej ścieżki pomiarowej,
- n – ilość ścieżek pomiarowych.

Średnia wartość prędkości przepływu jest niewystarczająca do prawidłowego określenia przepływu w całym przekroju rury. Wymagany jest w miarę pełny obraz rozkładu prędkości występujących w badanym przekroju rury. Obraz pola rozkładu prędkości w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku badanego przepływu można uzyskać metodą tomografii ultradźwiękowej [2, 6, 9, 10], w której po odpowiednim przetworzeniu wyników pomiaru wektorów prędkości przepływających cząstek można uzyskać zmieniające się w czasie, w danym przekroju rury obrazy rozkładu wektorów prędkości (a pośrednio również obrazy rozkładu zagęszczeń cząstek w badanym ośrodku oraz innych wielkości fizycznych związanych z tymi prędkościami).

Najważniejsze parametry konstrukcyjne układu pomiarowego to konfiguracja czujnika pomiarowego, kąt nachylenia drogi fali ultradźwiękowej w stosunku do osi rurociągu β , konstrukcje głowicy i częstotliwość fali ultradźwiękowej. Parametry te mają zarówno wpływ na czułość urządzenia jak i dokładność pomiaru.

Duże zmiany w konstrukcjach przepływomierzy zachodzą w zakresie nowoczesnych technologii. Udoskonalane przepływomierze wychodzą poza zwykłe opomiarowanie, wchodząc w dziedzinę rozwiązywania problemów: polegające na dylemacie jak wykorzystać informacje, jakie obecnie są w stanie przekazać te urządzenia, jak je wykorzystać do zwiększenia możliwości diagnostycznych, czy też jak zamienić je w dane, które będą przydatne dla badanych procesów. Takim wyzwaniem jest tomograf ultradźwiękowy, który wychodząc poza funkcję typowych przyrządów pomiarowych staje się „oknem” pozwalającym w sposób ciągły monitorować te procesy.

3. PRZEPLÝWOMIERZE TOMOGRAFICZNE

Nowe generacje tomografów komputerowych bazują na algorytmach rekonstrukcji obrazu z projekcji wykonywanych z wykorzystaniem wiązek pro-

mieni najczęściej ustawionych do siebie równolegle [13]. W przedstawionym przypadku zastosowano algorytmy z grupy metod algebraicznych, bazujących na metodologii aproksymacji funkcji przez szeregi o skończonej długości (ang. *finite series*). Obraz odtwarzany jest przy pomocy algorytmu dyskretyzującego badany obszar do postaci kwadratowych komórek o długości boku l , których środki geometryczne traktowane są jako piksele w odtwarzanym obrazie [6].

Przyjęcie takiego algorytmu uzasadnione jest następującymi względami:

1. ultradźwięki rozchodzą się po liniach prostych, a więc nie istnieje konieczność stosowania takich uproszczeń, jak w tomografii impedancyjnej lub pojemnościowej [9, 11],
2. proponowana metoda umożliwi obrazowanie badanych wielkości w czasie rzeczywistym i jest stosunkowo prosta,
3. dokładność w przypadku obrazowania profilu rozkładu prędkości nie jest sprawą krytyczną,
4. może być szeroko stosowany niezależnie od mierzonej geometrii i rodzaju danych [2]

Odtworzenie profilu rozkładu prędkości w płaszczyźnie odbiorników oznacza wyznaczenie estymat skończonego zbioru nieznanych wartości prędkości, które możemy określić jako $f(x, y)$. Na podstawie pomiarów czasów przebiegów impulsów ultradźwiękowych możemy uzyskać scałkowane wartości prędkości na drogach i -tych ścieżek pomiarowych (zwanymi promieniami) między nadajnikami a odbiornikami, które mogą być, zgodnie z zaproponowaną przez Kaczmarza lub Radona metodą tworzenia rzutu (lub projekcji), określane rzutami (lub projekcjami) s_i [6, 8].

Przyjmujemy, że w dyskretyzowanym profilu rozkładu prędkości $f(x, y)$ w każdej j -tej komórce funkcja f_j określająca poszukiwaną wartość ma wartość stałą. Zależność między tak określonymi rzutami s_i a wartościami f_j można określić jako [5]:

$$\sum_{j=1}^n w_{ij} f_j = s_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (4)$$

gdzie:

- m – liczba wszystkich promieni,
- n – liczba komórek, które przecinają promienie,
- w_{ij} – współczynniki wagowe określające udział szukanej wartości dla j -tej komórki, w stosunku do całej pomierzonej wartości wzdłuż i -tego promienia.

Równanie (4) w formie rozwiniętej można przedstawić jako układ równań:

$$\begin{aligned}
 w_{11}f_1 + w_{12}f_2 + w_{13}f_3 + \dots + w_{1n}f_n &= s_1 \\
 w_{21}f_1 + w_{22}f_2 + w_{23}f_3 + \dots + w_{2n}f_n &= s_2 \\
 &\vdots \\
 w_{m1}f_1 + w_{m2}f_2 + w_{m3}f_3 + \dots + w_{mn}f_n &= s_m
 \end{aligned} \tag{5}$$

Stosując numeryczne metody iteracyjne, oparte o transformacje Fouriera lub transformacje Radona, dla dużych wartości n oraz m można wyliczyć wszystkie wartości f_j z równania (5), czyli stworzyć obraz tomograficzny poszukiwanej wartości.

Numeryczne metody iteracyjne bazują na zaproponowanej po raz pierwszy przez Stefana Kaczmarza „metodzie projekcji” a jedną z bardziej popularnych metod tej grupy jest tak zwana metodą ART. (ang. *Algebraic Reconstruction Technique*) [1, 5].

W metodzie Kaczmarza siatka zbudowana z n^2 komórek odzwierciedla obraz n stopni swobody. Przy takim założeniu obraz reprezentowany przez (f_1, f_2, \dots, f_n) może być rozpatrywany w postaci pojedynczych punktów w n wymiarowej przestrzeni. W przestrzeni tej każde z równań (4) opisuje hiperpłaszczyznę. Jeżeli istnieje rozwiązanie (przy spełnionym warunku $m \geq n$) tego układu równań, to znajduje się ono w punkcie przecięcia prostych odzwierciedlających te hiperpłaszczyzny [5, 11].

Każda ze zmierzonych wartości s_i jest jednak obarczona nieznaniem, co do wartości, błędem a ponieważ poszukiwany zbiór rozwiązań $[f_1, f_2, \dots, f_n]^T$ powinien jednakowo dobrze spełniać każde z m równań rzutów układu (5), to rozwiązanie tego problemu sprowadza się do poszukiwania współrzędnych globalnego minimum w przestrzeni n -wymiarowej, na przykład z pomocą dość skutecznej i szybko zbieżnej metody iteracyjnej ART. W metodzie tej algorytm rekonstrukcji obrazu profilu poszukiwanych wartości wygląda następująco:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}_0^{(k)} &= 0 \\
 \mathbf{f}_i^{(k)} &= \mathbf{f}_{i-1}^{(k)} + \frac{s_i - \mathbf{w}_i^T \cdot \mathbf{f}_{i-1}^{(k)}}{\mathbf{w}_i^T \cdot \mathbf{w}_i} \cdot \mathbf{w}_i \\
 \mathbf{f}_0^{(k+1)} &= \mathbf{f}_m^{(k)}
 \end{aligned} \tag{6}$$

gdzie: $i = 1, 2, \dots, m$ a indeks górny (k) jest kolejnym numerem iteracji.

Wartości poszukiwanych współczynników f_i zawiera n elementowy wektor \mathbf{f}

$$\mathbf{f} = [f_1, f_2, f_3, \dots, f_n]^T \quad (7)$$

Wartości rzutów obejmuje m elementowy wektor \mathbf{s}

$$\mathbf{s} = [s_1, s_2, s_3, \dots, s_m]^T \quad (8)$$

W komórkach, których nie przecinają promienie, współczynniki w_{ij} przyjmują wartość równą zero. W innych przypadkach dla j -tej komórki przecinanej i -tym promieniem współczynnik ten można wyliczyć zgodnie z zależnością:

$$w_{ij} = \frac{\sqrt{2}}{lp_{ij}} l \quad (9)$$

gdzie:

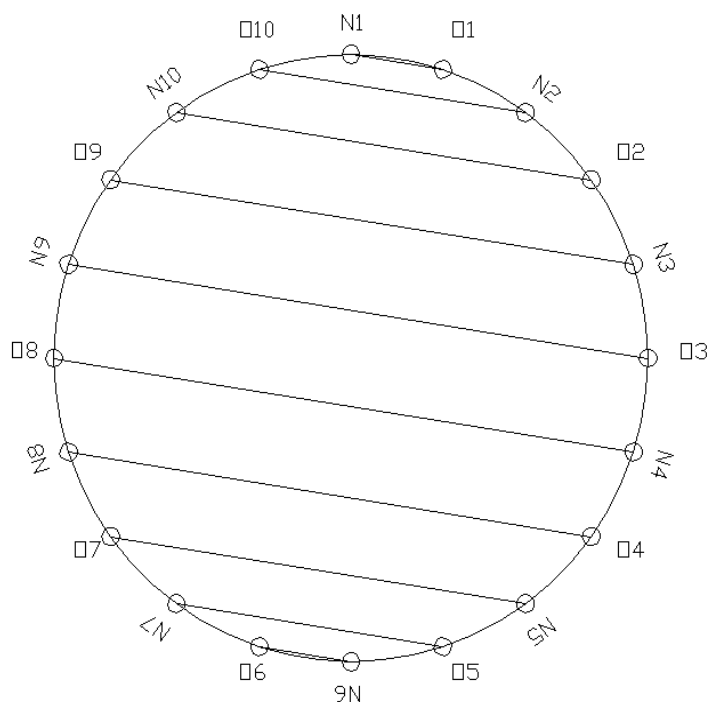
l – wymiar boku komórki,

lp_{ij} – wymiar długości odcinka i -tego promienia w obrębie j -tej komórki.

Pełną informację o geometrii rzutów zawiera składający się z $m \times n$ elementów zbiór m wektorów $[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \dots, \mathbf{w}_m]^T$, gdzie każdy n -elementowy wektor \mathbf{w}_i :

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= [w_{11}, w_{12}, \dots, w_{1n}]^T \\ \mathbf{w}_2 &= [w_{21}, w_{22}, \dots, w_{2n}]^T \\ &\vdots \\ \mathbf{w}_i &= [w_{i1}, w_{i2}, \dots, w_{in}]^T \\ &\vdots \\ \mathbf{w}_m &= [w_{m1}, w_{m2}, \dots, w_{mn}]^T \end{aligned} \quad (10)$$

W przedstawianej metodzie, aby uzyskać równoległe ustawienie wiązek ścieżek pomiarowych – spośród wszystkich ścieżek do obrazowania tomograficznego – wybrano tylko te, które były do siebie równoległe dla wszystkich impulsów ultradźwiękowych kolejno generowanych przez poszczególne nadajniki, jak pokazano to na rys. 3.



Rys. 3. Równoległe ścieżki pomiarowe

Do obliczeń przyjęto rozdzielczość badanego obszaru 64×64 , co daje 4096 pikseli, a więc liczba równań związana z liczbą promieni i projekcji była mniejsza od liczby niewiadomych. Zagęszczenie ścieżek pomiarowych w celu uzyskania lepszej jakości obrazu spowodowało w obliczeniach konieczność rozwiązania nadokreślonego układu równań liniowych [9, 11]:

$$\mathbf{W} \mathbf{f} = \mathbf{s} \quad (11)$$

gdzie:

$\mathbf{s} = [s_1, s_2, \dots, s_m]^T$ – wektor prawej strony równania,

$\mathbf{f} = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T$ – szukane rozwiązanie,

\mathbf{W} – macierz $m \times n$.

Jednym ze sposobów rozwiązania tego problemu jest znalezienie wektor \mathbf{f}^* , który dla zadanej macierzy \mathbf{W} i wektora \mathbf{s} minimalizuje normę euklidesową wektora residualnego [4]:

$$\|\mathbf{r}\|_2 = \min_{\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{s} - \mathbf{W}\mathbf{f}\|_2, \quad \|\mathbf{f}^*\|_2 = \min \|\mathbf{f}\|_2$$

gdzie ostatnie minimum liczone jest po wszystkich wektorach \mathbf{f} spełniających równość $\|\mathbf{f}^*\|_2 = \min \|\mathbf{f}\|_2$. Jest to tzw. liniowe zadanie najmniejszych kwadratów (LZNK) [7].

Przy wyznaczaniu rozwiązania liniowego zadania najmniejszych kwadratów i badaniu jego własności, korzystamy z twierdzenia o rozkładzie dowolnej macierzy prostokątnej na iloczyn macierzy ortogonalnej, diagonalnej i ortogonalnej. Mówi ono, że dla dowolnej macierzy $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ($m \geq n$) istnieją macierze ortogonalne $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ i $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ takie, że:

$$\mathbf{W} = \mathbf{U} \begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{V}^T \quad (12)$$

gdzie:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & d_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

oraz $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_k > d_{k+1} = d_{k+2} = \dots = d_n = 0$ a k jest pseudo-rzędem macierzy \mathbf{W} .

Wielkości d_i nazywamy wartościami osobliwymi (szczególnymi) macierzy \mathbf{W} , a rozkład (12) rozkładem według wartości osobliwych SVD (ang. *Singular Value Decomposition*) [7]. Wartości osobliwe d_i są pierwiastkami wartości własnych macierzy $\mathbf{W}^T \mathbf{W}$, a kolumny macierzy \mathbf{V} , odpowiadającymi im ortonormalnymi wektorami własnymi tej macierzy. Z kolei wektory \mathbf{U} są wektorami własnymi $\mathbf{W}\mathbf{W}^T$.

Korzystając z wartości osobliwych macierzy \mathbf{W} , jej liczbę warunkową można obliczyć ze wzoru:

$$\text{cond}(\mathbf{W}) = \frac{d_1}{d_k} \quad (13)$$

Znając rozkład (12) można łatwo wyznaczyć rozwiązanie LZNK:

$$\mathbf{f}^* = \mathbf{W}^+ \mathbf{s} \quad (14)$$

gdzie: $\mathbf{W}^+ = \mathbf{V}\mathbf{D}^+\mathbf{U}^T$ nazywana jest macierzą pseudoodwrotną do \mathbf{W} (lub czasami macierzą odwrotną w sensie Moore'a – Penrose'a),

$$\mathbf{D}^+ = \text{diag}\left\{\frac{1}{d_1}, \dots, \frac{1}{d_k}, 0, \dots, 0\right\} \in R_{n \times m} \quad (15)$$

Dla nieosobliwej macierzy kwadratowej zachodzi równość:

$$\mathbf{W}^+ = \mathbf{W}^{-1} \quad (16)$$

Rozwiązanie w przypadku złego uwarunkowania macierzy, (gdy $k < n$) można uzyskać podaną poniżej metodą [4]. Załóżmy, że macierz \mathbf{W} ma wyznaczony rozkład względem wartości osobliwych

$$\mathbf{W} = \mathbf{U} \begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{V}^T \quad (17)$$

Można, zatem wyznaczyć wektor:

$$\mathbf{g} = \mathbf{U}^T \mathbf{s} \quad (18)$$

i rozważyć liniowe zadanie najmniejszych kwadratów (LZNK)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{q} \cong \mathbf{g} \quad (19)$$

gdzie \mathbf{q} jest związane z wektorem \mathbf{f} liniową transformacją ortogonalną

$$\mathbf{f} = \mathbf{V}\mathbf{q} \quad (20)$$

Zagadnienie (20) jest równoważne zagadnieniu $\mathbf{W}\mathbf{f} \approx \mathbf{s}$ w sensie zagadnienia najmniejszych kwadratów dla ogólnej ortogonalnej transformacji.

Ponieważ macierz \mathbf{D} jest macierzą diagonalną ($\mathbf{D} = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$), to wpływ każdej składowej na normę residuum jest oczywisty. Wprowadzając składową q_j jako:

$$q_j = \frac{g_j}{d_j} \quad (21)$$

można zredukować sumę kwadratów residuum o wartość g_j^2 .

Założmy, że wartości osobliwe są ustawione w porządku nierosnącym tzn. $d_k \geq d_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots, n$. Wtedy naturalną rzeczą jest rozważenie rozwiązań „próbnych” (ang. *candidate solutions*) problemu (20) w postaci:

$$\mathbf{q}^{(k)} = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (22)$$

gdzie q_j jest dane równaniem (21).

Wektor rozwiązania „próbego” $\mathbf{q}^{(k)}$ jest rozwiązaniem uzyskanym z (22) za pomocą pseudo-inwersji (rozwiązanie o minimalnej normie) przy założeniu, że wartości osobliwe d_j dla $j > k$ są na tyle małe, że traktujemy je jako wartości zerowe.

Z rozwiązań „próbnych” $\mathbf{q}^{(k)}$ można otrzymać wektory rozwiązań $\mathbf{f}^{(k)}$ dla zagadnienia $\mathbf{W}\mathbf{f} \cong \mathbf{s}$ jako:

$$\mathbf{f}^{(k)} = \mathbf{V}\mathbf{q}^{(k)} = \sum_{j=1}^k q_j \mathbf{v}^j \quad k = 0, \dots, n \quad (23)$$

gdzie \mathbf{v}^j oznacza j -tą kolumnę wektora \mathbf{V} .

Zauważmy, że

$$\|\mathbf{f}^{(k)}\|_2 = \|\mathbf{q}^{(k)}\|_2 = \sum_{j=1}^k q_j^2 = \sum_{j=1}^k \left[\frac{g_j}{d_j} \right]^2 \quad (24)$$

gdzie $\|\mathbf{f}^{(k)}\|$ jest niemalejącą funkcją k .

Kwadrat normy związanej z $\|\mathbf{f}^{(k)}\|$ jest dany zależnością:

$$(q^{(k)})^2 = \|\mathbf{s} - \mathbf{W}\mathbf{f}^{(k)}\|_2^2 = \sum_{j=k+1}^m g_j^2 \quad (25)$$

Inspekcja kolumn macierzy \mathbf{W} stowarzyszonych z małymi wartościami osobliwymi jest bardzo efektywną metodą identyfikacji zbioru kolumn macierzy \mathbf{W} , które są niemal liniowo zależne.

Założmy, że macierz \mathbf{W} jest źle uwarunkowana; wtedy pewne wartości osobliwe są znacząco mniejsze od pozostałych. W takim przypadku niektóre z końcowych wartości q_j mogą być niepożądanie wielkie. Należy określić indeks k , dla którego wszystkie współczynniki q_j dla $j \leq k$ są dostatecznie małe, wszystkie wartości osobliwe d_j dla $j \leq k$ są dostatecznie duże, a norma residuum $q^{(k)}$ jest dostatecznie mała. Jeśli taki indeks k istnieje to rozwiązanie „próbne” $\mathbf{f}^{(k)}$ przyjmuje się jako wektor rozwiązań LZNK.

Aby określić indeks k najwygodniej jest skorzystać z wykresu $\|\mathbf{r}^{(k)}\| = f\{\|\mathbf{f}^{(k)}\|\}$. Dla zadań źle uwarunkowanych mamy wówczas wykres przypominający kształtem literę L, z którego stosunkowo łatwo można określić optymalną wartość indeksu k , co zostało przedstawione na rys. 5...7 w normie wektora reszt.

4. WYNIKI EKSPERYMENTU NUMERYCZNEGO

Eksperyment numeryczny został przeprowadzony na danych syntetycznych niezasmuconych. Jak to zostało podane we wcześniejszych rozdziałach algorytm budowy obrazu został zaprojektowany w ten sposób, aby można było wygenerować nadokreślony układ równań, to znaczy taki, dla którego liczba równań jest większa niż liczba niewiadomych.

Niestety immanentną cechą tomografii jest między innymi i to, że macierz współczynników jest macierzą prostokątną o niepełnym pseudo – rzędzie. Zatem zmuszeni zostaliśmy do rozpatrzenia rozwiązań próbnych (ang. *candidate solutions*) [10] oraz do wyboru jednego z nich.

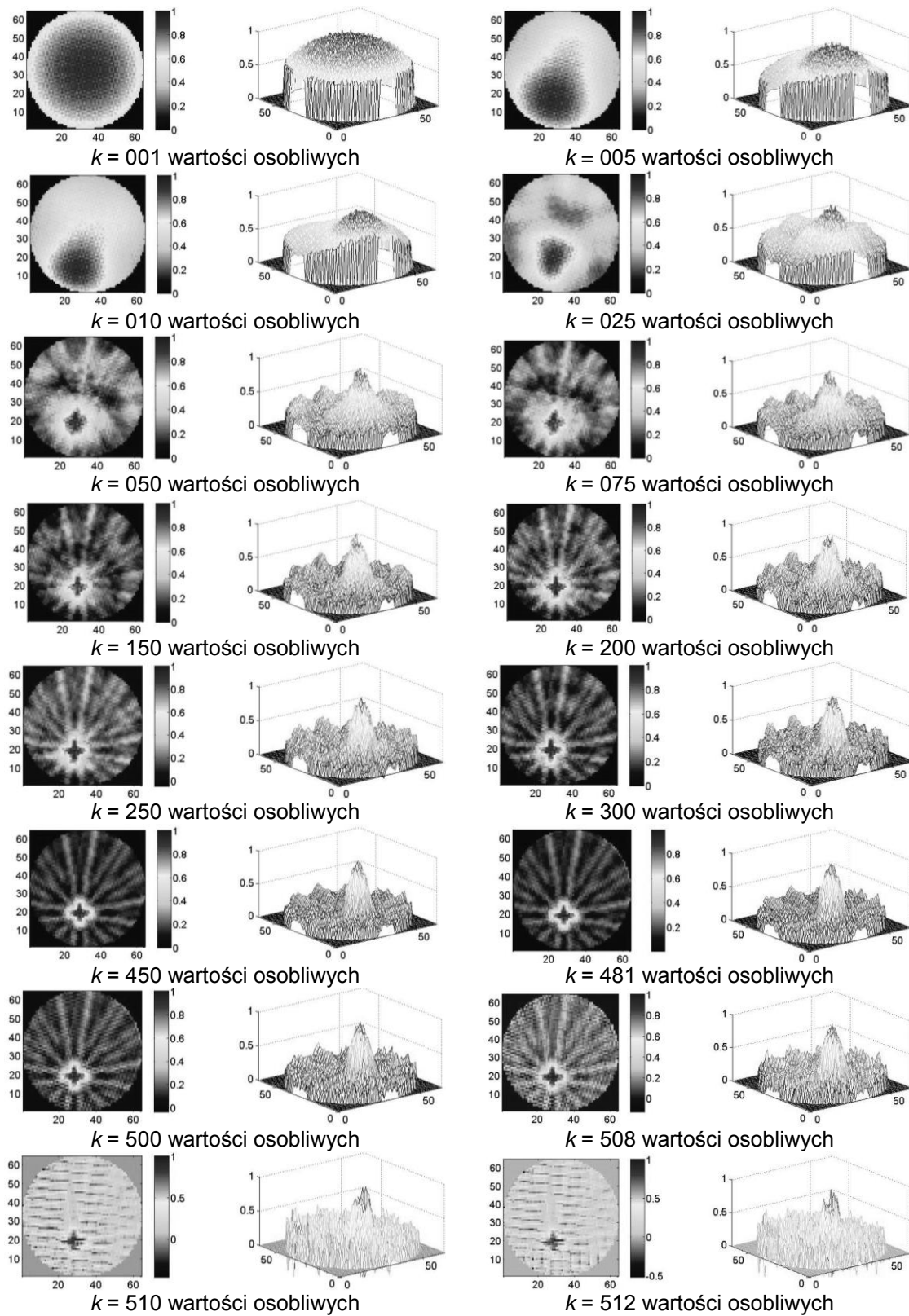
Obrazy wybranych poszczególnych rozwiązań są przedstawione na rys. 4. Jako kryterium wyboru pseudo – rzędu macierzy, a zatem i rozwiązania próbnego, przyjęto rozwiązanie o możliwie małej normie, gwarantujące możliwie minimalną normę wektora residualnego. Interpretację graficzną przyjętego kryterium przedstawiono na rys. 5, 6 i 7. Rozwiązanie optymalne występuje na zagięciu krzywych normy wektora reszt przedstawionych obok obrazu tomograficznego.

Jak łatwo zauważyć, obrazy tomograficzne dla zbyt małej oraz zbyt dużej liczby wartości osobliwych stają się nieczytelne. Dla obiektu typu krzyż jakościowo najlepsze odwzorowania uzyskano w zakresie 200 do 500 wartości osobliwych. (za najlepszy wynik uznano obraz dla 481 największych wartości osobliwych).

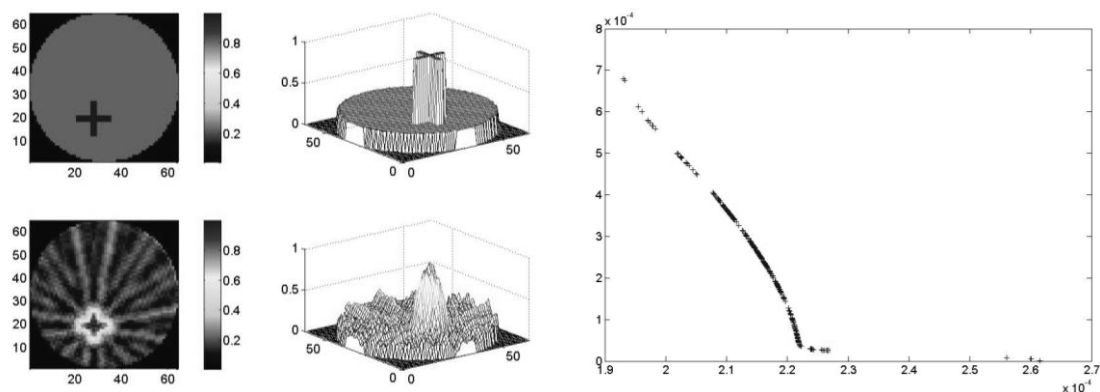
Wybrane obrazy eksperymentu numerycznego dla trzech różnych obiektów (krzyż, kwadrat i prostokąt) przedstawiono na rys. 5...7 łącznie z wykresami normy residualnej w funkcji normy wektora rozwiązań

$$\|\mathbf{r}^{(k)}\| = f\left(\|\mathbf{f}^{(k)}\|\right).$$

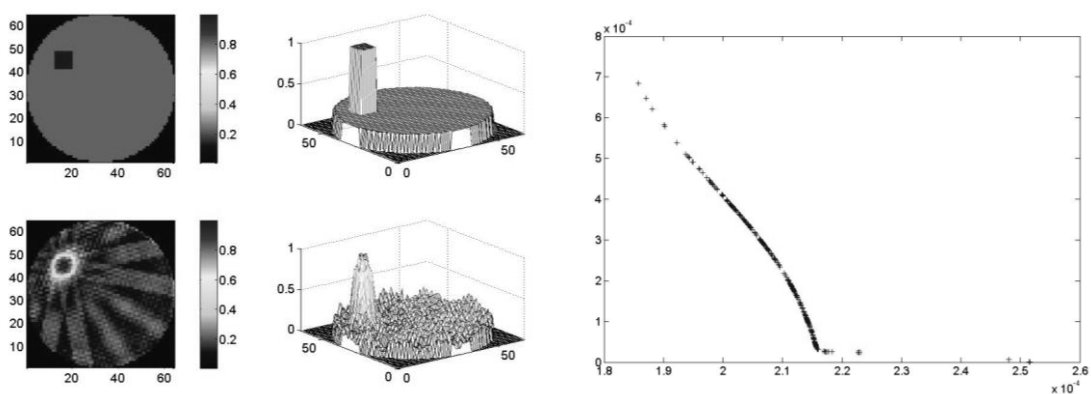
Uzyskane wyniki są surowym obrazem odwzorowań tomograficznych uzyskanych dla danych syntetycznych. Nie zastosowano też żadnej metody regularyzacyjnej, pozwalającej na uzyskanie obrazów bez smug, ponieważ na tym etapie nie było to konieczne.



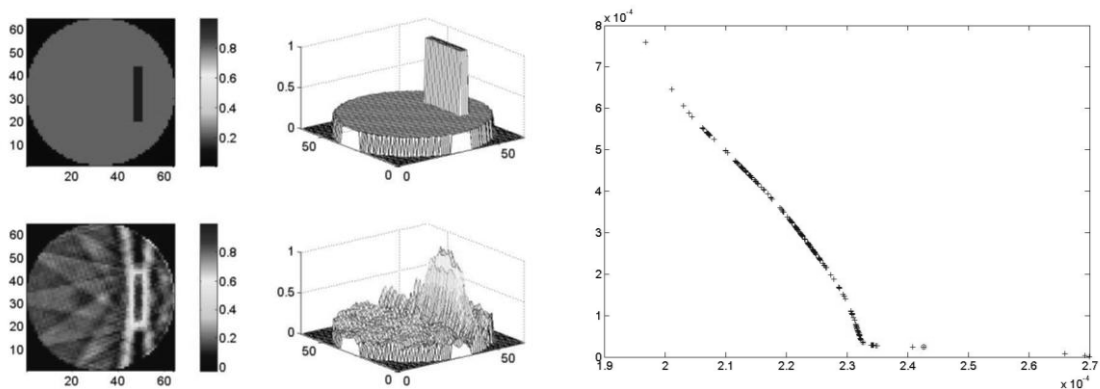
Rys. 4. Obrazy tomograficzne kolejnych rozwiązań próbnych w funkcji wzrastających od 1 do 512 wartości osobliwych k



Rys. 5. Model obiektu typu „krzyż” i jego profil tomograficzny oraz norma wektora reszt w funkcji normy wektora rozwiązań $\|r^{(k)}\| = f(\|f^{(k)}\|)$



Rys. 6. Model obiektu typu „kwadrat” i jego profil tomograficzny oraz norma wektora reszt w funkcji normy wektora rozwiązań $\|r^{(k)}\| = f(\|f^{(k)}\|)$



Rys. 7. Model obiektu typu „prostokąt” i jego profil tomograficzny oraz norma wektora reszt w funkcji normy wektora rozwiązań $\|r^{(k)}\| = f(\|f^{(k)}\|)$

4. WNIOSKI KOŃCOWE

Uzyskane wyniki są surowym obrazem odwzorowań tomograficznych dla danych syntetycznych. W przedstawionym eksperymencie numerycznym nie zastosowano też żadnej metody regularyzacyjnej, pozwalającej na uzyskanie obrazów bez smug. Pomimo tego można stwierdzić, że uzyskane zaproponowaną metodą wyniki są dość wiernym odwzorowaniem modelowanych obiektów oraz umożliwiają ich precyzyjną lokalizację wewnątrz rozpatrywanego obszaru. Potwierdza to, że zaproponowano skuteczną i efektywną metodę tworzenia obrazów tomograficznych.

LITERATURA

1. Ciernik R.: Tomografia komputerowa, Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa, (2005)
2. Dobrucki A.B, Opieliński K.J: Adaptation of Image Reconstruction Algorithm for Purposes of Ultrasound Transmission Tomography (UTT), *Archives of Acoustic*, 25, 4, (2000)
3. Gudra T.: Właściwości i zastosowanie przetworników ultradźwiękowych do pracy w ośrodkach gazowych, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław (2005)
4. Guziak T., Kamińska A., Pańczyk B., Sikora J.: Metody numeryczne w elektrotechnice, Wydawnictwa Politechniki Lubelskiej, Lublin, wyd. III (2002)
5. Kak A., C., Slaney M.: Principles of Computerized Tomographic Imaging, IEEE Press, (1999)
6. Kurniadi D., Trisnobudi A., Suanto S., Ultrasonic Tomography for Airflow Velocity Profile Measurement using Multipath Transducers, *Proc. Of 4th world Congress on Industrial Process Tomography*, Aizu, Japan, (2005)
7. Lawson C. L., Hanson R. J.: Solving Least Squares Problems, Classics in Applied Mathematics 15, SIAM (1995)
8. Michałski A., A New Approach To Estimating the Main Error Of A Primary Transducer for an Electromagnetic Flowmeter, *Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 50, no 3, (2001)
9. Mosorov V., Sankowski D., Mazurkiewicz Ł., Dyakowski T., The 'best - correlated pixels' method for solid mass flow measurements using electrical capacitance tomography, *Measurement Science and Technology*, 13, (2002)
10. Polakowski K., Sikora J., Filipowicz S. F.: Liniowe zadanie najmniejszych kwadratów w konstrukcji obrazów wielościeżkowej tomografii ultradźwiękowej, *Przegląd Elektrotechniczny*, R. LXXXII, Nr 10, (2006)
11. Sikora J.: Numeryczne algorytmy w tomografii impedancyjnej i wiropądowej, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej Warszawa (2000)

12. Waluś S., Optymalizacja metrologiczna strumienia płynu za pomocą przepływomierzy próbkujących, *Wydawnictwo Politechniki Śląskiej*, Gliwice (2003)
13. Yeh T. T., Espina P. I.: An Intelligent Ultrasonic Flow Meter for Improved Measurement and Flow Calibration Facility, IEEE Instrumentation and Measurement and flow Calibration Facility, Budapest, Hungary, (2001)

Rękopis dostarczono, dnia 20.02.2007 r.

Opiniował: prof. dr hab. inż. Antoni Cieśla

LINEAR PROBLEM OF THE LEAST SQUARES
IN CONSTRUCTION IMAGES
OF MULTIPATH ULTRASONIC TOMOGRAPHY

Krzysztof POLAKOWSKI, Jan SIKORA,
Stefan F. FILIPOWICZ

ABSTRACT *Application of the ultrasound tomography for velocity images (profiles) of gas in circular pipe is presented in this paper. Single or multi path flowmeters are currently used to measure the average co-pivotal value of the gas speed flowing in a pipe.*

In this paper we have extended the idea of measurement of an average speed flow to a measuring a speed profile in a cross section of the pipe. The idea extension directly leads to a multipath ultrasonic tomography.

The image construction was done with an aid of linear least squares problem. Proposed method was illustrated with a numerical simulation results.