

Stefan WÓJTOWICZ

ANALIZA PARAMETRÓW METROLOGICZNYCH SYSTEMU POMIAROWEGO TOMOGRAFII IMPEDANCYJNEJ

STRESZCZENIE *Analiza metrologiczna torów pomiarowych umożliwia oszacowanie przedziałów ufności wielkości mierzonych i w konsekwencji rozkładu przestrzennego przedziałów ufności parametrów impedancyjnych. Artykuł przedstawia strukturę systemu pomiarowego, probabilistyczny model pomiaru w systemie wielowejściowym oraz analizę rozkładów składowych błędów. Do oszacowania przedziałów ufności zastosowano i porównano metodę propagacji przedziałów ufności i metodę propagacji rozkładów gęstości prawdopodobieństwa.*

Słowa kluczowe: *tomografia impedancyjna, model pomiaru*

1. WSTĘP

Tomografia impedancyjna wymaga wielokrotnego pomiaru potencjałów w systemie wielowejściowym. Jeśli pomiar wielkości fizycznej zmiennej w czasie odbywa się metodą próbkowania to dane pomiarowe w sposób naturalny można zestawić w macierzy danych, o wymiarach związanych z czasem, kątem projekcji oraz lokalizacją przestrzenną elektrod pomiarowych.

dr inż. Stefan WÓJTOWICZ
e-mail: s.wojtowicz@iel.waw.pl

Zakład Metrologii i Badań Nieniszczących
Instytut Elektrotechniki

Zależność rozkładu parametru impedancyjnego we wnętrzu obiektu od potencjałów występujących na dostępnej powierzchni obiektu przedstawia równanie [8]:

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}_\gamma \boldsymbol{\gamma} \quad (1)$$

gdzie:

\mathbf{v} – wektor napięć zmierzonych na brzegu obszaru,

$\boldsymbol{\gamma}$ – wektor konduktywności,

\mathbf{A}_γ – macierz transformacji.

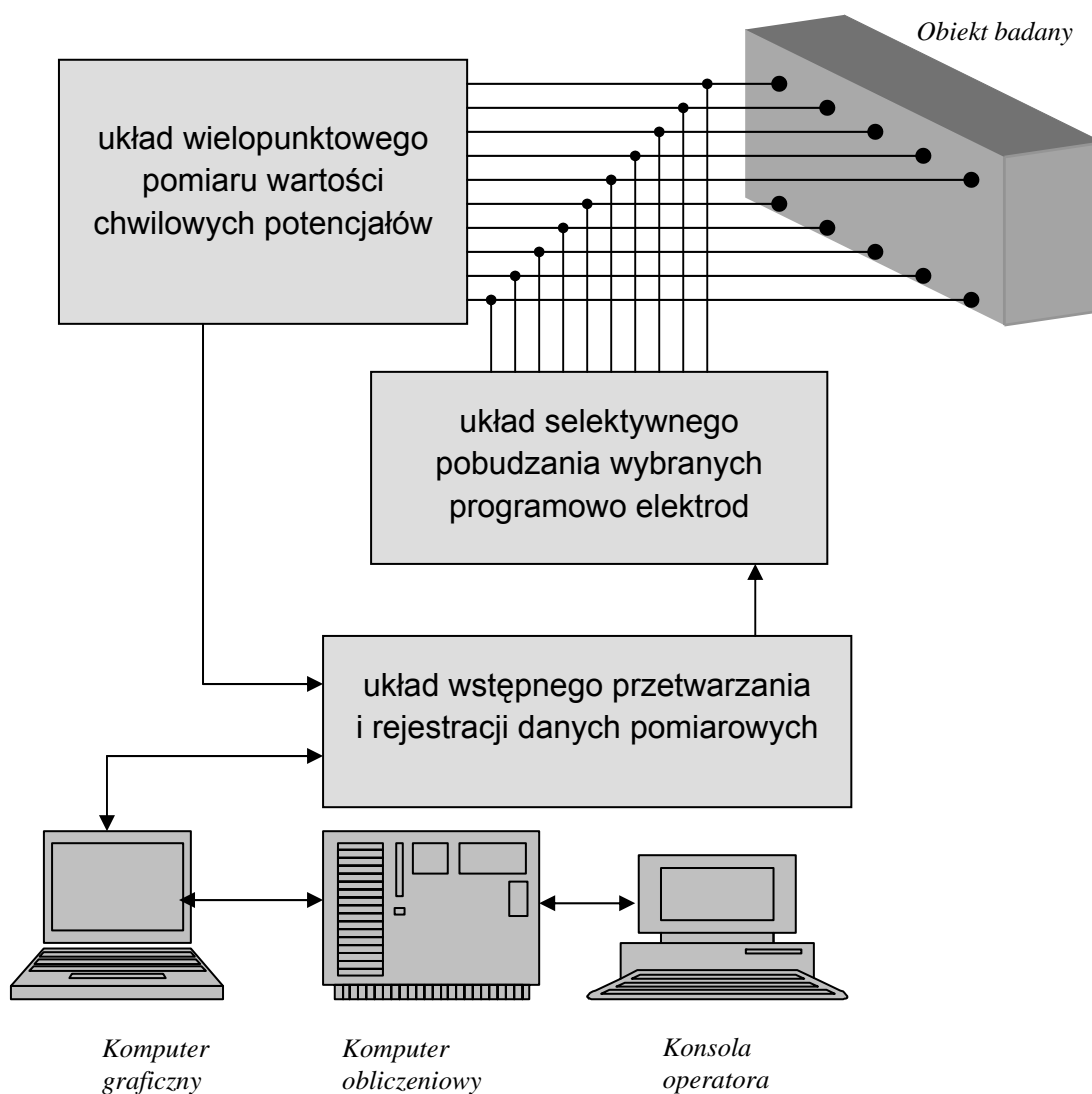
Składowe wektora napięć mierzone są za pośrednictwem elektrod umieszczonych na brzegu badanego obszaru. Usytuowanie elektrod w realnych warunkach znane jest w przybliżeniu i stanowi istotne źródło błędów przy konstruowaniu obrazu rozkładu parametru. Dla kolejnych kątów projekcji zasilania tworzone są kolejne składowe wektora napięć. Wektor napięć posiada liczbę składowych będącą iloczynem liczby elektrod pomiarowych dla danej projekcji i liczby kątów projekcji. Wektor konduktywności przedstawia rozkład parametru wewnątrz obszaru. Poszukiwanie rozkładu konduktywności polega na znalezieniu macierzy odwrotnej do \mathbf{A}_γ i wyznaczeniu wektora $\boldsymbol{\gamma}$ na podstawie zmierzonego wektora \mathbf{v} . Wyznaczenie obszaru ufności dla założonego poziomu ufności w tym przypadku polega na przeprowadzeniu analizy wielowymiarowego rozkładu gęstości prawdopodobieństwa. Parametry rozkładu wielowymiarowego zależą od parametrów metrologicznych torów pomiarowych, wzajemnej korelacji danych, konwersji analogowo-cyfrowej, metod konstrukcji obrazów oraz dokładności algorytmów obliczeniowych. W artykule przeprowadzono analizę metrologiczną systemu pomiarowego i podano metodę szacowania niepewności wielowymiarowego wyniku pomiaru niepewności. Badania są częścią pracy prowadzonej w ramach grantu 4T07E04529 „Nowa tomograficzna metoda oceny stopnia zawilgocenia murów ceglanych w obiektach budowlanych”.

2. STRUKTURA SYSTEMU POMIAROWEGO

W większości aplikacji struktura sprzętowa systemu pomiarowego tomografii impedancyjnej zawiera podobne elementy [2][4]. Różnice dotyczą elektrod pomiarowych, charakteru pobudzenia lub szczegółów torów pomiarowych. Sys-

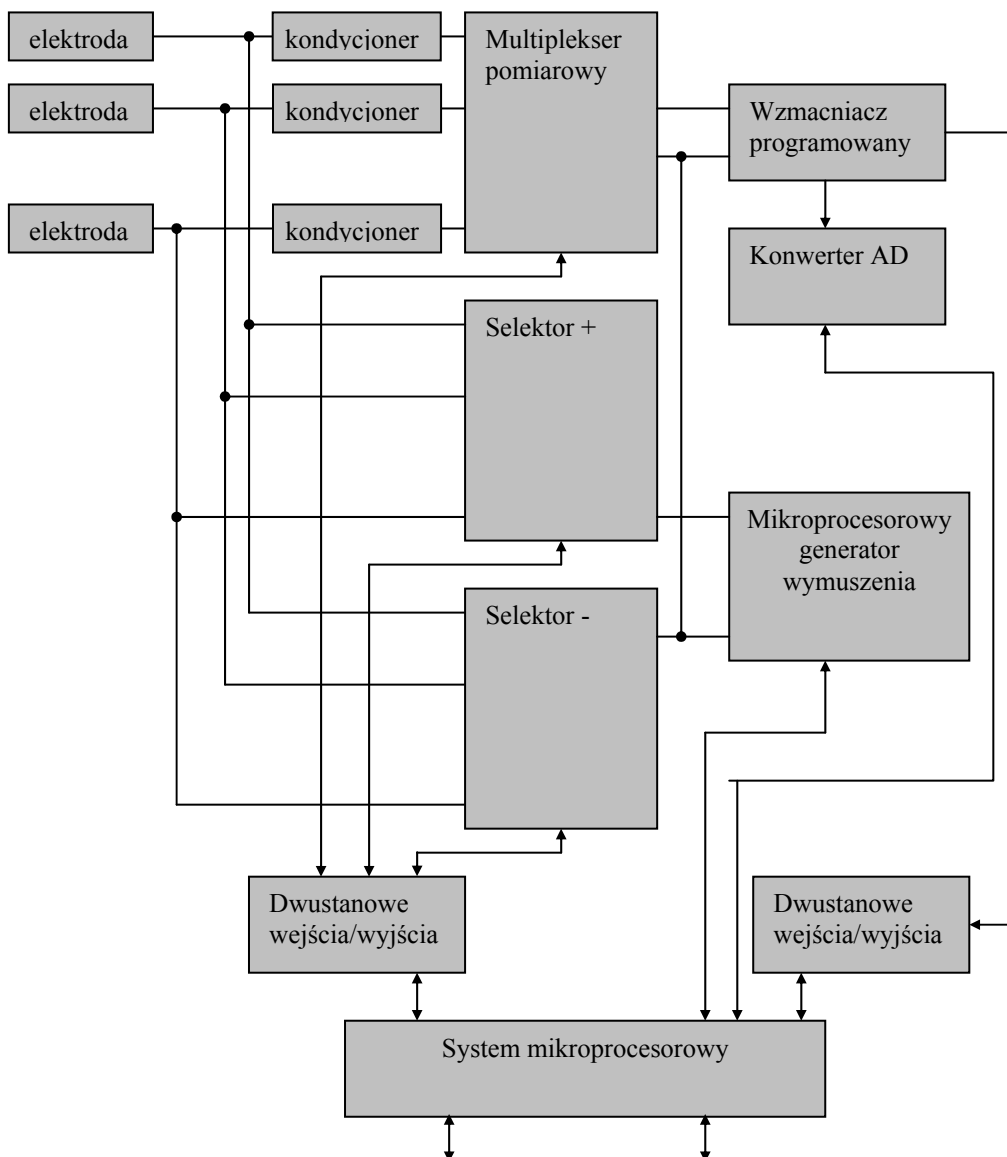
tem tomografii impedancyjnej, którego ogólny schemat blokowy pokazano na rys. 1 składa się z następujących elementów:

- elektrody pomiarowe umieszczone na powierzchni obiektu,
- układ selektywnego pobudzenia wybranych programowo elektrod,
- układ wielopunktowego pomiaru wartości chwilowych potencjałów,
- układ wstępnego przetwarzania i rejestracji danych pomiarowych,
- komputer o dużej mocy obliczeniowej.



Rys. 1. Struktura systemu tomografii impedancyjnej

Elektrody pomiarowe opisane w [7] są dostosowane do powierzchni badanego obiektu i zwykle pełnią podwójną funkcję: elektrod pomiarowych i elektrod pobudzających. Pierwszy układ w sposób autonomiczny dokonuje pomiarów wartości chwilowych napięć na powierzchni obiektu. Elementy kondycjonujące wejściowych torów pomiarowych dopasowują poziomy sygnałów i ograniczają pasmo częstotliwościowe. Sterowanie kątem projekcji odbywa się przez wybór odpowiedniej kombinacji przełączników selektora i podanie źródła wymuszenia napięciowego lub prądowego.



Rys. 2. System pomiarowy i układ wymuszenia

Wartości chwilowe potencjałów na powierzchni obiektu są zapisywane jako trójwymiarowa macierz pomiarowa. Wymiary macierzy stanowią: kąt projekcji k , numer elektrody związany z lokalizacją 3D punktu na powierzchni obiektu i , numer próbki w oknie czasowym j .

Wstępne przetwarzanie polega na filtrowaniu szumu zakłóceń, uwzględnianiu danych z procedury wzorcowania torów pomiarowych, wykrywaniu błędów grubych pochodzących od zakłóceń przemijających oraz wykonaniu koniecznych operacji na próbkach sygnałów.

Macierz danych po wstępnym przetwarzaniu jest archiwizowana i po zakodowaniu przesyłana jest do komputera obliczeniowego. Algorytmy tomograficzne konstrukcji obrazu wnętrza obiektu wykonywane są przez komputer obliczeniowy. Po zakończeniu obliczeń gotowy zakodowany obraz trójwymiarowy przesyłany jest do komputera graficznego użytkownika.

System pomiarowy (rys. 2) zapewnia doprowadzenie wymuszenia do odpowiednich elektrod, kondycjonowanie sygnałów napięciowych, przełączanie kanałów pomiarowych, wzmacnianie selektywne sygnałów pomiarowych oraz konwersję analogowo – cyfrową. Dane cyfrowe są rejestrowane i archiwizowane w pamięci systemu mikroprocesorowego. Interfejsy systemu umożliwiają przesłanie danych do komputera obliczeniowego.

Dane mogą być przesyłane w dwóch trybach. Pierwszy stosowany jest przy monitorowaniu rozkładu konduktywności w czasie rzeczywistym. Dane są kompletowane w jednym obiegu multipleksera i selektora następnie są przesyłane w postaci naturalnej bez przetwarzania. Drugi tryb zapewnia wstępne przetwarzanie danych pomiarowych.

3. MODEL POMIARU

System akwizycji danych dokonuje pomiaru i rejestracji wartości chwilowych rozkładu napięć na powierzchni obiektu. Zebrane dane są następnie przetwarzane przez algorytmy numeryczne. Zgodnie ze strategią zadania pomiarowego dla każdej konfiguracji pobudzenia mierzone są wartości chwilowe napięć w kolejnych chwilach czasowych okna pomiarowego. Wartość chwilową zmierzonego napięcia oznaczono:

$$v_{ij}^k = v_i^k(t_j) \quad (2)$$

gdzie: i -ty numer elektrody, $i = 1 \dots I$

j -ty numer próbki w oknie czasowym, $j = 1 \dots J$

k -ty numer konfiguracji pobudzenia, $k = 1 \dots K$

Zmienna losowa (1) jest opisana rozkładem gęstości prawdopodobieństwa:

$$y_{ij}^k = g_{ijk}(v_{ij}^k) \quad (3)$$

Dane pomiarowe tworzą macierze \mathbf{V} i \mathbf{Y} . Elementami macierzy \mathbf{V} są pomierzone wartości napięć odpowiednio dla każdej elektrody, konfiguracji pobudzenia i numeru próbki w oknie czasowym. Elementami macierzy \mathbf{Y} są funkcje rozkładu gęstości prawdopodobieństwa przypisywane wartościom mierzonym.

3.1. Równanie pomiaru pojedynczej wartości chwilowej napięcia

Konwerter analogowo-cyfrowy próbkuje sygnał napięciowy przypisując kolejnym punktom na osi czasu wartości chwilowe napięcia. Częstota próbkowania dobierana jest do częstotliwości sygnału pomiarowego zgodnie z zasadami próbkowania tak by można było odtworzyć przebieg sygnału w czasie z założoną dokładnością. Analiza torów pomiarowych pozwala na przyjęcie następującego równania pomiaru wartości chwilowych napięcia [13]:

$$v = \frac{A_r + \delta A}{A_d} (v_s + n + \delta v_{xyz} + \delta v_{gen}) + \delta v_{akon} + \delta v_{ad} \quad (4)$$

gdzie:

- v – wartość chwilowa napięcia mierzonego,
- v_s – wartość chwilowa napięcia wskazana przez konwerter AD,
- A_r – wartość rzeczywista wzmocnienia,
- A_d – wartość nastawiona wzmocnienia,
- δA – błąd wzmocnienia toru pomiarowego,
- n – wartość chwilowa napięcia szumu zakłóceń,
- δv_{akon} – błąd addytywny układów kondycjonowania,
- δv_{ad} – błąd konwersji analogowo cyfrowej,
- δv_{gen} – błąd generatora wymuszenia,
- δv_{xyz} – błąd ustawienia elektrod w przestrzeni.

Dla przejrzystości zapisu w równaniu pominięto indeksy oznaczające numer elektrody, numer próbki w oknie czasowym i numer konfiguracji pobudze-

nia. Tak określone wielkości wejściowe występujące po prawej stronie równania są zmiennymi losowymi opisanymi funkcjami rozkładu gęstości prawdopodobieństwa.

3.2. Analiza parametrów rozkładów wejściowych zmiennych losowych

Przyjęto, że wzmocnienie rzeczywiste toru pomiarowego jest zmienną losową o wartości średniej A_d i błędach pochodzących od rozdzielczości nastawiania i wzorcowania wzmocnienia.

$$A_r = A_d + \delta A_r + \delta A_w \quad (5)$$

gdzie:

- δA_r – błąd wzmocnienia od rozdzielczości ustawiania,
- δA_w – błąd wzmocnienia od niepewności wzorcowania.

Rozkład pierwszej składowej losowej błędu wzmocnienia jest konstruowany metodą typu B na podstawie danych o rozdzielczości ΔA_r i arbitralnym przyjęciu rozkładu równomiernego $P(-a_r, +a_r)$. Dla takiego rozkładu odchylenie standardowe dane jest wzorem:

$$\sigma_r = \frac{a_r}{\sqrt{3}} \quad (6)$$

Rozkład drugiego składnika wynika ze świadectwa wzorcowania, które podaje typ rozkładu i niepewność wzorcowania U dla poziomu ufności p oraz współczynnik rozszerzenia k . Odchylenie standardowe wyznacza się z wzoru:

$$\sigma_w = \frac{U}{k} \quad (7)$$

Napięcie szumu zakłóceń określane jest w procedurze wzorcowania toru pomiarowego i pochodzi od różnych czynników działających na czujniki pomiarowe. Szum ma rozkład normalny $N(\mu_n, \sigma_n)$ i kolejne próbki nie są skorelowane.

Parametry rozkładu błędu układów kondycjonowania wyznaczone są w procedurze wzorcowania dla całego zakresu pomiarowego. Granice błędu

wyznaczają rozkład równomierny $P(-a_k, +a_k)$, który modeluje rozkład błędu kondycjonowania o odchyleniu standardowym σ_k .

Błąd konwersji analogowo cyfrowej podlega także rozkładowi równomiernemu w przedziale $(+q/2, -q/2)$. Rozkład błędu konwersji AD posiada odchylenie standardowe σ_k .

Rzeczywiste wymuszenie jest zmienną losową o wartości średniej V_d i błędach pochodzących od rozdzielczości nastawiania i wzorcowania.

$$V_g = V_d + \delta V_r + \delta V_w \quad (8)$$

gdzie:

- δV_r – błąd od rozdzielczości ustawiania generatora,
- δV_w – błąd od niepewności wzorcowania generatora.

Błąd rozdzielczości ma rozkład równomierny o odchyleniu standardowym σ_{rg} . Rozkład drugiego składnika wynika ze świadectwa wzorcowania, które podaje typ rozkładu i niepewność wzorcowania U dla poziomu ufności p oraz współczynnik rozszerzenia k . Odchylenie standardowe wyznaczone z tych danych oznaczono przez σ_{wg} . Odchylenie standardowe błędu mierzonego napięcia chwilowego powodowanego błędem napięcia wymuszenia określa wzór:

$$\sigma_{gen} = c_g \sqrt{\sigma_{rg}^2 + \sigma_{wg}^2} \quad (9)$$

Współczynnik c_g jest wyznaczany eksperymentalnie lub w przypadku, gdy znana jest przybliżona zależność funkcyjna ze wzoru:

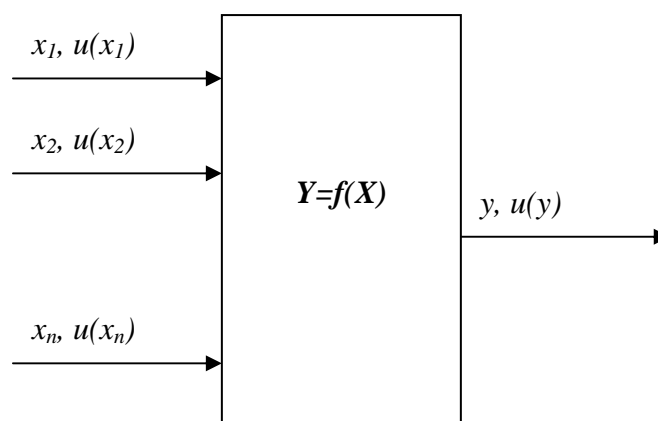
$$c_g = \frac{\partial f}{\partial \delta V_g} \quad (10)$$

Każde odchylenie położenia elektrod w przestrzeni od punku przyjętego w obliczeniach jako nominalny powoduje dodatkowy błąd. Przyjmując w przybliżeniu, że błąd ustawienia elektrody liniowo zależy od odległości Δd między punktem rzeczywistym a nominalnym w przestrzeni można eksperymentalnie przyjąć granice błędu i wyznaczyć odchylenie standardowe dla rozkładu równomiernego. Współczynnik wrażliwości c_{xyz} wyznacza się analogicznie jak w przypadku błędu generatora.

4. RÓWNANIE NIEPEWNOŚCI

4.1. Model propagacji niepewności

Wynik pomiaru zawiera wartość mierzonej wielkości fizycznej oraz niepewność pomiaru. Te dwie wartości określają przedział ufności. Prawo przenoszenia niepewności [11] podaje związek niepewności wyjściowej z niepewnościami wielkości wejściowych (rys. 3).



Rys. 3. Ilustracja prawa propagacji niepewności

Wartość wielkości fizycznej obliczana jest wprost z funkcji (1) natomiast złożona niepewność standardowa z zależności:

$$u(y) = \sqrt{\sum_1^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i)} \quad c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (11)$$

gdzie:

- $u(y)$ – złożona niepewność standardowa wielkości wyjściowej,
- $u(x_i)$ – złożona niepewność standardowa wielkości wejściowej,
- c_i – wrażliwość wyjścia na wejście i .

Wrażliwość wyjścia na określone wejście przy funkcji pomiaru danej w postaci analitycznej wyznacza się jako pochodną cząstkową. W innych przypadkach należy stosować metody symulacyjne lub eksperymentalne. Niepewność złożona wyznaczana zgodnie z prawem propagacji łączona jest z niepewnością metody oraz niepewnościami arbitralnie wprowadzonymi przez badacza. W przypadku prostych zależności funkcyjnych współczynniki wrażliwości można wyznaczyć analitycznie. Problemy pojawiają się w przypadku braku postaci analitycznej lub postać funkcyjna jest trudna do analizy.

Zgodnie z prawem propagacji niepewności dla jednokrotnego pomiaru wartości chwilowej napięcia można podać następujące równanie niepewności pomiaru:

$$u(v) = \sqrt{c_1^2 (\sigma_{Ar}^2 + \sigma_{Aw}^2) + c_2^2 \sigma_n^2 + c_3^2 \sigma_{xyz}^2 + c_4^2 \sigma_{gen}^2 + c_5^2 \sigma_{akon}^2 + c_6^2 \sigma_{ad}^2} \quad (12)$$

gdzie:

$$c_1 = \frac{\partial v}{\partial \delta A} = \frac{1}{A_d} (v_s + n + \delta v_{xyz} + \delta v_{gen})$$

$$c_2 = \frac{\partial v}{\partial n} = \frac{A_r + \delta A}{A_d}$$

$$c_3 = \frac{\partial v}{\partial \delta_{xyz}} = \frac{A_r + \delta A}{A_d}$$

$$c_4 = \frac{\partial v}{\partial \delta_{gen}} = \frac{A_r + \delta A}{A_d}$$

$$c_5 = \frac{\partial v}{\partial \delta_{akon}} = 1$$

$$c_6 = \frac{\partial v}{\partial \delta_{ad}} = 1$$

Wartość oczekiwana każdej zmiennej losowej w wyrażeniu (9) jest równa 0. Po uwzględnieniu poprawki wzorcowania wzmocnienia można zapisać:

$$A_r - A_d = 0$$

Wtedy współczynniki wrażliwości mają przybliżone wartości:

$$c_1 = \frac{\partial v}{\partial \delta A} = \frac{v_s}{A_d} \quad c_2 = \frac{\partial v}{\partial n} = 1 \quad c_3 = \frac{\partial v}{\partial \delta_{xyz}} = 1$$

$$c_4 = \frac{\partial v}{\partial \delta_{gen}} = 1 \quad c_5 = \frac{\partial v}{\partial \delta_{akon}} = 1 \quad c_6 = \frac{\partial v}{\partial \delta_{ad}} = 1$$

Ostateczny wzór ma postać:

$$u(v) = \sqrt{\frac{v_s^2}{A_d^2} (\sigma_{Ar}^2 + \sigma_{Aw}^2) + \sigma_n^2 + \sigma_{xyz}^2 + \sigma_{gen}^2 + \sigma_{akon}^2 + \sigma_{ad}^2} \quad (13)$$

Powyższy wzór pozwala wyznaczyć wartość niepewności standardowej pomiaru wartości chwilowej napięcia przy założeniu, że składowe niepewności nie są skorelowane.

Budżet niepewności zestawiono w tab. 1.

TABELA 1
Budżet niepewności

Symbol	Estymata wielkości	Niepewność standardowa	Rozkład prawdopodobieństwa	Współczynnik wrażliwości	Udział niepewności
v_s	v_s	–	–	–	–
δA_r	0	$\sigma_r = \frac{a_r}{\sqrt{3}}$	prostokątny	$\frac{v_s}{A_d}$	$\frac{a_r v_s}{\sqrt{3} A_d}$
δA_w	0	$\sigma_w = \frac{U}{k}$	normalny	$\frac{v_s}{A_d}$	$\frac{U v_s}{k A_d}$
n	0	σ_n	normalny	1	σ_n
δv_{xyz}	0	$\sigma_{xyz} = \frac{a_{xyz}}{\sqrt{3}}$	prostokątny	1	$\frac{a_{xyz}}{\sqrt{3}}$
δv_{gen}	0	$\sigma_{gen} = c_g \sqrt{\sigma_{rg}^2 + \sigma_{wg}^2}$	normalny	1	$c_g \sqrt{\sigma_{rg}^2 + \sigma_{wg}^2}$
δv_{akon}	0	$\sigma_{akon} = \frac{a_k}{\sqrt{3}}$	prostokątny	1	$\frac{a_k}{\sqrt{3}}$
δv_{ad}	0	$\sigma_{ad} = \frac{q}{2\sqrt{3}}$	prostokątny	1	$\frac{q}{2\sqrt{3}}$
v	v_s				$u(v)$

Niepewność standardowa jest szacowana zgodnie z zależnością (12) i przyjętym typem rozkładu gęstości prawdopodobieństwa. Problem określenia przedziału ufności $U(v)$ dla przyjętego poziomu ufności $p(v)$ polega na znalezieniu współczynnika rozszerzenia k , który spełnia równanie:

$$\int_{v_s - ku(v)}^{v_s + ku(v)} g(v) dv \leq p(v) \quad (14)$$

Dla rozkładu normalnego zależność jest stabilizowana a dla najczęściej stosowanego poziomu ufności 0,95 wartość współczynnika rozszerzenia wynosi w przybliżeniu 2.

4.2. Model propagacji rozkładów

Prawo propagacji rozkładów gęstości prawdopodobieństwa [11] określa zasadę przekształcania rozkładów wielkości wejściowych w rozkład wyjściowy. Wielkości wejściowe opisane są funkcjami gęstości prawdopodobieństwa:

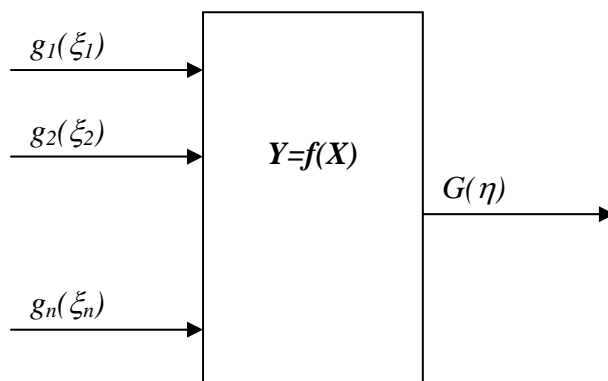
$$g(\xi) = (g_1(\xi_1), g_2(\xi_2), \dots, g_n(\xi_n))^T \quad (15)$$

Rozkłady wielkości wejściowych są częścią modelu pomiaru. Przyjęcie wybranego typu rozkładu powinno być uzasadnione badaniami statystycznymi lub analizą zjawisk. Zaleca się przyjmowanie rozkładu normalnego gdy występuje kilka wielkości wejściowych o zbliżonych wartościach rozrzutu. Rozkład równomierny jest dobrym modelem wielkości fizycznej, która zmienia się w znanych granicach.

Wielkość wyjściowa opisana jest wynikową funkcją gęstości prawdopodobieństwa. Jeśli funkcja modelująca pomiar jest nieliniowa to wyjściowa funkcja rozkładu może wykazywać asymetrię. Funkcja rozkładu gęstości prawdopodobieństwa wyznaczana jest bezpośrednio z równania (4). Metoda symulacyjna korzysta bezpośrednio z prawa propagacji rozkładów gęstości prawdopodobieństwa. Proces pomiaru jest symulowany przez wielokrotne losowanie wyników zgodnie z przyjętymi funkcjami rozkładów gęstości prawdopodobieństwa. Wyniki losowania przekształcane są zgodnie z równaniem pomiaru. Funkcja gęstości prawdopodobieństwa wielkości wyjściowej jest wyznaczana jako unormowany histogram zbioru otrzymanych wyników. Opracowanym w Insty-

tucie Elektrotechniki algorytm numerycznego wyznaczania niepewności [3] działa w następujących krokach:

- wprowadzenie funkcji modelującej pomiar,
- określenie typów rozkładów dla każdego z wejść,
- określenie wartości parametrów rozkładów,
- wybór parametrów symulacji,
- wyznaczenie wyjściowego rozkładu gęstości prawdopodobieństwa,
- określenie wartości wielkości wyjściowej,
- określenie przedziału ufności,
- określenie niepewności rozszerzonej pomiaru złożonego,
- wydruk raportu.



Rys. 4. Ilustracja prawa propagacji rozkładów

Proces obliczeniowy przebiega zgodnie z ustawionymi przez obsługę parametrami pomocniczymi. W wyniku działania algorytmu otrzymuje się rozkład gęstości prawdopodobieństwa, przedział ufności dla podanego poziomu ufności oraz pełną dokumentację graficzną w postaci raportu. Proces można powtarzać przy dobranej parametrach.

5. WYZNACZANIE PARAMETRÓW UŚREDNIONYCH SYGNAŁU NAPIĘCIOWEGO

Wstępne przetwarzanie sygnałów pomiarowych najczęściej polega na procedurach uśredniania w określonym oknie czasowym. Pojedyncza wartość chwilową napięcia wynosi:

$$v_{ij}^k = v_i^k(t_j) \quad (16)$$

gdzie indeksy oznaczają:

i -ty numer elektrody, $i = 1 \dots I$,

j -ty numer próbki w oknie czasowym, $j = 1 \dots J$,

k -ty numer konfiguracji pobudzenia, $k = 1 \dots K$.

Zmienna losowa (16) jest opisana rozkładem gęstości prawdopodobieństwa:

$$y_{ij}^k = g(v_{ij}^k) \quad (17)$$

Typ rozkładu został przyjęty arbitralnie na podstawie analizy wielkości mierzonych, wpływających i zakłócających. Parametry rozkładu zostały oszacowane metodą typu B. W oknie zarejestrowano J próbek. Wartości chwilowe próbek są uśredniane zgodnie z wzorem:

$$v_i^k = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J v_i^k(t_j) \quad (18)$$

Uśrednianie powoduje eliminację niektórych składowych losowych. Model pomiaru uwzględniający uśrednianie ma postać:

$$v = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \left(\frac{A_r + \delta A(t_j)}{A_d} (v_s(t_j) + n(t_j) + \delta v_{xyz} + \delta v_{gen}(t_j)) + \delta v_{akon}(t_j) + \delta v_{ad}(t_j) \right) \quad (19)$$

Z równania (13) po uwzględnieniu uśredniania otrzymano równanie niepewności:

$$u(v) = \sqrt{\frac{v_s^2}{A_d^2} (\sigma_{Ar}^2 + \sigma_{Aw}^2) + \frac{1}{J} \sigma_n^2 + \sigma_{xyz}^2 + \frac{1}{J} \sigma_{gen}^2 + \frac{1}{J} \sigma_{akon}^2 + \frac{1}{J} \sigma_{ad}^2} \quad (20)$$

Człony związane z czasem zanikają wraz ze wzrostem J . Wtedy równanie (20) można uprościć:

$$u(v) = \sqrt{\frac{v_s^2}{A_d^2} (\sigma_{Ar}^2 + \sigma_{Aw}^2) + \sigma_{xyz}^2 + \sigma_{rg}^2} \quad (21)$$

Wzór (21) określa najistotniejsze składowe niepewności standardowej, których wartości nie zależą od uśredniania. Źródłem tych składowych błędów są: rozdzielczość ustawiania wzmocnienia toru pomiarowego, błąd wzorcowania toru pomiarowego, błąd ustawienia elektrod na powierzchni obiektu, rozdzielczość ustawiania generowanej wartości pobudzenia.

6. ANALIZA WIELOWYMIAROWA OBSZARU UFNOŚCI

W poprzednim rozdziale analizowano parametry rozkładu pojedynczej wielkości fizycznej. Istotą pomiaru w tomografii impedancyjnej jest wielowymiarowość. Wynik pomiaru potencjałów na powierzchni obiektu jest wektorem losowym. Mimo, że składowe wektora są mierzone w pozornie niezależnych kanałach pomiarowych, w rzeczywistości tory pomiarowe wpływają na siebie przez sprzężenia układowe, wspólne pobudzenie i przetwarzanie analogowo-cyfrowe. Między rejestrowanymi wynikami pomiarów może wystąpić korelacja. Analiza wielowymiarowa pozwala na ilościowe oszacowanie tych zależności. Zgodnie z przyjętymi wcześniej oznaczeniami wektor danych pomiarowych jest wektorem losowym [6]:

$$\mathbf{v}^T = [v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_I] \quad (22)$$

Zmienna losowa wektorowa \mathbf{v} opisana jest wielowymiarową funkcją rozkładu gęstości prawdopodobieństwa:

$$y = g(\mathbf{v}) \quad (23)$$

Wartość oczekiwana losowej zmiennej wektorowej wyraża wzór:

$$E\{\mathbf{v}\} = \mathbf{v}_s \quad (24)$$

Macierz kowariancji losowej zmiennej wektorowej wyraża wzór:

$$\Sigma = [\sigma_i^k] \quad (25)$$

Zapisując wynik pomiaru wielkości wektorowej zgodnie z przyjętą kodyfikacją jako parę: wartość i niepewność:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_s \pm \mathbf{U}(\mathbf{v}) \quad (26)$$

Tak zapisany wynik przypisuje każdej składowej wektora pomiarowego niepewność rozszerzoną, która odpowiada przedziałowi ufności dla założonego poziomu ufności:

$$\mathbf{U}(\mathbf{v}) = \left[U_i^k \right]^{p=0.95} \quad (27)$$

Z przeprowadzonej wcześniej analizy rzeczywistych torów pomiaru napięć wynika, że można w przybliżeniu przyjąć rozkład normalny dla każdej składowej wektora napięć. Funkcja rozkładu łącznej gęstości prawdopodobieństwa ma postać:

$$g(\mathbf{v}) = \frac{1}{(2\pi)^{l/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_s)^T \Sigma^{-1}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_s)\right] \quad (28)$$

Wartość oczekiwana zmiennej wektorowej \mathbf{v} wynosi \mathbf{v}_s . Elementy diagonalne macierzy Σ są odpowiednio równe wariancom składowych zmiennej wektorowej, natomiast (k, l) element tej macierzy jest kowariancją między k -tą a l -tą składową wektora \mathbf{v} . Próba z wielowymiarowego rozkładu normalnego J elementowa złożona z wektorów J -elementowych tworzy macierz danych \mathbf{V} . Estymatorem największej wiarygodności wektora wartości oczekiwanych jest wektor średnich próbkowych:

$$\hat{\mathbf{v}}_s = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \mathbf{v}_j \quad (29)$$

Estymatorem nieobciążonym macierzy Σ jest próbkowa macierz kowariancji \mathbf{S} :

$$\mathbf{S} = \frac{1}{J-1} \sum_{j=1}^J (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_s)(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_s)^T \quad (30)$$

Powyższe estymatory są zmiennymi losowymi. Wektor średnich próbkowych z J niezależnych obserwacji z wielowymiarowego rozkładu normalnego ma także wielowymiarowy rozkład normalny z wektorem wartości oczekiwanych \mathbf{v}_s oraz macierzą kowariancji Σ/J . Próbkowa macierz kowariancji jest zmienną losową o rozkładzie Wisharta $W(E, \Sigma, J)$, który jest uogólnieniem wielowymiarowym rozkładu chi-kwadrat z n stopniami swobody. Wyznaczanie rozkładu konduktywności w badanym obiekcie polega na pomiarze składowych wektora potencjałów, znalezieniu macierzy odwrotnej do \mathbf{A}_γ i obliczeniu:

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{A}_\gamma^{-1} \mathbf{v} \quad (31)$$

Gęstość prawdopodobieństwa $g(\mathbf{v})$ transformuje się w gęstość prawdopodobieństwa $f(\boldsymbol{\gamma})$ według ogólnego wzoru:

$$f(\boldsymbol{\gamma}) = \mathbf{J}(\mathbf{v} / \boldsymbol{\gamma}) g(\mathbf{v}) \quad (32)$$

Występujący we wzorze Jakobian transformacji wyraża się zależnością:

$$\mathbf{J}(\mathbf{v} / \boldsymbol{\gamma}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial v_2}{\partial \gamma_1} & \dots & \frac{\partial v_J}{\partial \gamma_1} \\ \frac{\partial v_1}{\partial \gamma_2} & \frac{\partial v_2}{\partial \gamma_2} & \dots & \frac{\partial v_J}{\partial \gamma_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial v_1}{\partial \gamma_J} & \frac{\partial v_2}{\partial \gamma_J} & \dots & \frac{\partial v_J}{\partial \gamma_J} \end{bmatrix} \quad (33)$$

Dla transformacji liniowej lub linearyzowanej oraz w przypadku, gdy wielowymiarowa zmienna \mathbf{v} ma rozkład normalny przekształcony rozkład ma postać:

$$f(\boldsymbol{\gamma}) = \frac{1}{(2\pi)^{J/2} |\mathbf{B}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{B}^T|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{v} - \mathbf{B}\mathbf{v}_s)^T (\mathbf{B}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{B}^T)^{-1} (\mathbf{v} - \mathbf{B}\mathbf{v}_s)\right] \quad (34)$$

gdzie

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}_\gamma^{-1} \quad (35)$$

Wykładnik wyrażenia przybierając wartość stałą opisuje hiperelipsoidę ufności. Dla założonego poziomu ufności można wyznaczyć hiperelipsoidę ufności w środku której znajduje się wartość γ_s .

7. PROPAGACJA BŁĘDÓW DANYCH W ALGORYTMACH NUMERYCZNYCH

Wpływ błędów danych pomiarowych oraz zaburzeń przekształcenia na błąd rozwiązania można oszacować w przybliżeniu inną metodą. Niepewność danych powoduje zaburzenie rozwiązania równania (1). Wprowadzając zmienną błędów danych pomiarowych otrzymuje się równanie [5]:

$$\mathbf{v} + \delta\mathbf{v} = \mathbf{A}_\gamma (\gamma + \delta\gamma) \quad (36)$$

Uwzględniając (1) i (36) otrzymano:

$$\mathbf{A}_\gamma^{-1} \delta\mathbf{v} = \delta\gamma \quad (37)$$

dla dowolnej normy wektora i indukowanej normy macierzy prawdziwe są zależności:

$$\|\mathbf{A}_\gamma^{-1}\| \|\delta\mathbf{v}\| \geq \|\delta\gamma\| \quad (38)$$

$$\|\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{A}_\gamma\| \|\gamma\| \quad (39)$$

Po przekształceniach otrzymuje się oszacowanie względnego błędu granicznego wektora wynikowego:

$$\|\mathbf{A}_\gamma^{-1}\| \|\mathbf{A}_\gamma\| \frac{\|\delta\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} \geq \frac{\|\delta\gamma\|}{\|\gamma\|} \quad (40)$$

Przyjmując, że K jest wskaźnikiem uwarunkowania równania (36):

$$K = \left\| \mathbf{A}_\gamma^{-1} \right\| \left\| \mathbf{A}_\gamma \right\| \quad (41)$$

i uwzględniając fakt, że macierz \mathbf{A} otrzymywana jest jako wynik obliczeń numerycznych na podstawie danych pomiarowych o ograniczonej dokładności wcześniej otrzymanych to można napisać []:

$$K \frac{\|\delta \mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} + \frac{K \frac{\|\delta \mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|}}{1 - K \frac{\|\delta \mathbf{A}_\gamma\|}{\|\mathbf{A}_\gamma\|}} \geq \frac{\|\delta \gamma\|}{\|\gamma\|} \quad (42)$$

Przyjmując odpowiednie oznaczenia dla względnych błędów granicznych:

$$\delta \mathbf{v}_w = \frac{\|\delta \mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} \quad \delta \mathbf{A}_w = \frac{\|\delta \mathbf{A}_\gamma\|}{\|\mathbf{A}_\gamma\|} \quad \delta \gamma_w = \frac{\|\delta \gamma\|}{\|\gamma\|} \quad (43)$$

otrzymuje się zależność granicznego błędu względnego rozkładu konduktywności od błędów względnych danych pomiarowych, macierzy przekształcenia i uwarunkowania równania:

$$K \delta \mathbf{v}_w + \frac{K \delta \mathbf{v}_w}{1 - K \delta \mathbf{A}_w} \geq \delta \gamma_w \quad (44)$$

Nierówność powyższa pozwala oszacować z góry maksymalny błąd względny wektora konduktywności, który opisuje rozkład konduktywności wewnątrz obiektu, jaki może wystąpić przy zakładanym względnym błędzie maksymalnym wektora napięć mierzonych oraz rozrzucie wartości macierzy przekształcenia. Przy projektowaniu algorytmu numerycznego nierówność pozwala bardziej na zorientowanie się w rozkładzie możliwości niż w rozkładzie gęstości prawdopodobieństwa.

8. UWAGI KOŃCOWE

Analiza metrologiczna torów pomiarowych systemu tomografii impedancyjnej prowadzi do budżetu niepewności dla każdego kanału pomiarowego co pozwala oszacować wielowymiarowy rozkład gęstości prawdopodobieństwa i wyznaczyć obszar ufności jako hiperelipsoidę ufności. Wynik obliczeń składa się z wektora konduktywności i hiperelipsoidę ufności. Algorytm postępowania można przedstawić w punktach:

- określenie równania pomiaru,
- określenie zasady pomiarowej, wielkości mierzonych i wielkości wpływających,
- identyfikacja źródeł niepewności, dla każdego etapu procesu i dla każdego parametru,
- kwantowanie składników niepewności, przybliżone określenie niepewności na każdym etapie i jeśli to możliwe określenie sposobów ich usunięcia,
- estymacja odchyłeń standardowych, oszacowanie wszystkich niepewności cząstkowych jako odchyłeń standardowych,
- określenie łącznej gęstości prawdopodobieństwa dla wektora pomiarowego v ,
- wyznaczenie łącznej gęstości prawdopodobieństwa dla wektora γ ,
- wyznaczenie hiperelipsoidy ufności przy założonym poziomie ufności w środku której znajduje się wartość γ_s .
- wynik pomiaru rozkładu składa się z wektora γ_s oraz równania hiperboloidy ufności.

Otrzymany wielowymiarowy rozkład gęstości prawdopodobieństwa pozwala także oszacować rozkład jednowymiarowy prawdopodobieństwa konduktywności dla każdego punktu przestrzeni wewnętrznej obiektu. Prezentowany obraz trójwymiarowy rozkładu konduktywności w obiekcie jest pełniejszy, gdyż zawiera informacje o wartości wielkości fizycznej oraz jej niepewności. Praca jest prowadzona w ramach grantu 4T07E04529 „Nowa tomograficzna metoda oceny stopnia zawilgocenia murów ceglanych w obiektach budowlanych”. Projekt badawczy jest realizowany w Instytucie Budownictwa Politechniki Wrocławskiej i w Instytucie Elektrotechniki w Warszawie [1] [9] [12] i zmierza do opracowania urządzeń tomograficznych do pomiaru rozkładu przestrzennego wilgotności w obiektach budowlanych.

LITERATURA

1. Berowski P., Filipowicz S.F Sikora J., Wójtowicz S.: Determining location of moisture area of the wall by 3d electrical impedance tomography, 4th World Congress on Industrial Process Tomography, Aizu, Japan, 2005, pp. 214-220.
2. Biernat K., Nita K., Wójtowicz S.: „System akwizycji danych pomiarowych tomografu impedancyjnego”, str. 287-294, 34 Krajowa Konferencja Badań Nieniszczących, Zakopane – Kościelisko 2005r.
3. Biernat K., Wójtowicz S.: „Wyznaczanie niepewności pomiarów złożonych metodą symulacyjną”, str. 281-286, 34 Krajowa Konferencja Badań Nieniszczących, Zakopane – Kościelisko 2005r.
4. Filipowicz S.F., Rymarczyk T.: Tomografia impedancyjna. BEL Studio, Warszawa, 2003.
5. Fortuna Z., Macukow B., Wąsowski J.: Metody numeryczne, WNT, Warszawa, 1982.
6. Morrison D., F.: Wielowymiarowa analiza statystyczna. PWN, Warszawa, 1990.
7. Nita K., Wójtowicz S., Filipowicz Z., Filipowicz S. F.: Multichannel measuring setups in applying to impedanc tomography. 29-th International Conference on Fundamentals of Electrotechnics and Circuit Theory, Gliwice-Ustroń, May 24-27, 2006, pp. 459-462
8. Sikora J.: Algorytmy numeryczne w tomografii impedancyjnej i wiropądowej. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 2000.
9. Sikora J., Wójtowicz S., Nita K., Filipowicz S.F., Biernat K.:The System for Impedance Tomography for Measuring the Distribution of Moisture in Walls, 7th International Workshop “Computational Problems of Electrical Engineering, Odessa, Ukraina, 28-31.08.2006.
10. Wójtowicz S.: Modelowanie wpływu czynników subiektywnych na niepewność pomiaru przy ocenie obrazów radiograficznych. Krajowa Konferencja Badań Radiograficznych POPÓW-2004, Politechnika Poznańska, PTBNiDT SIMP, 20-22 września 2004, Popów. Materiały konferencyjne str.125-130.
11. Wójtowicz S., Biernat K., Cichecki A.: Szacowanie niepewności pomiaru metodą symulacyjną. KKBN 33, Licheń, 26-28 października 2004.
12. Wójtowicz S., Biernat K., Grzywacz T., Sikora J. Hoła J.: Rozproszony system akwizycji i przetwarzania danych w tomografii impedancyjnej, 35 Krajowa Konferencja Badań Nieniszczących, Szczyrk, 24 - 26 października 2006.
13. Wójtowicz S., Sikora J.: Metrological Analysis of Data Acquisition System for Impedance Tomography, PROCTOM 2006, 4th International Symposium on Process Tomography, Warszawa, 14-15 września 2006.
14. Wójtowicz S., Wojtowicz B., Biernat K.: Niepewność pomiarów w badaniach laboratoryjnych. w pracy zbiorowej pt.: Badania Materiałów i Konstrukcji Inżynierskich pod redakcją Mieczysława Kamińskiego, Andrzeja Kmity, Aleksego Łodo, Jarosława Michałka. Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne, Wrocław 2004.

Rękopis dostarczono, dnia 20.02.2007 r.

Opiniował: prof. dr hab. inż. Antoni Cieśla

ANALYSIS OF METROLOGICAL PARAMETERS
OF MEASUREMENT SYSTEM
FOR IMPEDANCE TOMOGRAPHY

Stefan WÓJTOWICZ

ABSTRACT *The metrological analysis of measuring chain enable to estimate a confidence interval of measured quantity as a consequence of confidence intervals for spatial distribution of impedance parameters. In the paper, the structure of measurement system, the probabilistic model of the measurement in multi-port system and the analysis of error components are presented. To estimate the confidence intervals a method of confidence interval propagation was applied as well this method with a method of probability density function propagation were compared.*