

Maciej PAŃCZYK
Jan SIKORA

MODEL OBLICZENIOWY METODY ELEMENTÓW BRZEGOWYCH Z ELEMENTAMI NIESKOŃCZONYMI

STRESZCZENIE *W praktycznych zastosowaniach metody elementów brzegowych (MEB) często spotyka się przypadki obiektów rozległych bądź też takich, dla których nie ma możliwości określenia czy zmierzenia warunków brzegowych na niedostępnych krańcach. Najczęściej obcina się wówczas analizowany obszar w takiej odległości od obiektu, w której przyjmujemy, że badane wartości pola praktycznie zanikają. Powoduje to jednak rozbudowę siatki elementów i zwiększenie błędów. Wprowadzenie do klasycznej MEB elementów nieskończonych pozwala na eliminację tych niedogodności. Elementy nieskończone komplikują jednak model obliczeniowy. W niniejszym artykule autorzy pragną omówić zmiany i specyfikę towarzyszące wprowadzeniu elementów nieskończonych do MEB. Zaproponowany będzie również możliwie prosty trójwymiarowy model z dziedziny elektrostatyki umożliwiający prześledzenie i implementację programową MEB z elementami nieskończonymi.*

Słowa kluczowe: *metoda elementów brzegowych, MEB, elementy nieskończone, analiza trójwymiarowa*

mgr inż. Maciej PAŃCZYK
e-mail: maciejp@pluton.pol.lublin.pl

Instytut Informatyki
Politechnika Lubelska

prof. dr hab. inż. Jan SIKORA
e-mail: sik@nov.iem.pw.edu.pl
Zakład Elektrotechniki Teoretycznej
i Systemów Informacyjno Pomiarowych
Politechnika Warszawska

1. WSTĘP

Metoda elementów brzegowych podobnie jak metoda elementów skończonych jest powszechnie stosowanym narzędziem obliczeniowym w zagadnieniach inżynierskich. Praktyczne zastosowania znalazła ona przykładowo w różnego rodzaju przepływomierzach. Z uwagi na fakt dokonywania pomiarów jedynie na powierzchni obiektu atrakcyjne jest jej zastosowanie w medycynie. Wadami MEB w tej dziedzinie są nieinwazyjność i szacowane niskie koszty budowy urządzeń. Niestety pod względem dokładności oparta o MEB tomografia impedancyjna i optyczna znacznie ustępuje klasycznej tomografii rentgenowskiej i rezonansu magnetycznego. Skomplikowane i czasochłonne obliczeniowo są też równania zjawisk fizycznych pozwalających na skonstruowanie obrazu niedostępnego wnętrza obiektu. Pominięcie obszarów nieskończonych wprowadza dodatkowe błędy. Klasycznie unika się ich poprzez rozszerzenie badanego obiektu o dodanie fragmentu, w którym uznajemy, że poszukiwana wielkość fizyczna praktycznie zanika. To z kolei powoduje rozrost układu równań i niepewność przyjętych na takiej granicy warunków brzegowych.

Tematem artykułu będą problemy związane z implementacją obliczeniową elementów nieskończonych opartych na czworokątnych, ośmiu-węzłowych, izoparametrycznych elementach brzegowych. Model obliczeniowy zostanie prześledzony stopniowo od klasycznego elementu czworokątnego do elementu nieskończonego. Zaproponowany będzie również model weryfikacyjny o znanym rozwiązaniu analitycznym zawierający wszystkie omawiane problemy.

2. TEORIA STANDARDOWEGO ELEMENTU BRZEGOWEGO CZWOROKĄTNEGO IZOPARAMETRYCZNEGO

Przyjmując za punkt wyjściowy rozważań równanie bazowe MEB w postaci [2, 18]:

$$c(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}) + \int_S \frac{\partial G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{\partial n} \Phi(\mathbf{r}') dS = \int_S G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}')}{\partial n} dS \quad (1)$$

gdzie G oznacza funkcję Greena [3].

Przedstawimy na początku schemat rozwiązania stosowany dla klasycznych elementów brzegowych [4, 9, 13, 14]. Przejście do postaci macierzowej (4) obliczanej numerycznie następuje w kilku etapach. Całka po powierzchni $S(x, y, z)$ zostaje zamieniona na sumowanie po wszystkich M elementach brzegowych z przejściem na całkę oznaczoną w granicach od -1 do $+1$ w lokalnym układzie współrzędnych ξ_1, ξ_2, ξ_3 .

$$c(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}) + \sum_{i=0}^{M-1} \int_{-1}^{+1} \Phi(\mathbf{r}') \frac{\partial G(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{\partial n} J(\xi) d\xi = \sum_{i=0}^{M-1} \int_{-1}^{+1} \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}')}{\partial n} G(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) J(\xi) d\xi \quad (2)$$

$$c(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}) + \sum_{i=0}^{M-1} \Phi(\mathbf{r}') A_{i,j}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{i=0}^{M-1} \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}')}{\partial n} B_{i,j}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (3)$$

$$[\mathbf{A}][\Phi] = [\mathbf{B}] \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right] \quad (4)$$

Macierze $[\mathbf{A}]$ i $[\mathbf{B}]$ odwzorowują odpowiednio całki pochodnej normalnej $\partial G(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)/\partial n$ i $G(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)$. Człon $c(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r})$ uwzględniony jest w macierzy $[\mathbf{A}]$.

Jakobian J ze wzoru (2) przekształcenia współrzędnych globalnych x, y, z elementu brzegowego (powierzchniowego) do lokalnych krzywoliniowych ξ_1, ξ_2, ξ_3 przedstawia się następująco:

$$\begin{bmatrix} \frac{d\Phi}{d\xi_1} \\ \frac{d\Phi}{d\xi_2} \\ \frac{d\Phi}{d\xi_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dx}{d\xi_1} & \frac{dy}{d\xi_1} & \frac{dz}{d\xi_1} \\ \frac{dx}{d\xi_2} & \frac{dy}{d\xi_2} & \frac{dz}{d\xi_2} \\ \frac{dx}{d\xi_3} & \frac{dy}{d\xi_3} & \frac{dz}{d\xi_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{d\Phi}{dx} \\ \frac{d\Phi}{dy} \\ \frac{d\Phi}{dz} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Różniczka powierzchni dS ze wzoru (1) wyniesie:

$$dS = \mathbf{n} d\xi_1 d\xi_2 = \left| \frac{d\mathbf{r}}{d\xi_1} \times \frac{d\mathbf{r}}{d\xi_2} \right| = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} \quad (6)$$

przy czym:

$$n_x = \frac{dy}{d\xi_1} \frac{dz}{d\xi_2} - \frac{dy}{d\xi_2} \frac{dz}{d\xi_1}, \quad n_y = \frac{dz}{d\xi_1} \frac{dx}{d\xi_2} - \frac{dz}{d\xi_2} \frac{dx}{d\xi_1}, \quad n_z = \frac{dx}{d\xi_1} \frac{dy}{d\xi_2} - \frac{dx}{d\xi_2} \frac{dy}{d\xi_1} \quad (7)$$

Zależność pomiędzy globalnymi współrzędnymi punktu a współrzędnymi i numeracją węzłów danego elementu określona jest poprzez funkcje kształtu N . W przypadku elementu czworokątnego ośmiowęzłowego funkcje kształtu pozwalające na transformację do lokalnego układu współrzędnych w granicach od -1 do $+1$ przedstawiają się następująco:

$$\begin{aligned} N_0(\xi_1, \xi_2) &= -(1 - \xi_1)(1 - \xi_2)(1 + \xi_1 + \xi_2)/4, & N_1(\xi_1, \xi_2) &= (1 - \xi_1^2)(1 - \xi_2)/2 \\ N_2(\xi_1, \xi_2) &= -(1 + \xi_1)(1 - \xi_2)(1 - \xi_1 + \xi_2)/4, & N_3(\xi_1, \xi_2) &= (1 + \xi_1)(1 - \xi_2^2)/2 \\ N_4(\xi_1, \xi_2) &= -(1 + \xi_1)(1 + \xi_2)(1 - \xi_1 - \xi_2)/4, & N_5(\xi_1, \xi_2) &= (1 - \xi_1^2)(1 + \xi_2)/2 \\ N_6(\xi_1, \xi_2) &= -(1 - \xi_1)(1 + \xi_2)(1 + \xi_1 - \xi_2)/4, & N_7(\xi_1, \xi_2) &= (1 - \xi_1)(1 - \xi_2^2)/2 \end{aligned} \quad (8)$$

Współrzędne globalne x, y, z i lokalne ξ_1, ξ_2, ξ_3 węzłów powiązane są poprzez funkcje kształtu zależnością:

$$x = \sum_{i=0}^7 N_i x_i, \quad y = \sum_{i=0}^7 N_i y_i, \quad z = \sum_{i=0}^7 N_i z_i \quad (9)$$

W elemencie izoparametrycznym takie same funkcje kształtu użyte zostaną również do interpolacji własności fizycznych wewnątrz obiektu.

Analiza obiektów trójwymiarowych metodą elementów brzegowych wymaga obliczenia całek funkcji na powierzchni elementów skończonych. Całkowanie numeryczne elementów czworokątnych można przedstawić następująco:

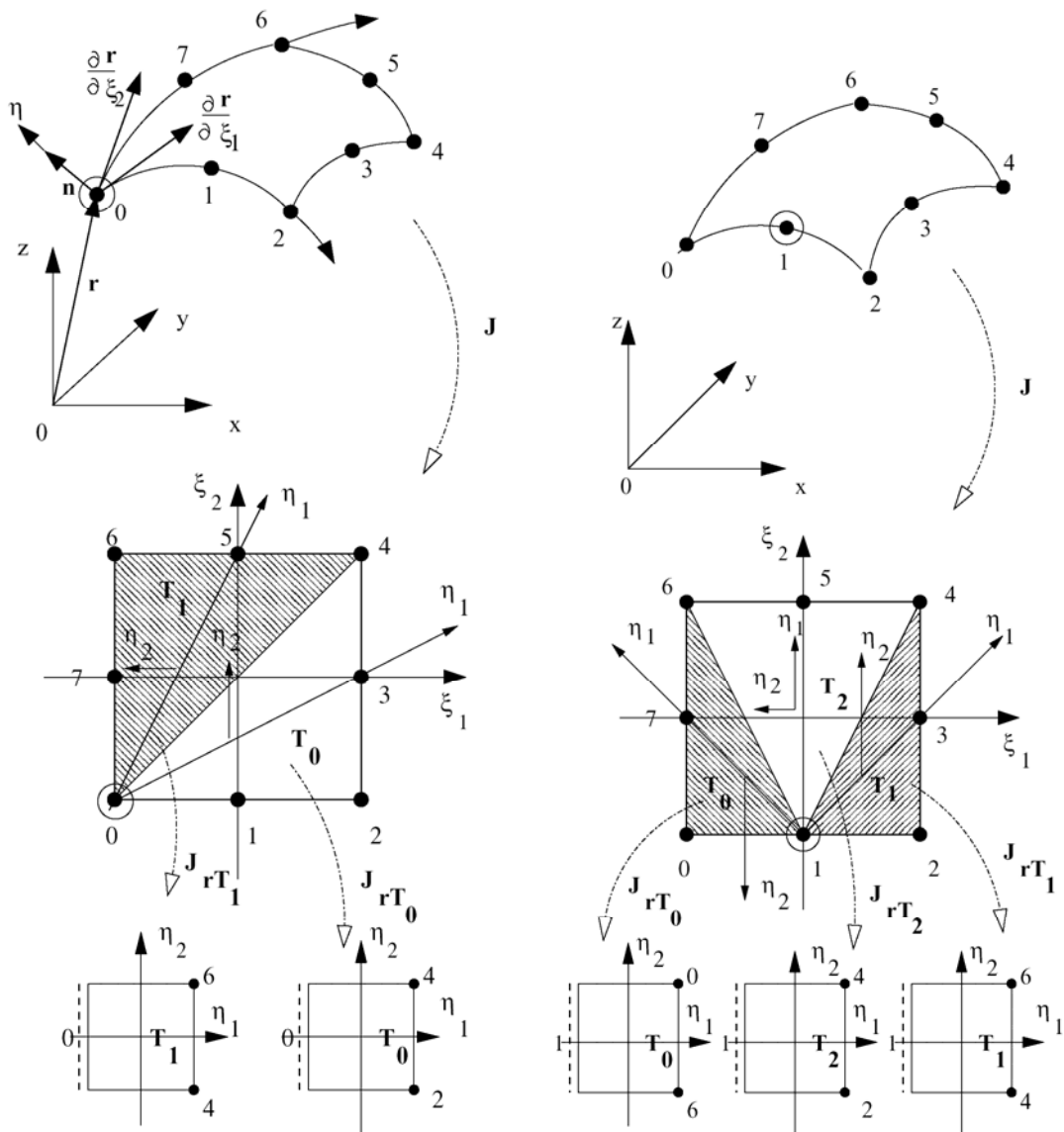
$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n f(\xi_{1j}, \xi_{2i}) w_j \right) w_i \quad (10)$$

Wartości punktów całkowania Gaussa i współczynników wag są opisane w literaturze np. [1]. Przykładowo najczęściej wykorzystywane wartości przedstawia tab. 1.

TABELA 1
Jednowymiarowa kwadratura Gaussa

n	i	ξ_i	w_i
4	1	-0.86113631159405257522	0.34785484513745385737
	2	-0.33998104358485626480	0.65214515486254614263
	3	+0.33998104358485626480	0.65214515486254614263
	4	+0.86113631159405257522	0.34785484513745385737
6	1	-0.93246951420315202781	0.17132449237917034504
	2	-0.66120938646626451366	0.36076157304813860757
	3	-0.23861918608319690863	0.46791393457269104739
	4	+0.23861918608319690863	0.46791393457269104739
	5	+0.66120938646626451366	0.36076157304813860757
	6	+0.93246951420315202781	0.17132449237917034504
10	1	-0.97390652851717172008	0.06667134430868813759
	2	-0.86506336668898451073	0.14945134915058059315
	3	-0.67940956829902440623	0.21908636251598204400
	4	-0.43339539412924719080	0.26926671930999635509
	5	-0.14887433898163121089	0.29552422471475287017
	6	+0.14887433898163121089	0.29552422471475287017
	7	+0.43339539412924719080	0.26926671930999635509
	8	+0.67940956829902440623	0.21908636251598204400
	9	+0.86506336668898451073	0.14945134915058059315
	10	+0.97390652851717172008	0.06667134430868813759

W przypadku, gdy punkt źródła znajduje się w pobliżu lub pokrywa się z węzłem elementu pojawia się osobliwość wymagająca specjalnego rozwiązania. Jako jedna z metod rozwiązania problemu całek osobliwych dla takich przypadków przedstawiona zostanie metoda regularyzacji [2]. Metoda regularyzacji polega na przekształceniu czworokątnego elementu zawierającego osobliwość w 2 lub 3 elementy trójkątne a następnie przekształcenie powstałych elementów trójkątnych w odpowiadające im elementy kwadratowe w każdym, z których jeden z boków odpowiada „rozciągniętemu” punkto- wi osobliwemu jak to pokazano na rys.1.



Rys. 1. Regularyzacja: po lewej punkt osobliwy znajduje się w węźle narożnym 0, po prawej w węźle środkowym 1

Zasady transformacji obszarów trójkątnych do kwadratowych przedstawione zostaną dla 2 wybranych węzłów 0 i 1. Węzeł 0:

Trójkąt T_0 :

$$\xi_1 = \eta_1, \quad \xi_2 = \frac{-1 + \eta_1 + (1 + \eta_1)\eta_2}{2} \tag{11}$$

Trójkąt T_1 :

$$\xi_1 = \frac{(-1 + \eta_1 - (1 + \eta_1)\eta_2)}{2}, \quad \xi_2 = \eta_1 \quad (12)$$

Jakobian regularyzacji wyniesie:

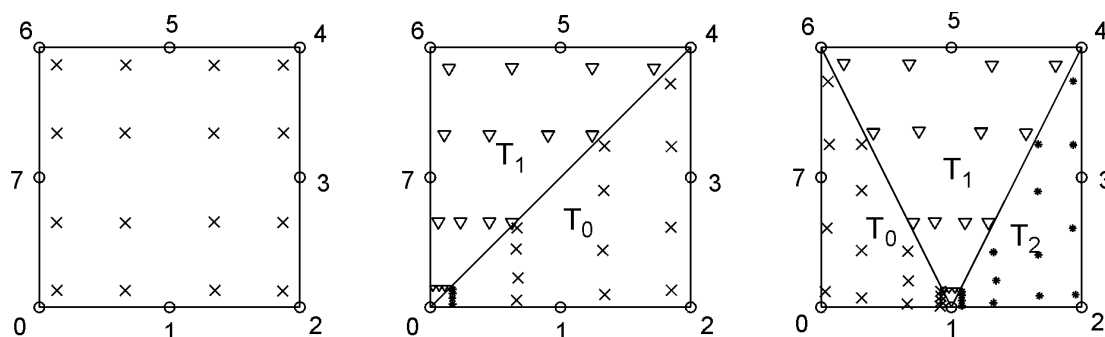
$$J_r = \begin{vmatrix} \frac{d\xi_1}{d\eta_1} & \frac{d\xi_1}{d\eta_2} \\ \frac{d\xi_2}{d\eta_1} & \frac{d\xi_2}{d\eta_2} \end{vmatrix} = \frac{(1 + \eta_1)}{2} \quad (13)$$

Węzeł 1 kolejno trójkąty T_0 , T_1 , T_2 :

$$\xi_{1T_0} = -\frac{(1 + \eta_1)}{2}, \quad \xi_{2T_0} = \frac{(-1 + \eta_1 - (1 + \eta_1)\eta_2)}{2}, \quad J_{rT_0} = \frac{(1 + \eta_1)}{4} \quad (14)$$

$$\xi_{1T_1} = \frac{(1 + \eta_1)}{2}, \quad \xi_{2T_1} = \frac{(-1 + \eta_1 + (1 + \eta_1)\eta_2)}{2}, \quad J_{rT_1} = \frac{(1 + \eta_1)}{4} \quad (15)$$

$$\xi_{1T_2} = -\frac{(1 + \eta_1)\eta_2}{2}, \quad \xi_{2T_2} = \eta_1, \quad J_{rT_2} = \frac{(1 + \eta_1)}{2} \quad (16)$$



Rys. 2. Koncentracja punktów Gaussa wokół punktów osobliwych

3. UOGÓLNIENIE TEORII ELEMENTU BRZEGOWEGO NA ELEMENT BRZEGOWY NIESKOŃCZONY

Stosując nieskończone elementy brzegowe użyjemy iloczynu standardowych jednowymiarowych funkcji kształtu (20) i przekształcenia (17) pozwalającego na osiągnięcie w kierunku ξ_2 wartości z zakresu od -1 do ∞ zamiast od -1 do $+1$ [17, 3, 11].

$$\xi_1 = \eta_1, \quad \xi_2 = \frac{1+3\eta_2}{\eta_2-1} \quad (17)$$

Jakobian przekształcenia wynosi:

$$J^\infty(\eta_1, \eta_2) = \frac{\partial(\xi_1, \xi_2)}{\partial\eta_1\partial\eta_2} = \frac{\partial\xi_1}{\partial\eta_1} \frac{\partial\xi_2}{\partial\eta_2} - \frac{\partial\xi_2}{\partial\eta_1} \frac{\partial\xi_1}{\partial\eta_2} = \frac{\partial\xi_2}{\partial\eta_2} = \frac{-4}{(\eta_2-1)^2} \quad (18)$$

Geometria dwuwymiarowego elementu jak z prawej strony rys. 3 zdefiniowana jest jako [10, 15, 19]:

$$x = \sum N_K^{1D}(\xi_1) N_K^\infty(\xi_2) x_K^e \quad (19)$$

gdzie x jest położeniem punktu we współrzędnych wewnętrznych ξ_1, ξ_2 , x_K jest wektorem zawierającym współrzędne węzła K .

Standardowe jednowymiarowe funkcje kształtu N^{1D} wraz z transformacją do nieskończoności N^∞ określone są poprzez zależności:

$$\begin{aligned} N_0^{1D}(\xi_1(\eta_1)) &= N_6^{1D}(\xi_1(\eta_1)) = N_7^{1D}(\xi_1(\eta_1)) = \frac{1}{2} \eta_1(\eta_1 - 1) \\ N_1^{1D}(\xi_1(\eta_1)) &= N_5^{1D}(\xi_1(\eta_1)) = 1 - \eta_1^2 \\ N_2^{1D}(\xi_1(\eta_1)) &= N_3^{1D}(\xi_1(\eta_1)) = N_4^{1D}(\xi_1(\eta_1)) = \frac{1}{2} \eta_1(\eta_1 + 1) \end{aligned} \quad (20)$$

$$N_{0 \neq 7}^\infty(\xi_2(\eta_2)) = \frac{1+3\eta_2}{\eta_2-1} \quad (21)$$

Jako złożenie powyższych zależności otrzymujemy funkcje kształtu dla poszczególnych węzłów elementów nieskończonych (dla których jeden z boków "ucieka" do nieskończoności w kierunku ξ_2):

$$\begin{aligned}
{}^{\infty}N_0 = {}^{\infty}N_6 = {}^{\infty}N_7 &= \frac{1}{2}\eta_1(\eta_1 - 1) \frac{1 + 3\eta_2}{\eta_2 - 1} \\
{}^{\infty}N_1 = {}^{\infty}N_5 &= (1 - \eta_1^2) \frac{1 + 3\eta_2}{\eta_2 - 1} \\
{}^{\infty}N_2 = {}^{\infty}N_3 = {}^{\infty}N_4 &= \frac{1}{2}\eta_1(\eta_1 + 1) \frac{1 + 3\eta_2}{\eta_2 - 1}
\end{aligned} \tag{22}$$

Analogicznie dla elementów narożnych rozciągających się do nieskończoności w obu kierunkach ξ_1 i ξ_2 zastosowana zostanie transformacja:

$$\xi_1 = \frac{1 + 3\eta_1}{\eta_1 - 1}, \quad \xi_2 = \frac{1 + 3\eta_2}{\eta_2 - 1} \tag{23}$$

Jakobiany przekształceń określone są jak poprzednio zależnością:

$$J^{\infty}(\eta_1, \eta_2) = \frac{\partial(\xi_1, \xi_2)}{\partial\eta_1\partial\eta_2} \tag{24}$$

Zmiana granic całkowania przedstawiona jest poniżej:

$$\int_{-1-1}^{\infty+1} \int_{-1-1}^{\infty+1} f(y, x) d\xi_1 d\xi_2 = \int_{-1-1}^{\infty+1} \int_{-1-1}^{\infty+1} f(y, x) J^{\infty}(\eta_1, \eta_2) d\eta_1 d\eta_2 \tag{25}$$

Generalnie elementy brzegowe muszą być określone na całej powierzchni pół nieskończonego obszaru. Jednakże ta nieograniczona powierzchnia w dużej odległości spełnia warunek brzegowy Neumanna, co powoduje, że konieczne jest jedynie zamodelowanie funkcji stanu do nieskończoności. Postać funkcji stanu w nieskończoności:

$$\Phi(\xi_1, \xi_2) = D \Phi(\xi_1, -1) = \sum_{i=0}^2 M_i \Phi_i \tag{26}$$

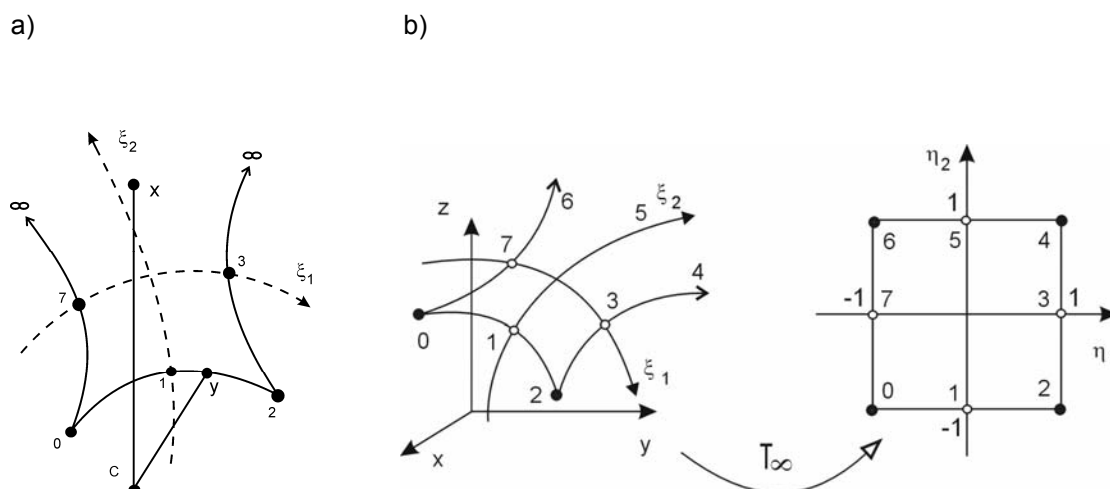
gdzie: $M_i = N_i D$,

Φ_i – wartości funkcji stanu w węźle i ,

$D = r_0 / r$ – funkcja zaniku,

r_0 – odległość od punktu źródła y (na linii $\xi_2 = -1$) do dowolnego punktu odniesienia c ,

r – odległość do punktu obserwacji x (o tej samej wartości ξ_1).



Rys. 3. Zasada transformacji:
a) element nieskończony, b) jego transformacja

Po podziale badanego obszaru na obszar skończony S_F i obszar nieskończony S_I , uwzględnieniu funkcji zaniku oraz warunków brzegowych Dirichleta i Neumanna na powierzchni nieskończonej równanie bazowe MEB przyjmie po zdyskretyzowaniu postać:

$$\begin{aligned}
 c_{ij}(x, y)\Phi_i(x, y) + \sum_M \sum_{\alpha=0}^7 \Phi_i^\alpha \int_{\Delta S_F} A_{ij} N_\alpha dS + \sum_M \sum_{\alpha=0}^2 \Phi_i^\alpha \int_{\Delta S_I} A_{ij} M_\alpha dS = \\
 = \sum_M \sum_{\alpha=0}^7 \frac{\partial \Phi_i^\alpha}{\partial n} \int_{\Delta S_F} B_{ij} N_\alpha dS + \sum_M \sum_{\alpha=0}^2 \frac{\partial \Phi_i^\alpha}{\partial n} \int_{\Delta S_I} B_{ij} M_\alpha dS
 \end{aligned} \tag{27}$$

Należy zwrócić uwagę, że w elementach nieskończonych sumowanie następuje jedynie po węzłach przylegających do obszaru skończonego.

Elementy nieskończone wprowadzają do równania bazowego nieokreśloności w poszczególnych etapach. Aby to uwidocznilić przepisujemy powyższe równanie tak, aby widoczne były wszystkie jego składniki i wprowadzone transformacje:

$$\begin{aligned}
& c\Phi + \sum_{i=0}^7 \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \Phi \frac{\partial G}{\partial n} J^{3D}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 + \\
& + \sum_{i=0}^2 \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \Phi \frac{\partial G}{\partial n} J^{1D}(\xi_1, \xi_2) J^\infty(\xi_1, \xi_2) D_1(\xi_1) D_2(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = \\
& = \sum_{i=0}^7 \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{\partial \Phi}{\partial n} G J^{3D}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 + \\
& + \sum_{i=0}^2 \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{\partial \Phi}{\partial n} G J^{1D}(\xi_1, \xi_2) J^\infty(\xi_1, \xi_2) D_1(\xi_1) D_2(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2
\end{aligned} \tag{28}$$

Przykładowo dla zagadnienia Laplace'a funkcja Greena w przestrzeni 3D przedstawia się następująco:

$$G(r) = \frac{1}{4\pi r} \tag{29}$$

Przy $r \rightarrow \infty$ wprowadzone poprzez elementy nieskończone nieoznaczoności dla potencjału warstwy pojedynczej:

$$G \in o\left(\frac{1}{r}\right), \quad \Phi \in o(r), \quad D \in o\left(\frac{1}{r}\right), \quad J^\infty \in o(r) \tag{30}$$

oraz dla potencjału warstwy podwójnej:

$$\frac{\partial G}{\partial n} \in o\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} \in o(r^2), \quad D \in o\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad J^\infty \in o(r^2) \tag{31}$$

dopiero spotykając się w wyrażeniu podcałkowym dają wartości wymierne.

Możliwy jest również przypadek, gdy funkcja zaniku $D = 1$. Sytuacja taka oznacza w praktyce, że mamy do czynienia z nieskończeniem długim źródłem.

Jest to przypadek teoretyczny. Metoda rozwiązania przedstawiona jest w pracach [5 i 3].

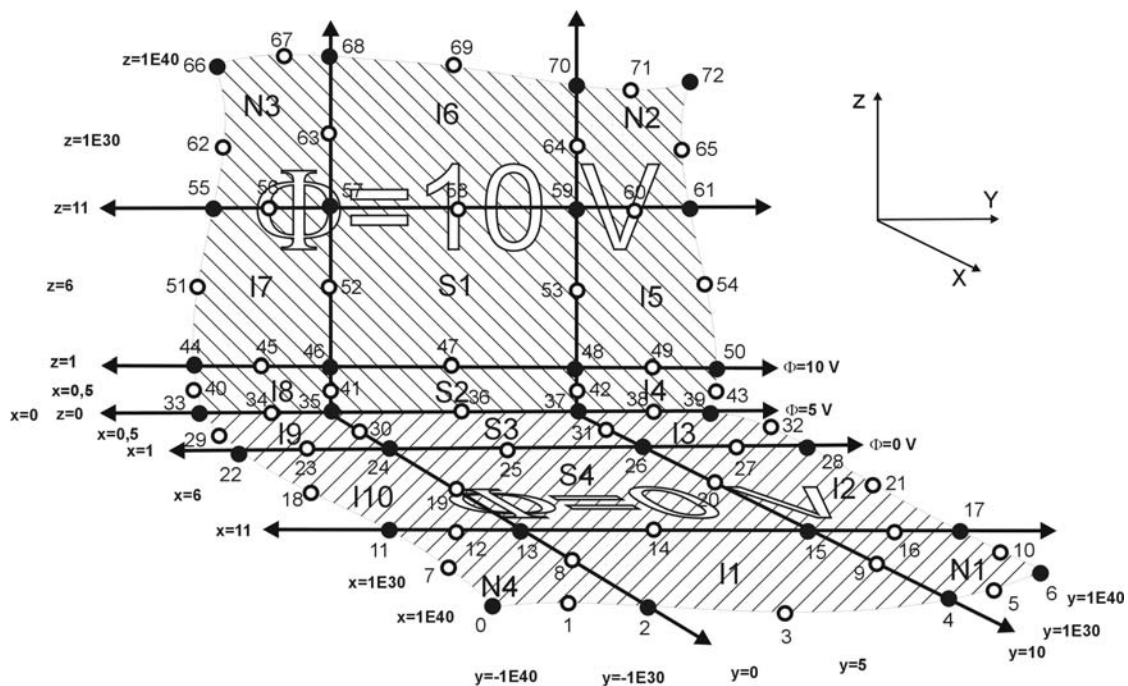
4. MODEL WERYFIKACYJNY

Analiza metody lub modyfikacja elementów modelu matematycznego wymaga napisania lub posiadania możliwego do modyfikacji narzędzia oblicze-

niowego (programu). Konieczne jest też posłużenie się możliwie najprostszymi modelami pozwalającymi na weryfikację poprawności i efektów wprowadzenia do metody elementów brzegowych elementów nieskończonych. Model weryfikacyjny tworzą dwie prostopadłe do siebie półpłaszczyzny jedna ($x = 0, z \geq 0$) o potencjale $\Phi = 10 \text{ V}$ i druga ($z = 0, x \geq 0$) o potencjale $\Phi = 0 \text{ V}$ jak na rys. 4. Rozwiązanie analityczne niniejszego przypadku jest następujące:

$$\varphi = \frac{\Phi}{\pi} 2 \operatorname{arctg} \frac{z}{x} \quad (32)$$

W celu uniknięcia osobliwości związanej ze skokiem potencjału na krawędzi styku półpłaszczyzn wprowadzono dodatkowe cienkie paski, na których potencjał maleje stopniowo odpowiednio z 10 V do 5 V i do 0 V. Rozpatrywany obiekt podzielony został na minimalną ilość elementów brzegowych celem odniesienia przykładu do pojedynczych elementów brzegowych.



Rys. 4. Układ dwóch półpłaszczyzn prostopadłych o zadanych wartościach potencjałów

W analizowanym przykładzie pochodna potencjału φ wzdłuż osi x oraz z będzie zanikała asymptotycznie natomiast w kierunku osi y nie (funkcja zaniku $D = 1$).

Analizowane przypadki są zagadnieniami Laplace'a w przestrzeni trójwymiarowej z warunkami brzegowymi Dirichleta. Możliwość symbolicznego całkowania funkcji Greena dla tego przypadku pozwala na weryfikację obliczeń implementacji numerycznej.

$$G(r) = \frac{1}{4\pi r} = \frac{1}{4\pi \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \quad (33)$$

Do przyjętego modelu i przedstawionego wcześniej toku obliczeniowego zastosowano elementy brzegowe nieskończone 4-go rodzaju [6, 16]. W analizowanym przykładzie wyróżniamy dwa rodzaje elementów nieskończonych rozciągających się do nieskończoności w jednym kierunku ξ_2 $1 \leq \xi_2 \leq 10$ i w obu kierunkach ξ_1 i ξ_2 $N1 \leq N4$. Mamy też do czynienia z oboma przypadkami, kiedy funkcja zaniku wyniesie $D \sim 1/r$ i kiedy $D = 1$. Elementy narożne będą transformowane nieskończonymi funkcjami kształtu w obu kierunkach jednak w kierunku osi z funkcja zaniku będzie wynosić 1. Transformację elementów narożnych określa zależność:

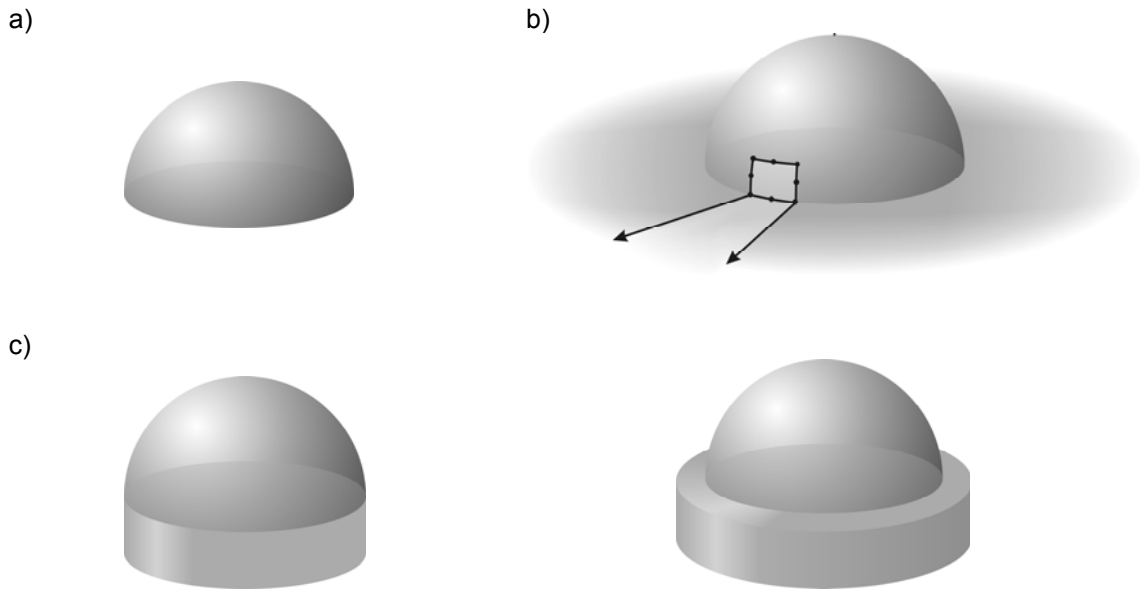
$$\xi_1 = \frac{1+3\eta_1}{\eta_1-1}, \quad \xi_2 = \frac{1+3\eta_2}{\eta_2-1} \quad (34)$$

Wybór właściwych rodzajów elementów nieskończonych każdorazowo zależy od konkretnego analizowanego obiektu. Zarówno właściwe transformacje, różne funkcje kształtu jak i dobór funkcji zaniku oraz możliwości obliczania współczynników macierzy z postaci macierzowej równania bazowego (symboliczne bądź numeryczne), tworzą złożony, indywidualny model obliczeniowy. Wiele odpowiedzi można znaleźć w metodzie MES w zakresie typów elementów, funkcji kształtu i zaniku. Bardzo dobrym omówieniem tego tematu w MES jest praca [12].

5. PODSUMOWANIE

Autorzy zainteresowani są zastosowaniem metody elementów brzegowych z elementami nieskończonymi w tomografii impedancyjnej i optycznej w odniesieniu do przesiewowych badań mających na celu wczesne wykrywanie raka piersi.

Rysunek 5 przedstawia model piersi i różny sposób uwzględniania powierzchni styku z klatką piersiową.



Rys. 5. Model piersi: a) nie uwzględniający niedostępnego dla pomiarów styku z klatką piersiową, b) uwzględniające styk z klatką piersiową wykorzystujące elementy nieskończone, c) uwzględniające styk z klatką piersiową stosujące obcięcie otoczenia obiektu poprzez dodanie skończonego walca u podstawy modelu

Podobnie jak w MES elementy nieskończone w MEB mają również szerokie zastosowanie. Przedstawiony tok postępowania jest jednym z możliwych, wskazującym poszczególne etapy i wybrane metody rozwiązywania problemów.

LITERATURA

1. Abramowitz M., Stegun I.A., Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables. John Wiley, New York, 1973
2. Aliabadi M. H., Hall W. S., The regularising transformation integration method for boundary element kernels. Comparison with series expansion and weighted Gaussian integration methods., Engineering Analysis with Boundary Elements, vol. 6, No 2, 1989, 66-70.
3. Beer G., Watson J. O., Infinite Boundary Elements., International Journal for Numerical Methods in Engineering Vol. 28 1233-1247, 1989.

4. Beer G., Programming the boundary element method., John Wiley & Sons, Ltd , 2001.
5. Beer G., Watson J. O., Swoboda G., Three-dimensional analysis of tunnels using infinite boundary elements., Computers and Geotechnics 3:37-58, 1987.
6. Bettess P., Infinite Elements., International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.11:53-64, 1977.
7. Bettess P., More on Infinite Elements., International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.15:1613-1626, 1980.
8. Bettess P., Infinite Elements., Penshaw Press 1992
9. Bolkowski S., Sikora J., Skoczylas J., Sroka J., Stabrowski M., Wincenciak S., Komputerowe metody analizy pola elektromagnetycznego. Wydawnictwa Politechniki Warszawskiej 1986.
10. Davies T. G., Bu S., Infinite Boundary Elements for the Analysis of Halfspace Problems., Computers and Geotechnics, Vol. 19 No. 2, 137-151, 1996.
11. Gao X.-W., Davies T. G., 3-D infinite boundary elements for half-space problems. Engineering Analysis with Boundary Elements Vol. 21 207-213, (1998)
12. Gratkowski S., Elementy specjalne w metodzie elementów skończonych stosowanej do obliczeń elektromagnetycznych., Prace naukowe Politechniki Szczecińskiej Nr 532, KETiI Nr 5, Szczecin (1996)
13. Jabłoński P., Metoda Elementów Brzegowych w analizie pola elektromagnetycznego., Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej, Częstochowa (2003)
14. Kurgan E., Analiza pola magnetostatycznego w środowisku niejednorodnym metodą elementów brzegowych. Uczelniane wydawnictwa naukowo-dydaktyczne AGH, Kraków (1999)
15. Moser W., Duenser Ch., Beer G. Mapped infinite elements for three-dimensional multi-region boundary element analysis. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.61:317-328, (2004)
16. Sikora J., Algorytmy numeryczne w tomografii impedancyjnej i wiroprowodowej. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, (2000)
17. Watson J. O., (1979) Advanced implementation of the boundary element method for two- and three-dimensional elastostatics. Developments in Boundary Element Methods - 1 (Editors P.K. Banerjee and R. Butterfield), Elsevier Applied Science Publishers, pp.31-63 (1979)
18. Wrobel L. C., The Boundary Element Method Application in Thermo-Fluids and Acoustics., John Wiley & Sons Ltd. (2002)
19. Zienkiewicz O. C., Emson C., Bettess P., (1983) A novel boundary infinite element. Int. J. for Num. Methods in Eng. Vol. 16, 393-404, (1983)

Rękopis dostarczono, dnia 20.02.07 r.

Opiniował: prof. dr hab. inż. Antoni Cieśla

CALCULATION SCHEMA FOR BOUNDARY ELEMENT METHOD WITH INFINITE ELEMENTS

Maciej PAŃCZYK
Jan SIKORA

ABSTRACT *In several problems of interests in computational modeling solved by Boundary Element Method there is a media that is either infinite or semi-infinite. A simple solution is to truncate the region of interest in the great distance from the finite structure. Placing such artificial boundary increases a number of boundary elements and decreases the computational efficiency. It can also introduce an unknown error if the truncation occurs too near. A better solution is to use infinite boundary elements coupled with standard BEM. Eight nodes quadrilateral isoparametric boundary elements will be taken into consideration. Their generalization to infinite boundary elements and method of incorporating it into the conventional BEM analysis will be presented.*