

Wojciech KRAJEWSKI

## ELEMENTY BRZEGOWE I LINIOWE W ANALIZIE WYBRANYCH ZAGADNIĘĆ EMC NISKIEJ CZĘSTOTLIWOŚCI

**STRESZCZENIE** *Obiekty elektroenergetyczne, takie jak: linie przesyłowe WN, stacje elektroenergetyczne, rozdzielnie WN, elektrownie czy elektrociepłownie, generują w swoim otoczeniu pola elektromagnetyczne niskiej częstotliwości. Pola te oddziałują na organizmy żywe i elementy techniczne. W miejscach dostępnych dla ludzi, a także w miejscach usytuowania różnego rodzaju aparatury elektrycznej i elektronicznej, natężenia tych pól nie powinny przekraczać wartości określonych w obowiązujących przepisach. Duże znaczenie praktyczne ma umiejętność możliwie precyzyjnego obliczeniowego modelowania rozważanych tutaj pól.*

*W pracy zaproponowano trójwymiarowe modele fizyczne oraz ukierunkowane na zastosowanie metod całkowo-brzegowych modele matematyczne pól elektrycznych i magnetycznych niskiej częstotliwości generowanych przez obiekty elektroenergetyczne. W modelach tych uwzględniono obecność wielu typowych obiektów zniekształcających rozkłady pól w sąsiedztwie linii WN i na terenie stacji elektroenergetycznych, w tym ekranów elektrycznych, magnetycznych i elektromagnetycznych. Dokonano wyboru najbardziej odpowiedniej, zdaniem autora, metody numerycznej do analizy rozważanych zagadnień. Metoda ta polega na połączeniu pośredniego wariantu metody elementów brzegowych z wariantem metody ładunków symulowanych zwanym tutaj metodą elementów liniowych.*

*Opracowano algorytmy oraz autorskie programy komputerowe bazujące na wyżej wspomnianej metodzie hybrydowej, które wyposażono we własne generatory siatek różnego rodzaju obiektów geometrycznych, w tym generatory kratownic słupów linii WN oraz bramek stacyjnych eksploatowanych w polskim systemie elektroenergetycznym.*

*Na szczególną uwagę zasługuje opracowany przez autora program do analizy trójwymiarowych zagadnień wiropądowych, wykorzystujący tak zwany model  $H - \psi$ . Warto tutaj wspomnieć, że numeryczne rozwiązywanie trójwymiarowych problemów wiropądowych jest jednym z bardziej skomplikowanych zagadnień obliczeniowych elektromagnetyzmu, zarówno ze względu na jego złożoność matematyczną, jak i na wymaganą dużą moc obliczeniową komputera.*

*Przeprowadzono eksperymentalną weryfikację metod obliczeniowych i programów komputerowych, zarówno w warunkach laboratoryjnych, jak i w terenie. Zaprezentowano wyniki przykładowych obliczeń dla różnych typowych konfiguracji obiektów elektroenergetycznych, gdzie konieczne było zastosowanie trójwymiarowych modeli pól.*

*Opracowane przez autora procedury obliczeniowe sukcesywnie implementowane są w komercyjnym pakiecie oprogramowania EMFA do analizy pól elektrycznych i magnetycznych w sąsiedztwie obiektów elektroenergetycznych.*

**Słowa kluczowe:** *pole elektromagnetyczne, metody numeryczne, metoda elementów brzegowych, kompatybilność elektromagnetyczna, linie wysokiego napięcia, stacje elektroenergetyczne*

## Wykaz ważniejszych oznaczeń

- $A$  – wektorowy potencjał magnetyczny  
 $A$  – norma wektora  $A$   
 $A_{ij}$  – wektor pomocniczy  
 $a$  – wymiar geometryczny  
 $a_{\sigma ij}, a_{\pi ij}$  – współczynniki układu równań algebraicznych  
 $\mathbf{B}$  – wektor indukcji magnetycznej  
 $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$  – macierze elementów brzegowych  
 $b$  – wymiar geometryczny  
 $b_{1ij}, b_{2ij}$  – element macierzy odpowiednio  $\mathbf{B}_1$  i  $\mathbf{B}_2$   
 $b_{sij}^s, b_{lij}^s, b_{\sigma ij}^s$  – współczynniki układu równań algebraicznych opisującego trójwymiarowe zagadnienia wiropądowe  
 $b'_{sij}, b'_{lij}, b'_{\sigma ij}$  – współczynniki układu równań algebraicznych opisującego trójwymiarowe zagadnienia wiropądowe  
 $b_{sij}^\sigma, b_{lij}^\sigma, b_{\sigma ij}^\sigma$  – współczynniki układu równań algebraicznych opisującego trójwymiarowe zagadnienia wiropądowe  
 $C$  – wartość stała  
 $c_i$  – współczynnik występujący w równaniach całkowych stanowiących podstawę MEB  
 $d\mathbf{l}$  – skalarny element różniczkowy  
 $d\mathbf{l}_1, d\mathbf{l}_2$  – wektorowe elementy różniczkowe  
 $\mathbf{E}$  – wektor natężenia pola elektrycznego  
 $E$  – moduł wartości skutecznej eliptycznego wektora  $\mathbf{E}$  w kierunku, w którym jest on największy  
 $E_x, E_y, E_z$  – składowe wektora natężenia pola elektrycznego  
 $G_H$  – rozwiązanie podstawowe równania Helmholtza  
 $G_L$  – rozwiązanie podstawowe równania Laplace'a  
 $G_L^*$  – antysymetryczne względem płaszczyzny  $z = 0$  rozwiązanie podstawowe równania Laplace'a  
 $G_{L\varepsilon}$  – rozwiązanie podstawowe równania Laplace'a podzielone przez stałą elektryczną  
 $\mathbf{H}$  – wektor natężenia pola magnetycznego  
 $\mathbf{H}_0$  – wektor natężenia pierwotnego pola magnetycznego  
 $\mathbf{H}_m$  – wektor natężenia wtórnego pola magnetycznego  
 $H$  – moduł wartości skutecznej eliptycznego wektora  $\mathbf{H}$  w kierunku, w którym jest on największy  
 $I$  – prąd  
 $I_t$  – prąd całkowity  
 $\mathbf{i}$  – wersor w kartezjańskim układzie współrzędnych  
 $\mathbf{J}$  – wektor gęstości prądu  
 $\mathbf{J}_e$  – wektor gęstość prądu wzbudzenia  
 $j$  – jednostka urojona  
 $\mathbf{j}$  – wersor w kartezjańskim układzie współrzędnych  
 $\mathbf{j}_s$  – wektor fikcyjnej gęstości prądu powierzchniowego (okład prądowy)

- $K_0(x)$  – zmodyfikowana funkcja Bessela drugiego rodzaju zerowego rzędu  
 $K_e$  – krzywa reprezentująca przewód z prądem wzbudzenia  
 $K_f$  – krzywa reprezentująca ażurowy obiekt z idealnego ferromagnetyka  
 $K_j$  – krzywa reprezentująca  $j$ -ty obiekt  
 $\mathbf{k}$  – wektor w kartezjańskim układzie współrzędnych  
 $L_j, L'_j$  –  $j$ -ty element liniowy i jego lustrzane odbicie  
 $l_j$  – długość  $j$ -tego elementu liniowego  
 $n$  – liczba wymiarów geometrycznych  
 $n_L$  – całkowita liczba elementów liniowych  
 $n_w$  – całkowita liczba elementów liniowych na przewodach roboczych  
 $n_S, n_{S1}, n_{S2}$  – liczba elementów brzegowych, odpowiednio na powierzchniach:  $S, S_1$  i  $S_2$   
 $\mathbf{n}$  – wektor normalny  
 $\mathbf{n}_i$  – wektor normalny w punkcie  $P_i$   
 $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$  – macierze elementów liniowych  
 $P$  – punkt źródłowy  
 $P_i$  – punkt obserwacji  
 $p_{1ij}, p_{2ij}$  – elementy macierzy odpowiednio  $\mathbf{P}_1$  i  $\mathbf{P}_2$   
 $\bar{q}$  – funkcja określona na brzegu obszaru  
 $\mathbf{q}_{S1}, \mathbf{q}_{S2}$  – wektory (macierze kolumnowe), których składowymi są gęstości ładunków na elementach brzegowych położonych na powierzchniach, odpowiednio:  $S_1$  i  $S_2$   
 $\mathbf{q}_L$  – wektor (macierz kolumnowa), którego składowymi są gęstości ładunków swobodnych na elementach liniowych  
 $\mathbf{r}, \mathbf{r}'$  – wektory wodzące  
 $r, r'$  – długości wektorów wodzących  
 $S_j, S'_j$  –  $j$ -ty element brzegowy i jego zwierciadlane odbicie  
 $S_\Delta, S_\square$  – elementy brzegowe, odpowiednio trójkątny i prostokątny  
 $s_1, s_2, s_3$  – pola powierzchni trójkątów wewnętrznych elementu trójkątnego  
 $s_j$  – pole powierzchni  $j$ -tego elementu brzegowego  
 $\mathbf{s}$  – wektor styczny  
 $\mathbf{s}_i$  – wektor styczny w punkcie  $P_i$   
 $\mathbf{T}$  – wektorowy potencjał elektryczny  
 $\mathbf{t}$  – wektor styczny  
 $\mathbf{t}_i$  – wektor styczny w punkcie  $P_i$   
 $u$  – pewna funkcja klasy  $C^2$  wewnątrz rozważanego obszaru i klasy  $C$  na jego brzegu  
 $\bar{u}$  – funkcja określona na brzegu obszaru  
 $\mathbf{v}$  – wektor (macierz kolumnowa), którego składowymi są potencjały na powierzchniach przewodów roboczych  
 $w$  – pewna funkcja klasy  $C^2$  wewnątrz rozważanego obszaru i klasy  $C$  na jego brzegu  
 $\alpha$  – współczynnik występujący w równaniu Helmholtza równy  $\sqrt{j\omega\gamma\mu}$   
 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  – kąty  
 $\beta$  – liczba falowa  
 $\Gamma$  – brzeg obszaru  
 $\Gamma_l$  – granica między podobszarami  
 $\Gamma_j$  – brzeg  $j$ -tego podobszaru  
 $\Gamma_f$  – brzeg idealnego ferromagnetyka  
 $\Gamma_g$  – część brzegu reprezentująca powierzchnię ziemi

$\gamma$  – konduktywność  
 $\delta(P, P_i)$  – funkcja Diraca  
 $\varepsilon$  – przenikalność elektryczna  
 $\varepsilon_0$  – stała elektryczna  
 $\varepsilon_d$  – przenikalność elektryczna dielektryka  
 $\varepsilon_e$  – efektywna zespolona przenikalność elektryczna  
 $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$  – kąty  
 $\mu$  – przenikalność magnetyczna  
 $\mu_0$  – stała magnetyczna  
 $\mu_w$  – przenikalność magnetyczna obszaru wiroprowodowego  
 $\sigma$  – gęstość powierzchniowa ładunku  
 $\sigma_m$  – gęstość powierzchniowa ładunku magnetycznego  
 $\sigma_{mj}$  – gęstość powierzchniowa ładunku magnetycznego na  $j$ -tym elemencie brzegowym  
 $\tau$  – gęstość liniowa ładunku  
 $\tau_j$  – gęstość liniowa ładunku na  $j$ -tym elemencie liniowym  
 $\tau_m$  – gęstość liniowa ładunku magnetycznego  
 $\tau_{mj}$  – gęstość liniowa ładunku magnetycznego na  $j$ -tym elemencie liniowym  
 $\varphi$  – skalarny potencjał elektryczny  
 $\psi$  – skalarny potencjał magnetyczny  
 $\psi_0$  – skalarny potencjał magnetyczny pola pierwotnego  
 $\psi_m$  – skalarny potencjał magnetyczny pola wtórnego  
 $\Omega$  – obszar  
 $\Omega_0$  – otwarty obszar powietrzny  
 $\Omega_d$  – obszar zamknięty o przenikalności elektrycznej  $\varepsilon_d$   
 $\Omega_e$  – obszar z prądem wzbudzenia  
 $\Omega_w$  – obszar wiroprowodowy  
 $\omega$  – pulsacja

## 1. WSTĘP

Obiekty elektroenergetyczne, takie jak: linie przesyłowe WN, stacje elektroenergetyczne, rozdzielnie WN, elektrownie czy elektrociepłownie, generują w swoim otoczeniu pola elektromagnetyczne niskiej częstotliwości. Pola te oddziałują na organizmy żywe [17, 18, 19, 77, 112, 115] i elementy techniczne [9, 81, 90]. W miejscach dostępnych dla ludzi, a także w miejscach usytuowania różnego rodzaju aparatury elektrycznej i elektronicznej omawiane pola nie mogą przekraczać określonych wartości. Dopuszczalne wartości natężeń pól elektrycznych i magnetycznych o częstotliwości technicznej, jakie mogą występować w środowisku człowieka i na stanowiskach pracy, precyzują obowiązujące w Polsce przepisy [94, 96]. Podobne regulacje prawne wprowadzono w większości krajów Unii Europejskiej.

Urządzenia elektryczne oraz układy elektroniczne zlokalizowane w sąsiedztwie torów wielkopiędowych i instalacji wysokonapięciowych powinny być usytuowane tak, aby natężenia pól występujących w ich bezpośrednim sąsiedztwie nie przekraczały wartości określonych ich odpornością na oddziaływanie elektromagnetyczne [95, 96]. Dotyczy to zarówno znamionowych warunkach pracy obiektu elektroenergetycznego, jak i przewidywalnych stanów awaryjnych. Stąd też konieczna jest znajomość rozkładów pól generowanych przez wspomniane obiekty.

Z oczywistych względów umiejętność obliczeniowego modelowania omawianych tutaj pól ma istotne znaczenie dla projektantów i konstruktorów obiektów elektroenergetycznych, a także dla służb ochrony zdrowia i ochrony środowiska, które zgodnie z powołanymi na wstępie przepisami poddają kontroli projekty nowych obiektów na etapie zatwierdzania ich do realizacji, a następnie przeprowadzają ponowną kontrolę w procesie dopuszczania tych obiektów do eksploatacji, zaraz po pierwszym uruchomieniu instalacji. Podobne zasady obowiązują w przypadku rozbudowy, przebudowy lub zmiany warunków pracy istniejących już obiektów, a także podczas wznoszenia w ich sąsiedztwie budynków zarówno mieszkalnych, jak i przeznaczonych na czasowy pobyt ludzi. Modelowanie pól elektrycznych i magnetycznych generowanych przez urządzenia elektroenergetyczne jest jednym z zagadnień z zakresu kompatybilności elektromagnetycznej (EMC) niskiej częstotliwości. Jak wynika z powyższych rozważań, niezbędnym narzędziem w postępowaniach dotyczących określenia wartości natężeń pól elektrycznych i magnetycznych w środowisku, a szczególnie przy wyznaczaniu zasięgu stref ochronnych [96] na terenie obiektu elektroenergetycznego i tak zwanych stref ograniczonego użytkowania [122] w jego sąsiedztwie, są odpowiednie symulacyjne programy komputerowe.

Obserwowana obecnie w Polsce dynamiczna rozbudowa centralnych dzielnic wielkich aglomeracji oraz „wchłanianie” przez miasta obszarów podmiejskich powodują, że w wielu przypadkach takie obiekty jak: napowietrzne linie WN czy duże stacje elektroenergetyczne sytuowane są w obrębie miast. Coraz częściej wewnętrzne stacje WN, dla lepszego wykorzystania drogich terenów miejskich, lokalizowane są we wspólnych budynkach z innego rodzaju instytucjami biurowymi czy produkcyjnymi, w których czasowo przebywają ludzie, znajduje się sprzęt komputerowy i innego rodzaju infrastruktura elektroniczna. Stąd też zachodzi konieczność coraz precy-

zyjnijszego wyznaczania rozkładów pól elektrycznych i magnetycznych generowanych przez układy szyn zbiorczych, oszynowanie aparatury rozdzielczej i transformatorów oraz przez wyprowadzenia linii WN z budynku stacji elektroenergetycznej.

W tym miejscu warto wspomnieć, że pomiarowe wyznaczanie zasięgu stref ograniczonego użytkowania w sąsiedztwie obiektów już eksploatowanych bywa niekiedy bardzo pracochłonne ze względu na konieczność wykonania znacznej liczby pomiarów. Tego rodzaju problemy występują na rozległych terenach przylegających do elektrowni, elektrociepłowni czy stacji wielkich mocy. Dlatego też, zgodnie z aktualnymi przepisami [94], pomiary kontrolne przeprowadza się w tych miejscach, w których na podstawie uprzednio przeprowadzonych obliczeń stwierdzono występowanie pól elektromagnetycznych o wartościach zbliżonych do wartości dopuszczalnych. Należy wspomnieć, że zgodnie z [97] linie i stacje WN zaliczane są do obiektów mogących znacząco oddziaływać na środowisko, przy czym obiekty o napięciu znamionowym nie mniejszym niż 220 kV wymagają sporządzenia raportu o oddziaływaniu na środowisko, a obiekty o napięciu znamionowym nie mniejszym od 110 kV mogą wymagać sporządzenia takiego raportu. Ponadto, zgodnie z [98], w przypadku wystąpienia ekspozycji pracowników na pole elektromagnetyczne należy przeprowadzać okresowe pomiary kontrolne tych pól na terenie obiektu.

Można zatem stwierdzić, że bezpieczna eksploatacja istniejących oraz projektowanie nowych, nie zagrażających ludzkiemu zdrowiu i spełniających wymagania kompatybilności elektromagnetycznej obiektów elektroenergetycznych wiąże się z koniecznością doskonalenia metod obliczania pól przez nie generowanych. Wymaga to stosowania coraz bardziej złożonych modeli matematycznych pól w połączeniu z coraz efektywniejszymi technikami numerycznymi. Należy tutaj podkreślić, że zwiększanie dokładności analizy pól generowanych przez obiekty elektroenergetyczne ma istotne znaczenie ekonomiczne, gdyż pozwala na coraz precyzyjniejsze (bez zbędnego zapasu) wyznaczenie zasięgu stref ograniczonego użytkowania. Ma to szczególne znaczenie na drogich terenach miejskich, gdzie częściowe wyłączenie z użytkowania nawet niezbyt rozległych obszarów wiąże się z istotnymi kosztami. Przy okazji warto wspomnieć, że powierzchnia stref ograniczonego użytkowania na terenie Polski tylko w sąsiedztwie linii WN (nie licząc stacji i elektrowni) szacunkowo wynosi 1285 km<sup>2</sup> [127]. Stanowi to około 0.4% terytorium kraju. Umiejętność dokładnego modelowania pól umożliwia także przyjęcie optymalnej (nie zawyżonej) wysokości słupów linii WN, co w dużej mierze decyduje o kosztach inwestycji. Pozwala także na bezpieczną dla ludzi i sprzętu elektronicznego lokalizację pomieszczeń biurowych i produkcyjnych w bliskości urządzeń elektroenergetycznych.

## 2. STAN ZAGADNIENIA, CEL I ZAKRES PRACY

W literaturze istnieje wiele prac, np. [7, 8, 21–23, 27, 28, 35, 70, 105, 106, 114], dotyczących obliczeniowego modelowania pól, zarówno elektrycznych, jak i magnetycznych, na terenie i w sąsiedztwie obiektów elektroenergetycznych. W pracach tych do analizy pola elektrycznego najczęściej stosowana jest metoda ładunków symulowanych (MLS), która chętnie wykorzystywana jest w technice wysokich napięć. Pole magnetyczne w tych publikacjach wyznaczone jest zwykle przy

zastosowaniu całki Poissona (przypadek dwuwymiarowy) lub z prawa Biota-Savarta (przypadek trójwymiarowy). Zaletą powyższych metod jest niewątpliwa ich prostota, natomiast poważną wadę stanowi ograniczona możliwość uwzględniania wpływu obiektów zniekształcających rozkłady pól. Prezentowane w wyżej wymienionych publikacjach podejście jest skuteczne dla napowietrznych linii WN wzniesionych na terenach otwartych, z ewentualną możliwością uwzględnienia przesł usytuowanych w sąsiedztwie pojedynczych budynków. W przypadku analizy pola elektrycznego na terenie silnie zurbanizowanym bądź na terenie stacji elektroenergetycznych czy elektrowni konieczne jest zastosowanie bardziej złożonych modeli i metod matematycznych. Podobna sytuacja występuje podczas analizy pola magnetycznego na terenie stacji WN, gdzie zachodzi konieczność uwzględnienia wpływu dużych mas metalowych (np. kadzie transformatorów) lub systemów ekranowania magnetycznego bądź elektromagnetycznego. Tego typu zagadnienia analizowane były w stosunkowo nielicznych pracach, np. [10, 26, 67, 103].

Bez wątpienia, współcześnie najbardziej rozpowszechnionymi metodami numerycznymi stosowanymi do modelowania pól elektromagnetycznych niskiej częstotliwości są: metoda elementów skończonych (MES) [128] i metoda elementów brzegowych (MEB) [5, 6, 12, 13, 65]. MES, wykorzystująca pierwszą tożsamość Greena [97, 107], jest tak zwaną metodą obszarową, tzn. wymaga dyskretyzacji całego obszaru analizy. Druga z nich, jak sama nazwa wskazuje, wymaga jedynie dyskretyzacji brzegu rozważanego obszaru i w swej klasycznej formie bazuje na drugiej tożsamości Greena [97, 107]. Porównanie tych dwóch metod dla wybranych zagadnień w środowiskach strefowo niejednorodnych przedstawiono między innymi w artykułach [45, 100]. Ogólnie rzecz biorąc MES jest szczególnie przydatna w analizie zagadnień w środowiskach nieliniowych, natomiast MEB jest bardzo wygodna przy rozwiązywaniu tak zwanych zagadnień z brzegiem otwartym. Niekiedy korzystne jest zastosowanie metody hybrydowej łączącej MES i MEB, tak jak to uczyniono w pracach [69, 101]. Do analizy omawianych tutaj zagadnień zdecydowanie bardziej odpowiednią wydaje się metoda elementów brzegowych. W pracach autora [46–64] przedstawiono zastosowanie MEB, a także metody hybrydowej łączącej MEB i MŁS, do analizy rozważanych tutaj zagadnień.

Autor pracy jest współautorem wykonanego w latach ubiegłych na potrzeby Ministerstwa Środowiska pakietu oprogramowania LINIA [46], który służy do wyznaczania pól elektrycznych i magnetycznych w sąsiedztwie napowietrznych linii WN. Powyższy program, oparty na metodzie elementów brzegowych, wykorzystuje dwuwymiarowe modele pól i nie uwzględnia wpływu obiektów fizycznych znajdujących się w sąsiedztwie linii. Analiza pola elektrycznego wytwarzanego przez napowietrzne linie WN przebiegające w sąsiedztwie budynków wymaga zwykle podejścia trójwymiarowego, ujmującego skomplikowaną geometrię problemu. Podobna sytuacja występuje podczas modelowania pola elektrycznego na terenie stacji elektroenergetycznych. Zagadnienie komplikuje się jeszcze bardziej, gdy zachodzi konieczność uwzględnienia obiektów metalowych, takich jak: kratownice słupów i bramek, metalowe ogrodzenia, balustrady, kadzie transformatorów, ekrany itp., a także obiektów niemetalowych, które deformują rozkłady pola elektrycznego (drzewa, krzewy, konstrukcje betonowe itd.). Obiekty niemetalowe, a zatem i ściany budynków, nie wpływają na rozkłady pola magnetycznego pod warunkiem, że nie zawierają zbrojeń, które podobnie jak inne elementy metalowe mogą powodować zniekształcenie

jego rozkładów. Na rozkłady pola magnetycznego w istotnym stopniu wpływają lite obiekty metalowe, np. kadzie transformatorów, a także wszelkiego rodzaju ekrany magnetyczne bądź elektromagnetyczne.

Użytkowane przez krajową energetykę programy do obliczania pól elektrycznych i magnetycznych pod liniami wysokiego napięcia, takie jak program POLEM czy RPLN [124], podobnie jak pakiet LINIA, oparte są na dwuwymiarowych modelach pól. Uwzględniają one wpływ obiektów znajdujących się w sąsiedztwie linii WN w sposób bardzo uproszczony. Na rynku istnieją także bardziej zaawansowane programy zagraniczne, z których na szczególną uwagę zasługuje nowoczesny pakiet EFC-400 (EFC-400ST) [105] niemieckiej firmy Wandel&Goltermann (obecnie Narda). Powyższy program opracowano specjalnie do wyznaczania rozkładów pól elektromagnetycznych niskiej częstotliwości w sąsiedztwie i na terenie obiektów elektroenergetycznych. W pakiecie zastosowano trójwymiarowe modele pól i uwzględniono wpływ budynków na rozkłady pola elektrycznego. Nie ma w nim jednak możliwości uwzględniania wpływu kratownic słupów, a także innego rodzaju powszechnie występujących obiektów, takich jak: drzewa, krzewy, ogrodzenia itp. Ponadto program nie jest dostosowany do analizy pola elektrycznego na terenie stacji elektroenergetycznych, a pole magnetyczne obliczane jest wyłącznie z prawa Biota-Savarta, bez możliwości uwzględnienia wpływu obiektów metalowych na jego rozkłady. Ponadto pakiet EFC-400 nie jest dostatecznie dostosowany do polskich realiów. Zawiera on wyłącznie bibliotekę niemieckich słupów linii WN, a z oczywistych względów nie zawiera bibliotek słupów linii WN występujących na terenie Polski. Eksploatacja programu w polskich warunkach pociągałaby za sobą konieczność ręcznego wprowadzania parametrów geometrycznych słupów, co powodowałoby dużą uciążliwość obsługi programu. Inną istotną wadą omawianego pakietu jest jego bardzo wysoka cena (ok. 13000 Euro + VAT). Należy jednak stwierdzić, że program EFC-400 jest systematycznie rozwijany i rozbudowywany.

Dostępne na rynku zagraniczne programy komercyjne ogólnego zastosowania do analizy trójwymiarowych pól elektromagnetycznych, takie jak: FLUX 3D (Magsoft) [20], MAXWELL 3D (Ansoft) [120] czy OPERA 3D (Vector Fields) [89], ze względu na dążenie twórców owych programów do osiągnięcia ich znacznej uniwersalności, mają bardzo skomplikowany system wprowadzania danych i muszą być obsługiwane przez specjalistów dobrze zorientowanych w problematyce obliczania pól. Przykładowo w pracy [67] przedstawiono zastosowanie pakietu OPERA 3D do analizy pola elektrycznego w sąsiedztwie linii WN. Ponadto powyższe programy oparte na metodzie elementów skończonych, jak już wcześniej wspomniano, nie są w pełni dostosowane do specyfiki omawianych tutaj problemów, to znaczy do rozwiązywania zagadnień z brzegiem otwartym oraz takich, w których występują duże dysproporcje między wymiarami obiektów (np. poprzeczne i podłużne wymiary przewodów).

Uwzględniając powyższe rozważania, wydaje się celowe dostarczenie na polski rynek oprogramowania, które byłoby wygodnym i efektywnym narzędziem dla projektantów obiektów elektroenergetycznych oraz dla służb ochrony zdrowia i ochrony środowiska badających poziom uciążliwości tych obiektów ze względu na generowane przez nie pole elektromagnetyczne. Stąd też zachodzi konieczność rozwijania matematycznych metod modelowania omawianych tutaj pól w połączeniu z eksperymentalną weryfikacją ich skuteczności w analizie zagadnień występujących w praktyce.



W niniejszej pracy przedstawiono trójwymiarowe modele fizyczne oraz ukierunkowane na zastosowanie metod całkowo-brzegowych modele matematyczne pól elektrycznych i magnetycznych niskiej częstotliwości generowanych przez obiekty elektroenergetyczne. W modelach tych uwzględniono obecność wielu typowych obiektów fizycznych zniekształcających rozkłady pól. Rozważono dwu- i trójwymiarowe zagadnienia wiroprowadowe w kontekście problemów ekranowania elektromagnetycznego. Przeanalizowano różne warianty MEB i MŁS, wybierając, zdaniem autora, najbardziej odpowiedni. Do rozwiązania problemu zastosowano metodę hybrydową wykorzystującą połączenie MEB z wariantem MŁS, który nazwano tutaj metodą elementów liniowych (MEL). Przedstawiono odpowiednie wzory oraz sformułowano równania macierzowe właściwe dla zaproponowanej metody numerycznej. Opracowano procedury obliczeniowe, które sukcesywnie implementowane są w komercyjnym pakiecie oprogramowania EMFA [61, 62] do analizy pól elektrycznych i magnetycznych w sąsiedztwie obiektów elektroenergetycznych.

W celu weryfikacji przyjętych modeli pól, metod obliczeniowych i programów komputerowych porównano wyniki obliczeń z wynikami pomiarów wykonanych zarówno w warunkach laboratoryjnych, jak i w terenie. Zaprezentowano możliwości programów komputerowych, obliczając rozkłady pól w sąsiedztwie i na terenie typowych rzeczywistych obiektów elektroenergetycznych.

### **3. MODELE PÓL ELEKTRYCZNYCH I MAGNETYCZNYCH W SĄSIEDZTWIE I NA TERENIE OBIEKTÓW ELEKTROENERGETYCZNYCH**

#### **3.1. Uwagi ogólne**

W środowisku powietrznym składowe: elektryczna i magnetyczna pola elektromagnetycznego o częstotliwości technicznej (50 Hz) mogą być rozważane niezależnie. Taka sytuacja występuje podczas analizy pola elektromagnetycznego w sąsiedztwie urządzeń elektroenergetycznych w przypadku, gdy nie zachodzi konieczność uwzględnienia prądów wirowych. Składowa elektryczna pola elektromagnetycznego, zwana dalej polem elektrycznym, wzbudzana jest przez elementy pod napięciem. Składowa magnetyczna lub prościej pole magnetyczne wytwarzane jest przez tory prądowe. W elementach o dużej konduktywności, w których należy uwzględnić prądy wirowe, obie składowe pola muszą być analizowane jednocześnie. Są one jednak wzbudzone przez pierwotne pole magnetyczne (przewody z prądem). W dalszej części tego rozdziału naszkicowano modele pól elektrycznych i magnetycznych wzbudzanych przez instalacje elektroenergetyczne. Między innymi rozważono przypadki uwzględniające występowanie prądów wirowych. Przedstawiono modele fizyczne, a następnie sformułowano modele matematyczne analizowanych zjawisk oraz zaprezentowano odpowiadające im zagadnienia brzegowe. W pracy założono, że pole analizowane jest w środowisku składającym się z podobszarów jednorodnych, liniowych i izotropowych. Takie środowisko nazywane jest tutaj strefowo niejedno-

rodnym. Ponadto, ze względu na sinusoidalny charakter wymuszeń, przyjęto, że wszystkie wielkości polowe występujące we wzorach w dalszej części pracy są wielkościami zespolonymi.

### 3.2. Model pola elektrycznego

W niniejszym punkcie przedstawiono model matematyczny pola elektrycznego generowanego przez obiekty elektroenergetyczne, dla którego później rozważono różne warianty MEB oraz metodę hybrydową łączącą MEB i MEL.

Przyjmuje się, że potencjał na powierzchni przewodów roboczych jest równy napięciu fazowemu, a w przypadku przewodów odgromowych jest równy zero. Dla wiązek wieloprzewodowych uwzględnia się rzeczywistą liczbę przewodów w wiązce. Swobodnie zwisające giętkie przewody linii bądź giętkie oszynowanie w rozdzielni wysokiego napięcia przyjmujące kształt linii łańcuchowej aproksymuje się parabolami, tak jak to uczyniono w pracy [53]. W przypadku przewodów sztywnych, np. rurowych, przyjmuje się ich rzeczywisty kształt.

Zakłada się, że potencjał wszystkich uziemionych elementów metalowych, takich jak: kratownice, wsporniki, ogrodzenia, ekrany elektryczne itp., jest równy zero.

Powierzchnia ziemi lub podłogi jest płaszczyzną o potencjale zerowym. W przypadku pofałdowania terenu uwzględnia się jego rzeczywisty kształt.

Ściany budynków lub innych obiektów murowanych mają także potencjał zero. To założenie wynika z faktu, że moduł zespolonej przenikalności elektrycznej betonu jest dużo większy od stałej elektrycznej. Dokładniejsze uzasadnienie tego uproszczenia podano w końcowej części niniejszego punktu.

Na powierzchni budynków drewnianych czy też obiektów ceramicznych (izolatory wsporcze aparatury rozdzielczej) potencjał powierzchniowy jest funkcją niewiadomą. Znane są jedynie warunki zgodności pola na powierzchniach rozgraniczających środowiska o różnych parametrach materiałowych.

W przypadku nie uziemionego obiektu metalowego zakłada się, że jego potencjał ma stałą, ale nieznaną wartość, natomiast suma ładunków na jego powierzchni jest równa zero.

Korony drzew odwzorowywane są elipsoidami obrotowymi. Ich potencjał jest równy zero, co uzasadnia się obecnością dobrze przewodzących soków organicznych.

Pomija się wpływ izolatorów zawieszonych na słupach linii WN i brankach stacyjnych na rozkłady pola, ze względu na ich relatywnie małe wymiary i ich dostatecznie dużą odległość od punktów, w których analizowane jest pole. W przypadku izolatorów wsporczych aparatury rozdzielczej uwzględnia się ich rzeczywistą przenikalność elektryczną. Zaniedbuje się zjawisko ulotu oraz spadki napięć wzdłuż linii WN.

Dla orientacji w tabeli 3.1 podano własności elektryczne niektórych materiałów, ze szczególnym uwzględnieniem materiałów używanych w budownictwie. Tabele sporządzono głównie na podstawie danych zawartych w książkach [39, 118, 125]. Przedstawione w tabeli parametry elektryczne rozważanych materiałów zmieniają się często w szerokim zakresie w zależności od ich składu, wilgotności, temperatury, wieku, częstotliwości pola, a także innych czynników. Precyzyjne określenie powyższych własności nie było przedmiotem niniejszej pracy. Pewne wnioski można

jednak wyciągnąć, rozważając skrajne wartości parametrów danego materiału, co pokazano dalej dla przypadku obiektów betonowych.

Tabela 3.1. Własności elektryczne niektórych materiałów ze szczególnym uwzględnieniem materiałów używanych w budownictwie

Materiał	Względna przenikalność elektryczna	Konduktywność, S/m
Drewno	2,5 – 7,7	$2,5 \cdot 10^{-12}$ *
Szkło	5,4 – 9,9	$1,25 \cdot 10^{-14}$ – $5 \cdot 10^{-12}$
Marmur	8,3	$1,0 \cdot 10^{-8}$
Porcelana	5,7 – 6,8	–
Cement	–	$5 \cdot 10^{-14}$
Mokry beton	–	$2 \cdot 10^{-2}$ – $2,5 \cdot 10^{-2}$
Suchy beton	–	$4,6 \cdot 10^{-5}$ – $8,3 \cdot 10^{-5}$
Asfalt	2,7	–
Gleba gliniasta lekka i średnia	2 – 60	$2,0 \cdot 10^{-3}$ – 0,1
Piaski i żwiry suche	2 – 4	$8,3 \cdot 10^{-5}$ – $4,0 \cdot 10^{-3}$
Woda	81	0,001 – 0,1
* parafinowany mahoń		

Pole elektryczne w przestrzeni powietrznej otaczającej elementy pod napięciem, a także pole w znajdujących się w pobliżu liniowych, jednorodnych i izotropowych dielektrykach można opisać skalarnym potencjałem elektrycznym spełniającym równanie Laplace'a:

$$\Delta \varphi = 0 \quad (3.1)$$

Na brzegu  $\Gamma_1^{1)}$ , na którym znany jest potencjał elektryczny, zadaje się warunek brzegowy Dirichleta:

$$\varphi \Big|_{\Gamma_1} = \bar{\varphi}_1 \quad (3.2)$$

Na brzegu  $\Gamma_2$ , na którym wiadomo, że potencjał przyjmuje stałą nieznaną wartość, można zapisać:

$$\varphi \Big|_{\Gamma_2} = C \quad (3.3)$$

W tym przypadku wprowadza się dodatkowo warunek zerowania się całkowitego ładunku elektrycznego na  $\Gamma_2$ . Warunek ten wynika z prawa Gaussa i ma następującą postać:

<sup>1)</sup> Literą  $\Gamma$  oznaczany jest brzeg obszaru, który w przypadku zagadnień dwuwymiarowych jest krzywą płaską, natomiast w przypadku zagadnień trójwymiarowych jest powierzchnią.

$$\int_{\Gamma_2} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Gamma = 0 \quad (3.4)$$

Na granicy środowisk o różnych parametrach elektrycznych, gdzie nie ma podstaw do zastosowania warunku Dirichleta, zadaje się warunki zgodności pola. W ogólnym przypadku, gdy mamy do czynienia z dielektrykami stratnymi o określonej konduktywności, powyższe warunki można sformułować wykorzystując pojęcie efektywnej zespolonej przenikalności elektrycznej środowiska:

$$\varepsilon_e = \varepsilon - j \frac{\gamma}{\omega} \quad (3.5)$$

gdzie:

$\varepsilon$  – zespolona przenikalność elektryczna, której część urojona odpowiada za straty dielektryczne

$\gamma$  – konduktywność

$\omega$  – pulsacja

$$j = \sqrt{-1}$$

W rozważanym przypadku mamy:

$$\operatorname{div}(\varepsilon_e \mathbf{E}) = 0 \quad (3.6)$$

Z powyższego wynika warunek zgodności pola na granicy  $\Gamma_I$  między dwoma dielektrykami rzeczywistymi:

$$\mathbf{n} \cdot \left( \varepsilon_{e1} \mathbf{E} \Big|_{r_1^1} - \varepsilon_{e2} \mathbf{E} \Big|_{r_1^2} \right) = 0 \quad (3.7)$$

gdzie  $\mathbf{n}$  jest wektorem normalnym do powierzchni granicznej. Indeksy 1 i 2 określają przylegające do siebie podobszary (dielektryki). W pracy przyjmuje się konwencję, że indeks górny przy literze oznaczającej granicę rozdzielającą dwa środowiska wskazuje, po której stronie tej granicy określana jest wielkość polowa. Podany wcześniej warunek można zapisać z wykorzystaniem skalarnego potencjału elektrycznego:

$$\varepsilon_{e1} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{r_1^1} - \varepsilon_{e2} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{r_1^2} = 0 \quad (3.8)$$

Ponadto obowiązuje warunek ciągłości potencjału  $\varphi$  na granicy między środowiskami:

$$\varphi \Big|_{r_1^1} = \varphi \Big|_{r_1^2} \quad (3.9)$$

Na zakończenie tego punktu wykazane będzie, że na powierzchni obiektów betonowych można w przybliżeniu stosować jednorodny warunek brzegowy Dirichleta. Przyjmując na podstawie Tabeli 3.1 minimalne wartości  $\varepsilon$  i  $\gamma$  dla betonu, otrzymuje się:

$$|\varepsilon_e| = 1,46 \cdot 10^{-7} \text{ F/m} \gg \varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$$

gdzie  $\varepsilon_0$  oznacza stałą elektryczną. Z powyższego wynika, że na brzegu uziemionych obiektów betonowych można przyjmować jednorodny warunek Dirichleta. Praktyka wykazuje, że tak samo można traktować budynki zbudowane z cegły.

### 3.3. Uproszczony model pola magnetycznego nie uwzględniający prądów wirowych

Poniżej przedstawiono założenia przyjęte w uproszczonym modelu fizycznym, a następnie sformułowano zagadnienia brzegowe dla pola magnetycznego – zarówno w sąsiedztwie linii przesyłowych, jak i na terenie napowietrznych i wewnętrznych stacji elektroenergetycznych. Nie uwzględniono w tym miejscu ekranów elektromagnetycznych. Uczyniono to w podrozdziale dotyczącym zjawisk wiropądowych.

Ogólnie rzecz biorąc, jak wcześniej wspomniano, pierwotne pole magnetyczne wzbudzone jest przez przewody z prądem. W wyniku oddziaływania elementów i obiektów metalowych pole pierwotne ulega deformacji. W pierwszej kolejności podano uproszczenia dotyczące źródeł pola pierwotnego.

Przewody robocze linii WN oraz giętkie szynoprzewody na terenie stacji elektroenergetycznych przybierające kształt linii łańcuchowych, podobnie jak w przypadku pola elektrycznego, aproksymowane są parabolami. W przypadku sztywnych przewodów w stacjach elektroenergetycznych przyjmuje się rzeczywisty kształt torów prądowych.

W przypadku ferromagnetycznych obiektów zniekształcających rozkłady pola magnetycznego, takich jak: konstrukcje wsporcze, kadzie transformatorów, ekrany magnetyczne, parkany itp., w prezentowanym tutaj uproszczonym modelu pola pomija się zjawisko prądów wirowych, zakładając dominujące oddziaływanie efektu polegającego na koncentracji pola wokół obiektu ferromagnetycznego. Przyjmuje się, że przenikalność magnetyczna wspomnianych elementów, ze względu na niskie wartości analizowanego pola (brak nasycenia), jest nieskończenie duża (ferromagnetyk idealny  $\mu = \infty$ ).

Przy tak przyjętych założeniach upraszczających sformułowano będzie zagadnienie brzegowe. Pole magnetyczne wzbudzone przez prądy w przewodach, w sąsiedztwie których znajdują się elementy ferromagnetyczne, można przedstawić jako superpozycję pola pierwotnego  $\mathbf{H}_0$  (występującego pod nieobecność ferromagnetyka) i pola wtórnego  $\mathbf{H}_m$  wynikającego z namagnesowania obiektu ferromagnetycznego:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_m \quad (3.10)$$

Pole pierwotne wyznaczane jest z prawa Biota-Savarta:

$$\mathbf{H}_0(P) = -\frac{I}{4\pi} \int_{L_I} \frac{\mathbf{r} \times d\mathbf{l}_1}{r^3} \quad (3.11)$$

gdzie:

$L_I$  – linia reprezentująca przewód z prądem

$\mathbf{H}_0(P)$  – wektor natężenia pola pierwotnego w punkcie  $P$

$I$  – prąd w przewodzie

$\mathbf{r}$  – wektor o długości  $r$  skierowany od przewodu z prądem do punktu  $P$

$d\mathbf{l}_1$  – wektorowy element różniczkowy zorientowany zgodnie z kierunkiem prądu.

W całym obszarze analizy istnieje potencjał skalarny  $\psi_m$  wtórnego pola magnetycznego:

$$\mathbf{H}_m = -\text{grad } \psi_m \quad (3.12)$$

oraz wszędzie poza obszarami prądowymi można zdefiniować potencjał  $\psi_0$  pierwotnego pola magnetycznego:

$$\mathbf{H}_0 = -\text{grad } \psi_0 \quad (3.13)$$

Potencjał  $\psi_m$  spełnia równanie Laplace'a w całej przestrzeni powietrznej otaczającej ferromagnetyki:

$$\nabla^2 \psi_m = 0 \quad (3.14)$$

Całkowity potencjał skalarny pola magnetycznego poza obszarami prądowymi dany jest wzorem:

$$\psi = \psi_0 + \psi_m \quad (3.15)$$

Na brzegu  $\Gamma_f$  idealnego ferromagnetyka, ze względu na brak składowej stycznej natężenia pola magnetycznego, potencjał  $\psi$  przyjmuje wartość stałą:

$$\psi|_{\Gamma_f} = C \quad (3.16)$$

Ponieważ  $C$  jest wielkością niewiadomą, najczęściej różną dla każdego obiektu ferromagnetycznego, to dla uzyskania jednoznacznie postawionego zagadnienia brzegowego konieczne jest uwzględnienie dodatkowego równania:

$$\int_{\Gamma_f} \frac{\partial \psi}{\partial n} d\Gamma = 0 \quad (3.17)$$

które wynika z tak zwanego magnetycznego prawa Gaussa [11].

Pozostaje jeszcze do omówienia sposób obliczania potencjału  $\psi_0$  występującego we wzorze (3.15). Ogólnie rzecz biorąc, skalarny potencjał magnetyczny w dowolnym punkcie  $P_i$  znajdującym się poza obszarami prądowymi można wyrazić poprzez całkę

krzywoliniową po drodze w zasadzie dowolnej, ale nie obejmującej obszarów prądowych, to znaczy nie przecinającej płaszczyzny nieciągłości potencjału:

$$\psi(P_i) - \psi(P_0) = - \int_{P_0}^{P_i} \mathbf{H}(P) \cdot d\mathbf{l}_2 \quad (3.18)$$

gdzie  $P_0$  jest dowolnie wybranym punktem, w którym ustala się potencjał odniesienia, a  $d\mathbf{l}_2$  jest wektorowym elementem różniczkowym stycznym do drogi całkowania. Ponieważ potencjał określony jest z dokładnością do stałej, to można przyjąć, że  $\psi(P_0) = 0$ . Otrzymuje się wtedy:

$$\psi(P_i) = - \int_{P_0}^{P_i} \mathbf{H}(P) \cdot d\mathbf{l}_2 \quad (3.19)$$

Potencjał skalarny pola pierwotnego wyznacza się podstawiając  $\mathbf{H}_0$  zgodnie ze wzorem (3.11) do całki (3.19):

$$\psi_0(P_i) = \frac{I}{4\pi} \int_{P_0}^{P_i} \int_{L_l} \frac{\mathbf{r} \times d\mathbf{l}_1}{r^3} \cdot d\mathbf{l}_2 \quad (3.20)$$

Analityczne wzory do wyznaczania całki (3.20), gdy element z prądem  $L_l$  jest odcinkiem prostoliniowym, zamieszczono w pracy [82].

### 3.4. Modele pola magnetycznego uwzględniające występowanie prądów wirowych

W przypadku, gdy poza obiektami, które można traktować jako idealne ferromagnetyki, w środowisku występują dobrze przewodzące elementy niemagnetyczne (np. ekrany elektromagnetyczne), konieczne jest uwzględnienie oddziaływania prądów wirowych deformujących rozkłady pola magnetycznego. W niniejszym punkcie przedstawiono model matematyczny pola uwzględniający występowanie prądów wirowych, przy czym ze względu na istotne różnice w sformułowaniach zagadnienia dwu- i trójwymiarowe rozważono oddzielnie.

#### 3.4.1. Zagadnienia dwuwymiarowe

W przypadku, gdy rozważane zagadnienie można traktować jako dwuwymiarowe, na ogół do jego rozwiązania wykorzystuje się odpowiedni potencjał wektorowy, który ma tylko jedną składową. Jeżeli wektor gęstości prądu ma wyłącznie składową  $J_z$ , skierowaną prostopadle do płaszczyzny  $xy$ , na której analizowany jest problem, to wówczas stosuje się wektorowy potencjał magnetyczny  $\mathbf{A}$  określony zależnością:

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad (3.21)$$

Ma on, podobnie jak gęstość prądu, tylko składową w kierunku osi  $z$ . W tym przypadku powyższy potencjał  $\mathbf{A} = k\mathbf{A}$  spełnia następujące skalarne równanie różniczkowe:

$$\Delta A - j\omega\gamma\mu A = -\mu J_e + \gamma\mu \text{grad}_z\varphi \quad (3.22)$$

gdzie  $\omega$ ,  $\gamma$  i  $\mu$  oznaczają odpowiednio pulsację, konduktywność i przenikalność magnetyczną,  $J_e$  jest składową  $z$ -ową gęstości prądu wzbudzenia, a  $\varphi$  jest skalarnym potencjałem elektrycznym. W (3.22) należy uwzględnić, że:

- w obszarze nieprzewodzącym  $\gamma = 0$  i  $J_e = 0$
- w obszarze z prądem wzbudzenia  $J_e \neq 0$  oraz formalnie  $\gamma = 0$
- w obszarze wiroprowodowym  $\gamma \neq 0$  i  $J_e = 0$

W obszarze wiroprowodowym wygodnie jest wprowadzić zmodyfikowany wektorowy potencjał magnetyczny [43, 44, 99], którego składowa  $z$ -owa ma postać:

$$A' = A + \frac{1}{j\omega} \text{grad}_z\varphi \quad (3.23)$$

Uwzględniając, że w zagadnieniach dwuwymiarowych  $\text{grad}_z\varphi$  ma stałą wartość, łatwo wykazać, że  $A'$  spełnia jednorodne równanie Helmholtza:

$$\Delta A' - j\omega\gamma\mu A' = 0 \quad (3.24)$$

Powyższy zabieg sprowadzający niejednorodne równanie Helmholtza do równania jednorodnego pozwala na uniknięcie konieczności dyskretyzacji obszaru wiroprowodowego podczas rozwiązywania zagadnienia metodą elementów brzegowych. Na granicy  $\Gamma_I$  między obszarem wiroprowodowym a powietrzem obowiązują następujące warunki zgodności pola [43, 44, 99]:

$$A \Big|_{\Gamma_I^w} = A \Big|_{\Gamma_I^0} \quad (3.25)$$

$$\left( A' - \frac{1}{j\omega} \text{grad}_z\varphi \right) \Big|_{\Gamma_I^w} = A \Big|_{\Gamma_I^0} \quad (3.26)$$

$$\frac{1}{\mu_w} \frac{\partial A'}{\partial n} \Big|_{\Gamma_I^w} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A}{\partial n} \Big|_{\Gamma_I^0} \quad (3.27)$$

gdzie indeks  $w$  oznacza obszar wiroprowodowy, a indeks  $0$  oznacza powietrze. Powyższe warunki wynikają z ciągłości składowej normalnej indukcji magnetycznej oraz z ciągłości składowej stycznej natężenia pola magnetycznego. Ponieważ  $\text{grad}_z\varphi$  ma



nieznaną wartość, to w celu uzyskania jednoznaczności zagadnienia brzegowego wprowadza się tzw. równanie więzów [43, 44, 99] w postaci:

$$\int_{\Gamma_i} \frac{1}{\mu_w} \frac{\partial A'}{\partial n} \Big|_{\Gamma_i^w} d\Gamma = I_i \quad (3.28)$$

Powyższe równanie wynika z prawa Ampère'a, przy czym  $I_i$  jest całkowitym prądem w obszarze wiropądowym.

Na brzegu  $\Gamma_f$  idealnego ferromagnetyka znika składowa styczna natężenia pola magnetycznego, a zatem spełniony jest jednorodny warunek Neumanna:

$$\frac{\partial A}{\partial n} \Big|_{\Gamma_f} = 0 \quad (3.29)$$

Równanie różniczkowe (3.22) oraz równanie (3.24) dla podobszaru wiropądowego wraz z warunkami zgodności pola (3.26) i (3.27), równaniem więzów (3.28) i warunkiem brzegowym Neumanna (3.29) stanowią zagadnienie brzegowe dla rozważanego tutaj problemu. Powyższy model może być stosowany w analizie pola magnetycznego w sąsiedztwie szynoprzewodów [129, 130], także w przypadku, gdy równoległe do nich usytuowany jest ekran elektromagnetyczny [108].

Zastosowanie MEB do analizy dwuwymiarowych zagadnień wiropądowych przedstawiono szerzej w artykułach [99 – 102] oraz w pracach autora [42 – 45] dotyczących ekranowania elektromagnetycznego w strefach skrajnych turbogeneratorów.

### 3.4.2. Zagadnienia trójwymiarowe

Numeryczne modelowanie trójwymiarowych problemów wiropądowych jest zagadnieniem skomplikowanym, wymagającym dużej mocy obliczeniowej komputera, które do niedawna mogło być realizowane w zasadzie tylko na superkomputerach czy transputerach. Obserwowany w ostatnich latach dynamiczny postęp w dziedzinie konstrukcji komputerów osobistych stwarza coraz lepsze warunki do rozwiązywania omawianych tutaj zagadnień.

Autorzy publikowanych na świecie prac wykorzystują w tym celu głównie metodę elementów skończonych, np. [1, 34, 40, 68, 91, 92], rzadziej zaś metodę elementów brzegowych [40, 41, 72, 75, 76, 83, 104, 123]. Prace te dotyczą jeszcze stosunkowo prostych struktur i konfiguracji geometrycznych.

Wspomniane wcześniej, zagraniczne, komercyjne programy komputerowe ogólnego zastosowania, do analizy trójwymiarowych pól elektromagnetycznych, takie jak PC Opera 3D czy Flux 3D, w chwili obecnej są już wprawdzie wyposażone w moduły do analizy trójwymiarowych zagadnień wiropądowych metodą elementów skończonych, ale traktują ten problem dość wycinkowo (duże ograniczenia nałożone na klasę rozwiązywanych zagadnień) i nie są jeszcze do końca dopracowane.

W ogólnym przypadku, gdy problem ze względu na jego geometrię należy traktować jako w pełni trójwymiarowy, zagadnienie brzegowe zwykle opisywane jest wektorowym równaniem różniczkowym drugiego rzędu, w którym występują wszystkie

trzy składowe geometryczne wielkości polowych. Zastosowanie wektorowego potencjału magnetycznego  $\mathbf{A}$  nie prowadzi w przypadku MEB do zmniejszenia liczby koniecznych do uwzględnienia składowych geometrycznych, tak jak ma to miejsce dla zagadnienia dwuwymiarowego. Dlatego też tak zwany model  $\mathbf{A}-\varphi$  [33], który często stosowany jest w sformułowaniach MES, nie będzie tutaj rozważany.

Zmniejszenie liczby składowych geometrycznych analizowanej wielkości polowej niekiedy jest możliwe poprzez wykorzystanie pewnych cech rozważanego układu trójwymiarowego. Taka sytuacja występuje np. w analizie prądów wirowych indukowanych w strukturach blachowanych. Można wtedy pominąć składową gęstości prądu w kierunku prostopadłym do powierzchni blach. W tym przypadku stosowany jest tak zwany wektorowy potencjał elektryczny  $\mathbf{T}$ , który związany jest z gęstością prądu poniższą zależnością:

$$\mathbf{J} = \text{rot } \mathbf{T} \quad (3.30)$$

Wraz ze skalarnym potencjałem magnetycznym  $\psi$ , oznaczanym często w literaturze przez  $\Omega$ , tworzy on tzw. model  $\mathbf{T}-\psi$  ( $\mathbf{T}-\Omega$ ) [15, 16]. Nie jest to jednak model w pełni trójwymiarowy i ze względu na mniejsze znaczenie tego podejścia dla omawianych w pracy zagadnień, został on tutaj tylko zasygnalizowany.

Niektórzy autorzy stosują model oparty na tak zwanych mierzalnych wielkościach polowych. W rozważanym przypadku będzie to natężenie pola elektrycznego i magnetycznego tworzące tak zwany model  $\mathbf{E}-\mathbf{H}$  [40]. Stosując równania Maxwella z pominięciem prądu przesunięcia, otrzymuje się następujące dwa niesprężone równania różniczkowe drugiego rzędu:

$$\text{rot rot } \mathbf{E} + j\omega\gamma\mu\mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{J}_e \quad (3.31)$$

$$\text{rot rot } \mathbf{H} + j\omega\gamma\mu\mathbf{H} = j\omega\mu \text{ rot } \mathbf{J}_e \quad (3.32)$$

Podobnie jak poprzednio przyjmuje się:

- w obszarze nieprzewodzącym  $\gamma = 0$  i  $\mathbf{J}_e = 0$
- w obszarze z prądem wzbudzenia  $\mathbf{J}_e \neq 0$  oraz formalnie  $\gamma = 0$
- w obszarze wiropądowym  $\gamma \neq 0$  i  $\mathbf{J}_e = 0$

Na granicy  $\Gamma_I$  między podobszarem wiropądowym a powietrzem obowiązują następujące warunki zgodności pola:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} \Big|_{\Gamma_I^w} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} \Big|_{\Gamma_I^0} \quad (3.33)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H} \Big|_{\Gamma_I^w} = \mathbf{n} \times \mathbf{H} \Big|_{\Gamma_I^0} \quad (3.34)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{J} \Big|_{\Gamma_I} = 0 \quad (3.35)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} \Big|_{\Gamma_l^w} = \mathbf{n} \times \mathbf{E} \Big|_{\Gamma_l^0} \quad (3.36)$$

Wykorzystując równania (3.31) i (3.32) wraz z warunkami zgodności pola (3.33) – (3.36), formułuje się równania całkowe dla bezpośredniego wariantu MEB opisującego trójwymiarowe zagadnienie wiropądowe.

Z punktu widzenia zastosowania MEB najbardziej efektywny wydaje się pośredni model  $\mathbf{H}$ – $\psi$  [72, 73], gdzie  $\mathbf{H}$  jest natężeniem pola magnetycznego w obszarze wiropądowym, a  $\psi$  jest skalarnym potencjałem magnetycznym w obszarze powietrznym. W obszarze powietrznym pole opisane jest identycznie jak w modelu nie uwzględniającym obszarów wiropądowych. W literaturze model ten nazywany jest zwykle modelem  $\mathbf{H}$ – $\varphi$ , tutaj jednak, dla odróżnienia od skalarnego potencjału elektrycznego, skalarny potencjał magnetyczny oznaczany jest literą  $\psi$ .

Uwzględniając w (3.32) fakt, że  $\text{div } \mathbf{H} = 0$ , otrzymuje się równanie obowiązujące w obszarze wiropądowym:

$$\Delta \mathbf{H} - j\omega\gamma\mu\mathbf{H} = 0 \quad (3.37)$$

Poza obszarami prądowymi skalarny potencjał magnetyczny pola wtórnego spełnia równanie Laplace'a:

$$\Delta \psi_m = 0 \quad (3.38)$$

Warunki zgodności pola na granicy  $\Gamma_l$  między obszarem wiropądowym a powietrzem wynikają z ciągłości składowej normalnej indukcji magnetycznej oraz z ciągłości składowej stycznej natężenia pola magnetycznego:

$$\mathbf{n} \cdot \mu_0 (\mathbf{H}_0 - \text{grad } \psi_m) \Big|_{\Gamma_l^0} = \mathbf{n} \cdot \mu_w \mathbf{H} \Big|_{\Gamma_l^w} \quad (3.39)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_0 - \text{grad } \psi_m) \Big|_{\Gamma_l^0} = \mathbf{n} \times \mathbf{H} \Big|_{\Gamma_l^w} \quad (3.40)$$

gdzie  $\mathbf{H}_0$  jest pierwotnym polem magnetycznym. Na powierzchniach idealnych ferromagnetyków obowiązują warunki (3.16) i (3.17), identycznie jak w przypadku braku obszarów wiropądowych.

## 4. METODA ELEMENTÓW BRZEGOWYCH W ŚRODOWISKACH STREFOWO NIEJEDNORODNYCH

### 4.1. Uwagi ogólne

Metoda elementów brzegowych jest współcześnie jedną z najczęściej stosowanych technik numerycznych analizy pól. Matematyczną podstawę klasycznego

ujęcia tej metody stanowi wspomniana wcześniej tożsamość całkowa, zwana drugim wzorem Greena. Wzór ten znany był już w pierwszej połowie XIX wieku, jednak rozwój metod całkowo-brzegowych, w tym MEB, nastąpił dopiero w latach 70-tych XX wieku, co związane było z pojawieniem się pierwszych komputerów o znacznej jak na owe czasy mocy obliczeniowej, np. Cyber 70 firmy CDC, umożliwiającymi rozwiązywanie dość dużych układów równań algebraicznych. Pierwsze zastosowania MEB dotyczyły pól mechanicznych opisanych równaniami teorii sprężystości [12]. Nieco później wykorzystano MEB do analizy zagadnień pola elektromagnetycznego [99–102]. Dalszy rozwój i popularyzacja metod całkowo-brzegowych nastąpił w latach 80-tych ubiegłego wieku, kiedy to pojawiły się komputery typu workstation oraz komputery osobiste. Obserwowany w ostatnich latach gwałtowny postęp w dziedzinie konstrukcji komputerów osobistych oraz rozwój numerycznych metod analizy pól pozwala na rozwiązywanie coraz bardziej złożonych zagadnień brzegowych.

Ogólnie rzecz biorąc, MEB polega na sprowadzeniu problemu opisanego równaniem bądź układem równań różniczkowych cząstkowych drugiego rzędu z odpowiednimi warunkami granicznymi do ekwiwalentnego równania lub układu równań całkowo-brzegowych Fredholma [87, 107], które poprzez algebraizację rozwiązywane są w sposób przybliżony. Układ równań algebraicznych otrzymuje się poprzez dyskretyzację brzegu z jednoczesną aproksymacją funkcji niewiadomych na powstałych w wyniku dyskretyzacji elementach brzegowych. Po rozwiązaniu układu równań algebraicznych, korzystając z odpowiedniego wzoru, wyznacza się rozwiązanie zagadnienia granicznego w dowolnym punkcie wewnętrznym rozważanego obszaru. Wyżej wspomniane równania Fredholma można otrzymać stosując drugi wzór Greena z rozwiązaniem podstawowym właściwym dla rozważanego zagadnienia granicznego. Prowadzi to do tak zwanego bezpośredniego wariantu MEB. Można też wykorzystać teorię potencjałów, co prowadzi do tzw. pośredniego sformułowania MEB. W przypadku równania Laplace'a są to tak zwane potencjały niutonowskie [87, 107], dla równań parabolicznych są to potencjały cieplne (dyfuzyjne) [87, 107], natomiast w przypadku zagadnień hiperbolicznych mamy do czynienia z potencjałami opóźnionymi bądź przedwczesnymi [33, 111]. W niniejszej pracy ograniczono się do zagadnień typu eliptycznego opisanych równaniami Laplace'a, Poissona i Helmholtza. W dalszej części tego rozdziału przedstawiono bezpośrednie i pośrednie sformułowania brzegowych równań całkowych, będących podstawą do zastosowania MEB dla zagadnień strefowo niejednorodnych, opisanych wyżej wspomnianymi równaniami różniczkowymi cząstkowymi drugiego rzędu.

## 4.2. Warianty MEB wykorzystujące drugą tożsamość Greena

W niniejszym punkcie przedstawiono równania całkowe będące podstawą do sformułowania bezpośredniego wariantu MEB dla zagadnień stacjonarnych i quasi-stacjonarnych w środowiskach strefowo niejednorodnych. Rozważono zagadnienia opisane zarówno skalarnymi równaniami różniczkowymi drugiego rzędu, jak i równaniami wektorowymi.

#### 4.2.1. Podejście bezpośrednie dla zagadnień opisanych skalarnymi równaniami różniczkowymi drugiego rzędu

Jak wspomniano, bezpośredni wariant MEB dla zagadnień stacjonarnych i quasistacjonarnych opisanych skalarnymi równaniami różniczkowymi formułuje się, wykorzystując drugi wzór Greena, który ma następującą symetryczną postać:

$$\int_{\Omega} (w\Delta u - u\Delta w) d\Omega = \int_{\Gamma} \left( w \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial w}{\partial n} \right) d\Gamma \quad (4.1)$$

gdzie brzeg  $\Gamma$  obszaru  $\Omega$  jest dostatecznie regularny, aby można było stosować twierdzenie Gaussa. Funkcje  $u$  i  $w$  są klasy  $C^2$  w obszarze  $\Omega$  i klasy  $C$  na jego brzegu. Wektor normalny zorientowany jest zewnątrz w stosunku do obszaru.

W pierwszej kolejności rozważono zagadnienia dla równania Laplace'a. Po podstawieniu do wzoru (4.1) w miejsce funkcji  $u$  i  $w$  odpowiednio funkcji  $\varphi$  spełniającej równanie Laplace'a oraz rozwiązania podstawowego  $G_L(P, P_i)$  tego równania i po zastosowaniu znanych przejść granicznych otrzymuje się następujący wzór całkowy:

$$c_i \varphi(P_i) = \int_{\Gamma} G_L(P, P_i) \frac{\partial \varphi(P)}{\partial n} dP - \int_{\Gamma} \frac{\partial G_L(P, P_i)}{\partial n} \varphi(P) dP \quad (4.2)$$

Rozwiązanie podstawowe spełnia następujące równanie:

$$\Delta G_L(P, P_i) = -\delta(P, P_i) \quad (4.3)$$

gdzie  $\delta(P, P_i)$  jest funkcją Diraca. Wyraża się ono następującym wzorem:

$$G_L(P, P_i) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} & \text{dla } n=2 \\ \frac{1}{4\pi r} & \text{dla } n=3 \end{cases} \quad (4.4)$$

gdzie  $n$  jest liczbą wymiarów geometrycznych,  $r$  jest odległością między punktem źródłowym  $P$  i punktem obserwacji  $P_i$ :

$$r = \begin{cases} \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} & \text{dla } n=2 \\ \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2} & \text{dla } n=3 \end{cases} \quad (4.5)$$

Współczynnik  $c_i$  przyjmuje następujące wartości:

$$c_i = \begin{cases} 1 & \text{w punktach wewnętrznych obszaru} \\ 0,5 & \text{w punktach na gładkim brzegu} \\ 0 & \text{w punktach na zewnątrz obszaru} \end{cases} \quad (4.6)$$

Dla porządku należy dodać, że tożsamość (4.2) jest prawdziwa zarówno w obszarach zamkniętych, jak i w tzw. obszarach z brzegiem otwartym.

Gdy na  $\Gamma$  zadany jest warunek Dirichleta:

$$\varphi|_{\Gamma} = \bar{\varphi} \quad (4.7)$$

z tożsamości (4.2) otrzymuje się brzegowe równanie Fredholma pierwszego rodzaju:

$$\int_{\Gamma} G_L(P, P_i) q dP = \frac{1}{2} \bar{\varphi}(P_i) + \int_{\Gamma} \frac{\partial G_L(P, P_i)}{\partial n} \bar{\varphi}(P) dP \quad (4.8)$$

gdzie suma po prawej stronie jest funkcją znaną, a funkcją niewiadomą  $q$  jest pochodna  $\partial\varphi/\partial n$  na brzegu. W przypadku, gdy na  $\Gamma$  zadany jest warunek Neumanna:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}|_{\Gamma} = \bar{q} \quad (4.9)$$

ze wzoru (4.2) wynika brzegowe równanie Fredholma drugiego rodzaju:

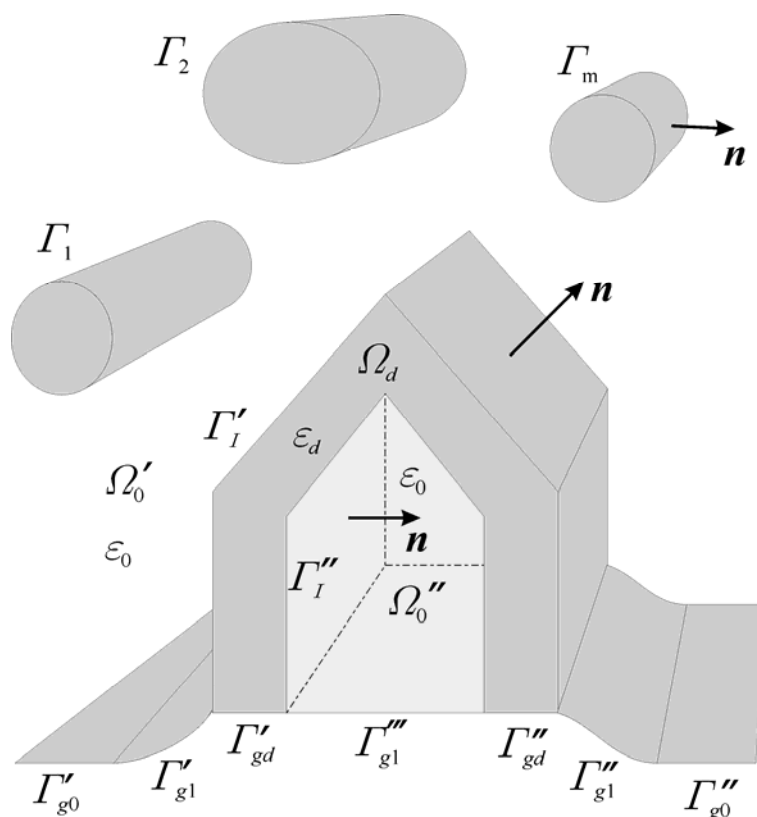
$$\frac{1}{2} \varphi(P_i) + \int_{\Gamma} \frac{\partial G_L(P, P_i)}{\partial n} \varphi(P) dP = \int_{\Gamma} G_L(P, P_i) \bar{q} dP \quad (4.10)$$

gdzie niewiadomą jest funkcja  $\varphi$ . W sytuacji, gdy na jednej części brzegu zadany jest warunek Neumanna, a na drugiej warunek Dirichleta, otrzymuje się układ dwóch równań Fredholma, odpowiednio pierwszego i drugiego rodzaju.

### Sformułowanie równań całkowo-brzegowych dla problemu pola elektrycznego

Poniżej przedstawiono zagadnienie Laplace'a w nieograniczonym, strefowo niejednorodnym obszarze  $\Omega$ , pokazanym na rysunku 4.1. Składa się on z otwartego, wielospójnego podobszaru  $\Omega_0$  o przenikalności elektrycznej  $\varepsilon_0$  oraz z zamkniętego podobszaru  $\Omega_d$  o przenikalności  $\varepsilon_d$ . Na brzegach  $\Gamma_j$ , gdzie  $j = 1, 2, \dots, m$ , zadane są warunki Dirichleta, przy czym potencjał ma stałą wartość na każdym z brzegów. Zadanie to odpowiada problemowi wyznaczenia pola elektrycznego pod linią wysokiego napięcia przebiegającą w sąsiedztwie budynku drewnianego.

Aby otrzymać układ równań całkowych opisujących rozważane zagadnienie, w pierwszej kolejności formułuje się równania niezależnie dla podobszarów  $\Omega_0$  i  $\Omega_d$ , a następnie poprzez uwzględnienie warunków zgodności pola na granicy  $\Gamma_l$  eliminuje



Rys. 4.1. Strefowo niejednorodny obszar  $\Omega$  z otwartym wielospójnym podobszarem  $\Omega_0 = \Omega_0' \cup \Omega_0''$  o przenikalności elektrycznej  $\varepsilon_0$ , z zamkniętym podobszarem  $\Omega_d$  o przenikalności elektrycznej  $\varepsilon_d$  oraz z obiektami o brzegach  $\Gamma_j$ , na których znany jest potencjał elektryczny

się pochodną normalną potencjału na tej granicy. Warunki zgodności pola mają następującą postać:

$$\varphi|_{\Gamma_I^0} = \varphi|_{\Gamma_I^d} \quad (4.11)$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\Gamma_I^0} = \varepsilon_d \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\Gamma_I^d} \quad (4.12)$$

Ostatecznie otrzymuje się następujący układ równań całkowych [52]:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\varepsilon_0 + \varepsilon_d)\varphi(P_i) - (\varepsilon_0 - \varepsilon_d) \int_{\Gamma_I} \frac{\partial G_L(P, P_i)}{\partial n} \varphi(P) dP + \varepsilon_0 \sum_{j=1}^m \int_{\Gamma_j} G_L(P, P_i) \frac{\partial \varphi(P)}{\partial n} dP + \\ & + \varepsilon_0 \int_{\Gamma_{g0} \cup \Gamma_{g1}} G_L(P, P_i) \frac{\partial \varphi(P)}{\partial n} dP - \varepsilon_d \int_{\Gamma_{gd}} G_L(P, P_i) \frac{\partial \varphi(P)}{\partial n} dP = 0 \quad \text{dla } P_i \in \Gamma_I \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned}
& (\varepsilon_0 - \varepsilon_d) \int_{\Gamma_i} \frac{\partial G_L(P, P_i)}{\partial n} \varphi(P) dP - \varepsilon_0 \sum_{j=1}^m \int_{\Gamma_j} G_L(P, P_i) \frac{\partial \varphi(P)}{\partial n} dP + \\
& + \varepsilon_0 \int_{\Gamma_{g0} \cup \Gamma_{g1}} G_L(P, P_i) \frac{\partial \varphi(P)}{\partial n} dP + \varepsilon_d \int_{\Gamma_{gd}} G_L(P, P_i) \frac{\partial \varphi(P)}{\partial n} dP = \varepsilon_0 \varphi(P_i) \quad \text{dla } P_i \in \Gamma_j
\end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}
& (\varepsilon_0 - \varepsilon_d) \int_{\Gamma_i} \frac{\partial G_L(P, P_i)}{\partial n} \varphi(P) dP - \varepsilon_0 \sum_{j=1}^m \int_{\Gamma_j} G_L(P, P_i) \frac{\partial \varphi(P)}{\partial n} dP - \\
& + \varepsilon_0 \int_{\Gamma_{g0} \cup \Gamma_{g1}} G_L(P, P_i) \frac{\partial \varphi(P)}{\partial n} dP + \varepsilon_d \int_{\Gamma_{gd}} G_L(P, P_i) \frac{\partial \varphi(P)}{\partial n} dP = 0 \quad \text{dla } P_i \in \Gamma_g
\end{aligned} \tag{4.15}$$

gdzie:  $\Omega_0 = \Omega_0' \cup \Omega_0''$ ,  $\Gamma_i = \Gamma_i' \cup \Gamma_i''$ ,  $\Gamma_{gd} = \Gamma_{gd}' \cup \Gamma_{gd}''$ ,  $\Gamma_{g0} = \Gamma_{g0}' \cup \Gamma_{g0}''$ ,  
 $\Gamma_{g1} = \Gamma_{g1}' \cup \Gamma_{g1}'' \cup \Gamma_{g1}'''$ ,  $\Gamma_g = \Gamma_{g0} \cup \Gamma_{g1} \cup \Gamma_{gd}$ .

Brzeg  $\Gamma_g$  reprezentuje powierzchnię ziemi, która może być pofałdowana. Aby wyeliminować konieczność obliczania całek po płaskich powierzchniach  $\Gamma_{g0}$ , położonych na poziomie zerowym, wprowadza się tak zwane antysymetryczne rozwiązanie podstawowe [13] w postaci:

$$G_L^*(P, P_i) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{r'}{r} & \text{dla } n=2 \\ \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right) & \text{dla } n=3 \end{cases} \tag{4.16}$$

gdzie  $r$  dane jest wzorem (4.5), a  $r'$  wyraża się jak niżej:

$$r' = \begin{cases} \sqrt{(x-x_i)^2 + (y+y_i)^2} & \text{dla } n=2 \\ \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z+z_i)^2} & \text{dla } n=3 \end{cases} \tag{4.17}$$

Przy wyprowadzeniu równań (4.13) – (4.15) uwzględniono znaną zależność:

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial G_L(P, P_i)}{\partial n} dP = \begin{cases} 1 & \text{w punktach wewnętrznych obszaru} \\ 0,5 & \text{w punktach na gładkim brzegu} \\ 0 & \text{w punktach na zewnątrz obszaru} \end{cases} \tag{4.18}$$



oraz fakt, że potencjał ma stałą wartość na brzegach  $\Gamma_j$ . Wyprowadzone równania całkowe (4.13) – (4.15) stanowią podstawę do zastosowania bezpośredniego wariantu MEB z eliminacją pochodnej normalnej na granicy między podobszarami o różnych parametrach materiałowych. W podobny sposób można wyprowadzić równania dla wariantu MEB z eliminacją potencjału na granicy  $\Gamma_l$  między podobszarami  $\Omega_0$  i  $\Omega_d$ .

### Sformułowanie równań całkowych dla dwuwymiarowego problemu pola magnetycznego uwzględniającego występowanie prądów wirowych

Obecnie rozważone będzie zagadnienie dwuwymiarowe (rys.4.2) odpowiadające problemowi wyznaczania pola magnetycznego w otwartym obszarze  $\Omega$ , w którym występuje podobszar wiroprądowy  $\Omega_w$ , podobszar z prądem wzbudzenia  $\Omega_e$  oraz idealny ferromagnetyk o brzegu  $\Gamma_f$ . Pole w  $\Omega_w$  opisane jest zmodyfikowanym wektorowym potencjałem magnetycznym, którego składowa z-owa  $A'(P)$  spełnia skalarnie równanie Helmholtza (3.24). Dodając i odejmując pod całką obszarową w wzorze Greena wielkość  $\alpha^2 u w$  otrzymuje się następującą tożsamość:

$$\int_{\Omega} \left[ w(\Delta u - \alpha^2 u) - u(\Delta w - \alpha^2 w) \right] d\Omega = \int_{\Gamma} \left( w \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial w}{\partial n} \right) d\Gamma \quad (4.19)$$

Podstawiając w powyższym wzorze w miejsce funkcji  $u$  potencjał  $A'(P)$ , a zamiast funkcji  $w$  rozwiązanie podstawowe równania Helmholtza, otrzymuje się wzór całkowy:

$$c_i A'(P_i) = \int_{\Gamma} \left[ G_H(P, P_i) \frac{\partial A'(P)}{\partial n} - \frac{\partial G_H(P, P_i)}{\partial n} A'(P) \right] dP \quad (4.20)$$

przy czym  $\alpha^2 = j\omega\gamma\mu$ . Rozwiązanie podstawowe równania (3.24) dane jest wzorem:

$$G_H(P, P_i) = \frac{1}{2\pi} K_0(\alpha r) \quad (4.21)$$

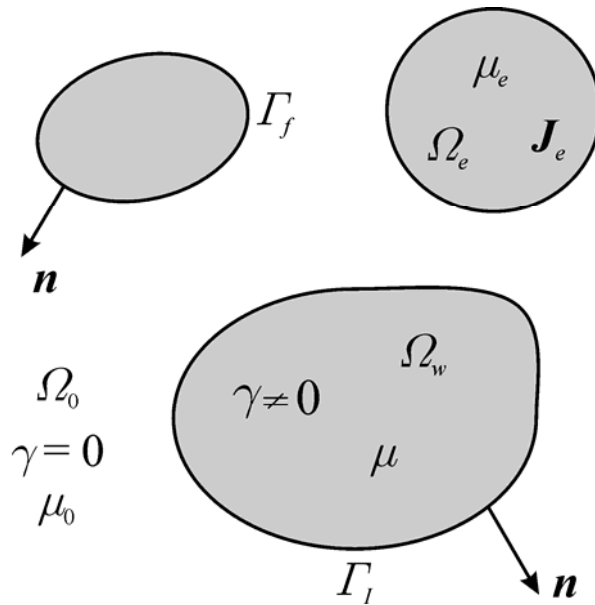
$K_0(\alpha r)$  jest zmodyfikowaną funkcją Bessela drugiego rodzaju zerowego rzędu. Z tożsamości (4.20) wynika całkowe równanie brzegowe dla obszaru  $\Omega_w$ :

$$\frac{1}{2} A'(P_i) - \int_{\Gamma_l} \left[ G_H(P, P_i) \frac{\partial A'(P)}{\partial n} - \frac{\partial G_H(P, P_i)}{\partial n} A'(P) \right] dP = 0 \quad (4.22)$$

gdzie funkcjami niewiadomymi są potencjał  $A'(P)$  i jego pochodna na brzegu  $\Gamma_l$ . Z kolei dla obszaru  $\Omega_0$  można sformułować następujące równanie brzegowe [44]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} A(P_i) + \int_{\Gamma_i} \left( G_L(P, P_i) \frac{\partial A(P)}{\partial n} - \frac{\partial G_L(P, P_i)}{\partial n} A(P) \right) dP - \\ + \int_{\Gamma_f} \frac{\partial G_L(P, P_i)}{\partial n} A(P) dP = -\mu_e \int_{\Gamma_e} G_L(P, P_i) J_e(P) dP \end{aligned} \quad (4.23)$$

Układ równań (4.22) i (4.23) wraz z warunkami zgodności pola (3.26) i (3.27) oraz równaniem więzów (3.28) stanowią podstawę do zastosowania bezpośredniego wariantu MEB dla rozważanego tutaj dwuwymiarowego zagadnienia wiroprowadowego.



Rys. 4.2. Dwuwymiarowy otwarty obszar  $\Omega$  z podobszarami: wiroprowadowym  $\Omega_w$ , powietrznym  $\Omega_0$ , idealnym ferromagnetykiem o brzegu  $\Gamma_f$  i podobszarem  $\Omega_e$  z prądem wzbudzenia o gęstości  $J_e$

#### 4.2.2. Podejście bezpośrednie dla zagadnień trójwymiarowych opisanych wektorowymi równaniami różniczkowymi drugiego rzędu

W niniejszym punkcie przedstawiono równania całkowe stanowiące podstawę bezpośredniego wariantu MEB dla modelu  $\mathbf{E}-\mathbf{H}$  opisanego równaniami różniczkowymi (3.31) i (3.32). Ponieważ są to wektorowe równania cząstkowe drugiego rzędu, to do wyprowadzenia odpowiadających im równań całkowych stosuje się rzadko wykorzystywany w zagadnieniach technicznych tak zwany drugi wektorowy wzór Greena [11, 110], który ma następującą postać:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{a} \cdot \text{rot rot } \mathbf{b} - \mathbf{b} \cdot \text{rot rot } \mathbf{a}) d\Omega = \int_{\Gamma} (\mathbf{b} \times \text{rot } \mathbf{a} - \mathbf{a} \times \text{rot } \mathbf{b}) \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (4.24)$$

gdzie  $\mathbf{a}$  i  $\mathbf{b}$  są funkcjami wektorowymi klasy  $C^2$  w obszarze  $\Omega$  i klasy  $C$  na brzegu  $\Gamma$ . Powyższy wzór trzeba przekształcić tak, aby po zastosowaniu go do wektorów  $\mathbf{E}$  i  $\mathbf{H}$

pod całką brzegową nie występowały pochodne tych wektorów. Nie znane są bowiem warunki brzegowe oraz warunki zgodności pola dla tych pochodnych. W tym celu wprowadza się następujące podstawienie [40]:

$$\mathbf{a} = G\mathbf{c} \quad \mathbf{c} = 1\mathbf{i} + 1\mathbf{j} + 1\mathbf{k} \quad \mathbf{b} = \mathbf{E} \quad (4.25)$$

gdzie  $G$  jest pewną funkcją skalarną,  $\mathbf{c}$  jest wektorem stałym w obszarze  $\Omega$ , a  $\mathbf{E}$  jest natężeniem pola elektrycznego. Ponadto wykorzystuje się następujące wzory rachunku wektorowego:

$$\text{rot rot}(G\mathbf{c}) = \text{grad div}(G\mathbf{c}) - \Delta(G\mathbf{c}) \quad (4.26)$$

$$\text{div}(G\mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot \text{grad}G + G\text{div}\mathbf{c} \quad (4.27)$$

Uwzględniając, że:

$$\text{div}\mathbf{c} = 0 \quad (4.28)$$

można zapisać:

$$\text{div}(G\mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot \text{grad}G = f \quad (4.29)$$

$$\text{div}(f\mathbf{E}) = \mathbf{E} \cdot \text{grad}f + f\text{div}\mathbf{E} \quad (4.30)$$

Ponieważ w obszarze wiroprowodowym  $\text{div}\mathbf{E} = 0$ , to stosując twierdzenie Gaussa otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{E} \cdot \text{grad div}(G\mathbf{c}) d\Omega &= \int_{\Omega} \text{div}(f\mathbf{E}) d\Omega = \\ &= \int_{\Gamma} f\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Gamma} (\mathbf{c} \cdot \text{grad}G)\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \mathbf{c} \cdot \int_{\Gamma} \text{grad}G(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) d\Gamma \end{aligned} \quad (4.31)$$

Obecnie rozważona będzie całka brzegowa ze wzoru (4.24) z podstawieniem (4.25), mianowicie:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \mathbf{E} \times \text{rot}(G\mathbf{c}) \cdot \mathbf{n} d\Gamma &= \int_{\Gamma} \mathbf{E} \times (G \text{rot}\mathbf{c} + \text{grad}G \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Gamma} \mathbf{E} \times (\text{grad}G \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \\ &= \int_{\Gamma} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot (\text{grad}G \times \mathbf{c}) d\Gamma = -\mathbf{c} \cdot \int_{\Gamma} \text{grad}G \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) d\Gamma \end{aligned} \quad (4.32)$$

W powyższych przekształceniach uwzględniono zależności rządzące iloczynem mieszanym wektorów, wzór na rotację iloczynu funkcji skalarnej i wektorowej oraz fakt, że  $\text{rot}\mathbf{c} = \mathbf{0}$ . Wykorzystując drugie równanie Maxwella, można napisać:

$$\int_{\Gamma} G\mathbf{c} \times \text{rot}\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = -\int_{\Gamma} j\omega\mu G\mathbf{c} \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \mathbf{c} \cdot \int_{\Gamma} j\omega\mu G\mathbf{n} \times \mathbf{H} d\Gamma \quad (4.33)$$

Podstawiając (4.31), (4.32) i (4.33) do wzoru (4.24) oraz uwzględniając, że natężenie pola elektrycznego w obszarze wiropądowym (rys.4.3) spełnia równanie (3.31) otrzymuje się:

$$\int_{\Omega_w} (\Delta G - j\omega\gamma\mu G) \mathbf{E} d\Omega = \int_{\Gamma_i} [\text{grad } G(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) - \text{grad } G \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) - j\omega\mu G(\mathbf{n} \times \mathbf{H})] d\Gamma \quad (4.34)$$

Rozwiązanie podstawowe spełniające niejednorodne równanie Helmholtza:

$$\Delta G_H(P, P_i) - j\omega\gamma\mu G_H(P, P_i) = -\delta(P, P_i) \quad (4.35)$$

w przestrzeni trójwymiarowej przyjmuje postać:

$$G_H(P, P_i) = \frac{1}{4\pi r} e^{-j\beta r} \quad (4.36)$$

przy czym  $\beta^2 = -j\omega\gamma\mu$ , a odległość  $r$  dana jest wzorem (4.5).

Zastępując we wzorze (4.34) funkcję  $G$  przez  $G_H$ , otrzymuje się następujący wzór całkowy opisujący pole elektryczne w obszarze wiropądowym  $\Omega_w$ :

$$c_i \mathbf{E}(P_i) = \int_{\Gamma_i} [\text{grad } G_H \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) - \text{grad } G_H(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) + j\omega\mu G_H(\mathbf{n} \times \mathbf{H})] d\Gamma \quad (4.37)$$

Postępując analogicznie, można wyprowadzić wzór opisujący pole magnetyczne:

$$c_i \mathbf{H}(P_i) = \int_{\Gamma_i} [\text{grad } G_H \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) + \text{grad } G_H(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}) - \gamma G_H(\mathbf{n} \times \mathbf{E})] d\Gamma \quad (4.38)$$

Z kolei w obszarze powietrznym mamy:

$$c_i \mathbf{E}(P_i) = - \int_{\Gamma_i} [\text{grad } G_L \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) - \text{grad } G_L(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) + j\omega\mu G_L(\mathbf{n} \times \mathbf{H})] d\Gamma + \int_{\Gamma_e} j\omega\mu G_L \mathbf{J}_e d\Gamma \quad (4.39)$$

$$c_i \mathbf{H}(P_i) = - \int_{\Gamma_i} [\text{grad } G_L \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) + \text{grad } G_L(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H})] d\Gamma - \int_{\Gamma_f} \text{grad } G_L(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}) d\Gamma - \int_{\Omega_e} \text{grad } G_L \times \mathbf{J}_e d\Gamma \quad (4.40)$$

gdzie funkcja  $G_L$  dana jest wzorem (4.4). Oznaczenia obszarów i ich brzegów pokazano na rysunku 4.3. Wykorzystując wzory (4.37) – (4.40), można sformułować równania całkowe opisujące w sposób jednoznaczny rozważane zagadnienie brzegowe, przy czym można to zrobić na kilka sposobów, uzyskując różną liczbę niewiadomych na

brzegu obszaru wiroprowadowego, co ma istotne znaczenie dla całkowitego rozmiaru zagadnienia algebraicznego wynikającego z zastosowania MEB. Stosując wzory (4.38) i (4.40), otrzymuje się układ równań dany poniżej:

$$\frac{1}{2} \mathbf{H}(P_i) - \int_{\Gamma_i} [\text{grad } G_H \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) + \text{grad } G_H (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}) - \gamma G_H (\mathbf{n} \times \mathbf{E})] d\Gamma = 0 \quad (4.41)$$

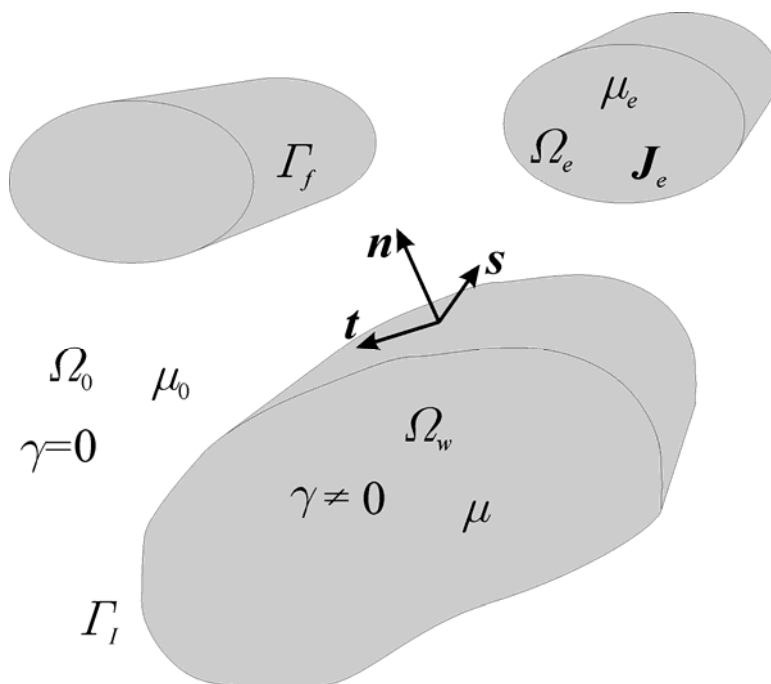
$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathbf{H}(P_i) + \int_{\Gamma_i} [\text{grad } G_L \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) + \text{grad } G_L (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H})] d\Gamma + \\ + \int_{\Gamma_f} \text{grad } G_L (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}) d\Gamma = - \int_{\Omega_e} \text{grad } G_L \times \mathbf{J}_e d\Gamma \end{aligned} \quad (4.42)$$

Rozwiązując zagadnienie we współrzędnych globalnych  $xyz$ , otrzymuje się na granicy  $\Gamma_i$  (po uwzględnieniu warunków zgodności pola) sześć niewiadomych, to znaczy trzy składowe natężenia pola elektrycznego i trzy składowe natężenia pola magnetycznego. Zagadnienie to można także rozwiązywać wprowadzając lokalny układ współrzędnych  $nst$  (rys.4.3). W tym przypadku uzyskuje się zmniejszenie liczby niewiadomych na  $\Gamma_i$  do pięciu. Są nimi składowa normalna i dwie składowe styczne natężenia pola magnetycznego oraz dwie składowe styczne natężenia pola elektrycznego. Po rozwiązaniu tak sformułowanego układu równań pole magnetyczne w dowolnym punkcie analizowanego obszaru wyznacza się stosując wzory (4.38) i (4.40). Rozkłady pola elektrycznego oblicza się przy użyciu wzorów (4.37) i (4.39) z uwzględnieniem warunku znikania składowej normalnej gęstości prądu na brzegu obszaru wiroprowadowego, co pociąga za sobą znikanie składowej normalnej natężenia pola elektrycznego na  $\Gamma_i$ . Innym sposobem rozwiązywania omawianego zagadnienia jest wykorzystanie tożsamości (3.37) i (3.39), co prowadzi do następującego układu równań całkowych:

$$\frac{1}{2} \mathbf{E}(P_i) - \int_{\Gamma_i} [\text{grad } G_H \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) + j\omega\mu G_H (\mathbf{n} \times \mathbf{H})] d\Gamma = 0 \quad (4.43)$$

$$\frac{1}{2} \mathbf{E}(P_i) + \int_{\Gamma_i} [\text{grad } G_L \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) + j\omega\mu G_L (\mathbf{n} \times \mathbf{H})] d\Gamma = \int_{\Gamma_e} j\omega\mu G_L \mathbf{J}_e d\Gamma \quad (4.44)$$

W równaniach tych uwzględniono znikanie składowej normalnej natężenia pola elektrycznego na  $\Gamma_i$ . W tym przypadku, po wprowadzeniu pozostałych warunków zgodności pola, do wyznaczenia pozostają tylko cztery niewiadome na brzegu obszaru wiroprowadowego, to znaczy dwie składowe styczne natężenia pola elektrycznego i dwie składowe styczne natężenia pola magnetycznego. Po rozwiązaniu układu równań (4.43) i (4.44) można ze wzorów (4.37) i (4.39) wyznaczyć rozkłady pola elektrycznego. Do wyznaczenia pola magnetycznego niezbędna jest znajomość składowej normalnej natężenia pola magnetycznego na  $\Gamma_i$ . Zatem należy jeszcze rozwiązać równania (4.42), w którym niewiadomą jest składowa normalna  $\mathbf{H}$  na powierzchni obszaru wiroprowo-



Rys. 4.3. Trójwymiarowy, otwarty obszar  $\Omega$  z podobszarami: wiroprowadowym  $\Omega_w$ , powietrznym  $\Omega_0$ , idealnym ferromagnetykiem o brzegu  $\Gamma_f$  i podobszarem  $\Omega_e$  z prądem wzbudzenia  $\mathbf{J}_e$

go oraz na powierzchni idealnego ferromagnetyka. Powyższe sformułowanie MEB opisano szerzej w [40].

### 4.3. Warianty MEB wykorzystujące teorię potencjałów

#### 4.3.1. Wprowadzenie

W pośrednim wariantcie MEB wykorzystuje się fakt, że rozwiązania zagadnień brzegowych można przedstawić za pomocą wyrażeń całkowych zwanych potencjałami. W praktyce najczęściej stosowane są potencjały warstwy pojedynczej. Dla zagadnień opisanych skalarnymi równaniami eliptycznymi potencjał warstwy pojedynczej o gęstości  $\sigma(P)$  rozłożonej na powierzchni  $\Gamma$  wyraża się wzorem:

$$\varphi(P_i) = \int_{\Gamma} G(P, P_i) \sigma(P) dP \quad (4.45)$$

gdzie  $G(P, P_i)$  jest rozwiązaniem podstawowym rozważanego równania różniczkowego. Jeżeli w (4.45) zastosujemy rozwiązanie podstawowe równania Laplace'a podzielone przez  $\varepsilon$ , to całka przedstawia skalarny potencjał elektryczny w punkcie  $P_i$ , wytwarzany przez ładunek powierzchniowy o gęstości  $\sigma(P)$ , rozłożony na powierzchni  $\Gamma$  umieszczonej w jednorodnym, liniowym i izotropowym środowisku o przenikalności elektrycznej  $\varepsilon$ .

Analogicznie formułuje się potencjał warstwy pojedynczej dla zagadnień opisanych wektorowymi równaniami różniczkowymi:

$$A(P_i) = \int_{\Gamma} G(P, P_i) \mathbf{j}_s(P) dP \quad (4.46)$$

Jeżeli w (4.46) zastosujemy rozwiązanie podstawowe dla równania Laplace'a pomnożone przez  $\mu$ , to całka przedstawia wektorowy potencjał magnetyczny w punkcie  $P_i$ , pochodzący od prądu powierzchniowego o gęstości  $\mathbf{j}_s(P)$  rozłożonego na powierzchni  $\Gamma$ , w jednorodnym, liniowym i izotropowym środowisku o przenikalności magnetycznej  $\mu$ . Dla pośredniego wariantu MEB istotne są znane z teorii równań całkowych wzory opisujące pochodną normalną potencjału warstwy pojedynczej względem współrzędnych punktu obserwacji  $P_i$  na brzegu obszaru  $\Omega$ . Zakładając, podobnie jak poprzednio, że wektor normalny zorientowany jest zewnętrznemu w stosunku do rozważanego obszaru  $\Omega$ , mamy:

$$\frac{\partial \varphi(P_i)}{\partial n_i} \Big|_{\Gamma} = \pm \frac{1}{2} \sigma(P_i) + \int_{\Gamma} \frac{\partial G(P, P_i)}{\partial n_i} \sigma(P) dP \quad (4.47)$$

przy czym znaki plus i minus dotyczą pochodnej, odpowiednio od strony wewnętrznej i zewnętrznej obszaru  $\Omega$ . Dla zagadnień Laplace'a i Helmholtza omawiany wzór ma formalnie taką samą postać. Obie zależności różnią się jedynie zastosowanym rozwiązaniem podstawowym. Podobnie wygląda wzór na pochodną potencjału warstwy pojedynczej dla zagadnień opisanych wektorowym równaniem różniczkowym:

$$\frac{\partial \mathbf{A}(P_i)}{\partial n_i} \Big|_{\Gamma} = \pm \frac{1}{2} \mathbf{j}_s(P_i) + \int_{\Gamma} \frac{\partial G(P, P_i)}{\partial n_i} \mathbf{j}_s(P) dP \quad (4.48)$$

W dalszej części rozdziału wyprowadzono równania całkowe stanowiące podstawę do zastosowania pośrednich wariantów MEB, dla wcześniej sformułowanych modeli pól.

#### 4.3.2. *Podjęcie pośrednie dla zagadnień opisanych skalarnymi równaniami różniczkowymi drugiego rzędu*

W niniejszym punkcie przedstawiono pośrednie sformułowanie MEB dla przypadku opisanego w punkcie 4.2.1, to znaczy rozważono zagadnienie Laplace'a w nieograniczonym, strefowo niejednorodnym obszarze  $\Omega$ , składającym się z otwartego wielospójnego podobszaru  $\Omega_0$  o przenikalności elektrycznej  $\varepsilon_0$  oraz z zamkniętego podobszaru  $\Omega_d$  o przenikalności  $\varepsilon_d$ . Oznaczenia podobszarów i brzegów przyjęto tak jak na rysunku 4.1. Na brzegach  $\Gamma_j$ , gdzie  $j = 1, 2, \dots, m$  zadane są jednorodne bądź niejednorodne warunki brzegowe Dirichleta, odpowiednio dla brzegów obiektów uziemionych i będących pod napięciem. Jednorodny warunek Dirichleta zakłada się także na brzegu  $\Gamma_g$ , reprezentującym powierzchnię ziemi. Warunki zgodności pola na brzegu obszaru  $\Omega_d$  są następujące:

$$\varphi \Big|_{\Gamma_i^0} = \varphi \Big|_{\Gamma_i^d} \quad (4.49)$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\Gamma_i^0} = \varepsilon_d \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\Gamma_i^d} \quad (4.50)$$

Rozwiązanie zagadnienia polega na znalezieniu takiego rozkładu gęstości powierzchniowej ładunku na brzegu obszaru oraz na granicach między podobszarami, który zapewniłby spełnienie warunków brzegowych i warunków zgodności pola na tych powierzchniach, przy czym na powierzchniach przewodzących są to rzeczywiste ładunki elektryczne, natomiast na powierzchniach rozdzielających dielektryki o różnych przenikalnościach elektrycznych są to ładunki reprezentujące polaryzację. W rozważanym przypadku dla punktów leżących na  $\Gamma_j$  i  $\Gamma_g$  formułuje się równanie Fredholma pierwszego rodzaju:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_i} G_{L\varepsilon}(P, P_i) \sigma(P) dP + \sum_{j=1}^m \int_{\Gamma_j} G_{L\varepsilon}(P, P_i) \sigma(P) dP + \\ & + \int_{\Gamma_g} G_{L\varepsilon}(P, P_i) \sigma(P) dP = \varphi(P_i) \quad \text{dla } P_i \in \bigcup_{j=1}^m \Gamma_j \cup \Gamma_g \end{aligned} \quad (4.51)$$

Przy czym  $G_{L\varepsilon}(P, P_i)$  jest rozwiązaniem podstawowym równania Laplace'a podzielonym przez stałą elektryczną.

Stosując wzory na pochodną normalną potencjału względem współrzędnych punktu obserwacji  $P_i$ , na powierzchni  $\Gamma_i$ , od strony  $\Omega_0$  mamy:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(P_i)}{\partial n_i} &= -\frac{\sigma(P_i)}{2\varepsilon_0} + \int_{\Gamma_i} \frac{\partial G_{L\varepsilon}(P, P_i)}{\partial n_i} \sigma(P) dP + \sum_{j=1}^m \int_{\Gamma_j} \frac{\partial G_{L\varepsilon}(P, P_i)}{\partial n_i} \sigma(P) dP + \\ & + \int_{\Gamma_g} \frac{\partial G_{L\varepsilon}(P, P_i)}{\partial n_i} \sigma(P) dP \quad \text{dla } P_i \in \Gamma_i^0 \end{aligned} \quad (4.52)$$

oraz od strony  $\Omega_d$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(P_i)}{\partial n_i} &= \frac{\sigma(P_i)}{2\varepsilon_0} + \int_{\Gamma_i} \frac{\partial G_{L\varepsilon}(P, P_i)}{\partial n_i} \sigma(P) dP + \sum_{j=1}^m \int_{\Gamma_j} \frac{\partial G_{L\varepsilon}(P, P_i)}{\partial n_i} \sigma(P) dP + \\ & + \int_{\Gamma_g} \frac{\partial G_{L\varepsilon}(P, P_i)}{\partial n_i} \sigma(P) dP \quad \text{dla } P_i \in \Gamma_i^d \end{aligned} \quad (4.53)$$

Uwzględniając (4.52) i (4.53) oraz warunek zgodności pola (4.50), otrzymuje się równanie całkowe Fredholma drugiego rodzaju, obowiązujące dla punktów położonych na  $\Gamma_i$ :



$$\begin{aligned} \frac{1}{2\varepsilon_0} \frac{\varepsilon_d + \varepsilon_0}{\varepsilon_d - \varepsilon_0} \sigma(P_i) + \int_{\Gamma_i} \frac{\partial G_{L\varepsilon}(P, P_i)}{\partial n_i} \sigma(P) dP + \sum_{j=1}^m \int_{\Gamma_j} \frac{\partial G_{L\varepsilon}(P, P_i)}{\partial n_i} \sigma(P) dP + \\ + \int_{\Gamma_s} \frac{\partial G_{L\varepsilon}(P, P_i)}{\partial n_i} \sigma(P) dP = 0 \quad \text{dla } P_i \in \Gamma_i \end{aligned} \quad (4.54)$$

Układ równań całkowych (4.51) i (4.54) stanowi podstawę do zastosowania pośredniego wariantu MEB.

### 4.3.3. Podejście pośrednie dla zagadnień trójwymiarowych opisanych wektorowymi równaniami różniczkowymi drugiego rzędu

Jak wcześniej wspomniano, w trójwymiarowych podobszarach, w których uwzględniane są prądy wirowe, pole elektromagnetyczne opisane jest wektorowymi równaniami różniczkowymi drugiego rzędu. W tym punkcie przedstawiono równania całkowe stanowiące podstawę dla pośredniego wariantu MEB, zwanego w literaturze modelem  $\mathbf{H}-\varphi$ , a w niniejszej pracy modelem  $\mathbf{H}-\psi$ . Odpowiada on zagadnieniu opisanemu równaniami różniczkowymi (3.37) i (3.38) z warunkami zgodności pola (3.39) i (3.40). Pierwszy raz powyższy model sformułowano teoretycznie w pracy [72]. Implementacje komputerowe rozważanego podejścia (dla prostych konfiguracji geometrycznych) przedstawiono w pracach [40, 41]. Bardziej złożone zagadnienia, wymagające znacznej mocy obliczeniowej komputera, zaprezentowano w pracach [75, 76, 104]. Powracając do rozważań merytorycznych, natężenie pola magnetycznego w obszarze wiroprowadowym spełnia jednorodne równanie Helmholtza, a potencjał skalarny, reprezentujący wtórne pole magnetyczne w obszarze powietrznym, spełnia równanie Laplace'a. W dalszej części tego punktu przyjęto oznaczenia jak na rysunku 4.3, przy czym pominięto tutaj obszar odpowiadający idealnemu ferromagnetykowi o brzegu  $\Gamma_f$ . Natężenie pola magnetycznego w obszarze wiroprowadowym można wyrazić całką:

$$\mathbf{H}(P_i) = \text{rot}_i \int_{\Gamma_i} G_H(P, P_i) \mathbf{j}_s(P) dP \quad (4.55)$$

gdzie  $G_H(P, P_i)$  jest rozwiązaniem podstawowym równania Helmholtza w przestrzeni trójwymiarowej, natomiast  $\mathbf{j}_s(P)$  jest fikcyjną gęstością prądu powierzchniowego (okład prądowy). Skalarny potencjał magnetyczny pola wtórnego wyraża się następująco:

$$\psi_m(P_i) = \int_{\Gamma_i} G_L(P, P_i) \sigma_m(P) dP \quad (4.56)$$

gdzie  $G_L(P, P_i)$  jest rozwiązaniem podstawowym równania Laplace'a w przestrzeni trójwymiarowej, natomiast  $\sigma_m(P)$  jest fikcyjnym magnetycznym ładunkiem powierzchniowym. Uwzględniając zależności znane z rachunku wektorowego, wzory (4.47) i (4.48) na pochodną potencjału warstwy pojedynczej oraz warunki zgodności

pola (3.39) i (3.40) na  $\Gamma_L$ , otrzymuje się następujący układ dwóch brzegowych równań całkowych:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \mathbf{j}_s(P_i) + \int_{\Gamma_i} \mathbf{n}_i \times [\mathbf{j}_s(P) \times \text{grad}_i G_H(P, P_i)] dP + \\ & - \int_{\Gamma_i} \mathbf{n}_i \times \text{grad}_i G_L(P, P_i) \sigma_m(P) dP = -\mathbf{n}_i \times H_0(P_i) \end{aligned} \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sigma_m(P_i) - \int_{\Gamma_i} \mathbf{n}_i \cdot \text{grad}_i G_L(P, P_i) \sigma_m(P) dP + \\ & + \frac{\mu_w}{\mu_0} \int_{\Gamma_i} \mathbf{n}_i \cdot [\mathbf{j}_s(P) \times \text{grad}_i G_H(P, P_i)] dP = -\mathbf{n}_i \cdot H_0(P_i) \end{aligned} \quad (4.58)$$

Powyższe równania stanowią podstawę do zastosowania pośredniego wariantu MEB dla trójwymiarowego zagadnienia w obszarze strefowo niejednorodnym z podobszarem wiroprowadowym. W tym przypadku niewiadomymi są: fikcyjna gęstość ładunku powierzchniowego oraz fikcyjna gęstość prądu powierzchniowego. Ta ostatnia wielkość w lokalnym układzie współrzędnych  $nst$  (rys.4.3) ma tylko dwie składowe geometryczne.

## 5. METODA ELEMENTÓW LINIOWYCH

Gdy wymiary poprzeczne obiektu są pomijalnie małe w porównaniu z jego wymiarem podłużnym, jak ma to miejsce w przypadku elementów kratownic słupów czy przewodów pod napięciem, w obliczeniach pola wygodnie jest zastosować jeden z wariantów metody ładunków symulowanych [7, 8, 27, 28], zwany tutaj metodą elementów liniowych (MEL). W metodzie tej przyjmuje się, że rozważane obiekty wpływają na rozkłady pola poprzez fikcyjne ładunki, które rozmieszczone są na liniach umieszczonych w ich wnętrzu. Rozkład powyższych ładunków musi być taki, aby skalarny potencjał elektryczny bądź magnetyczny w wybranych punktach na powierzchniach obiektów przyjmował z góry założoną wartość. Jeżeli w przestrzeni otaczającej rozważane obiekty potencjał spełnia równanie Laplace'a, to wspomniany ładunek liniowy  $\tau(P)$  spełnia następujące równanie całkowe Fredholma pierwszego rodzaju:

$$\sum_{j=1}^n \int_{K_j} G_{L,e}(P, P_i) \tau(P) dP = \varphi(P_i) \quad (5.1)$$

gdzie  $K_j$  oznacza krzywą reprezentującą  $j$ -ty obiekt, a  $n$  jest liczbą obiektów.  $G_L(P, P_i)$  jest rozwiązaniem podstawowym równania Laplace'a. Metoda elementów liniowych polega na zastąpieniu krzywych, na których rozłożone są ładunki liniowe, odcinkami,

na których zakłada się stały rozkład ładunku. Punkt  $P_i$  położony jest na powierzchni obiektu odpowiadającej  $i$ -temu elementowi. Otrzymuje się wówczas następujące równanie algebraiczne:

$$\sum_{j=1}^{n_L} \tau_j \int_{L_j} G_{L\epsilon}(P, P_i) dP = \varphi(P_i) \quad (5.2)$$

gdzie  $L_j$  jest  $j$ -tym elementem liniowym, a  $n_L$  jest ich liczbą. Przyjmując punkt obserwacji  $P_i$  rozwiązania podstawowego kolejno na częściach powierzchni obiektu odpowiadających poszczególnym elementom liniowym, otrzymuje się układ równań algebraicznych:

$$[P][\tau] = [\varphi] \quad (5.3)$$

którego współczynniki dane są wzorem:

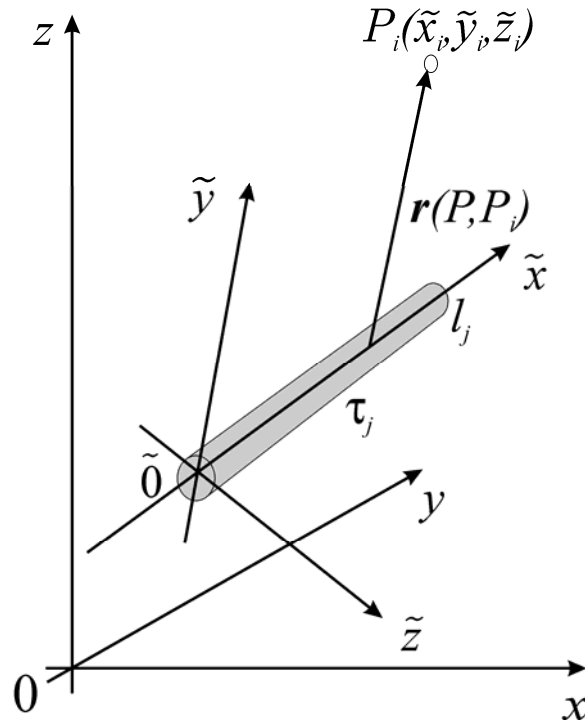
$$p_{ij} = \int_{L_j} G_{L\epsilon}(P, P_i) dP \quad (5.4)$$

Powyższa całka obliczana jest analitycznie. W tym celu wprowadza się lokalny układ współrzędnych  $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$  (rys. 5.1) ustalony tak, aby ładunek liniowy leżał na dodatniej półosi  $\tilde{x}$  i zaczynał się w początku omawianego układu współrzędnych. Punkt  $P_i$  leży na płaszczyźnie  $\tilde{x}\tilde{y}$ . Całka z funkcji  $1/r$  po  $j$ -tym elemencie  $L_j$  o długości  $l_j$  wyraża się następującym wzorem:

$$\int_{L_j} \frac{1}{r(P, P_i)} dP = \int_0^{l_j} \frac{1}{\sqrt{(\tilde{x}_i - \tilde{x})^2 + \tilde{y}_i^2 + \tilde{z}_i^2}} d\tilde{x} = \ln \frac{l_j - \tilde{x}_i + \sqrt{(l_j - \tilde{x}_i)^2 + \tilde{y}_i^2 + \tilde{z}_i^2}}{-\tilde{x}_i + \sqrt{\tilde{x}_i^2 + \tilde{y}_i^2 + \tilde{z}_i^2}} \quad (5.5)$$

gdzie  $\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, \tilde{z}_i$  są współrzędnymi  $i$ -tego punktu obserwacji w lokalnym układzie współrzędnych.

W wyniku rozwiązania układu równań algebraicznych wyznaczane są ładunki liniowe, których znajomość umożliwia obliczenie potencjału  $\varphi(P)$  w dowolnym punkcie przestrzeni. Powyższa metoda stosowana była w pracach [7, 8, 27, 28] do analizy pola elektrycznego w sąsiedztwie linii WN wzniesionych na terenach niezabudowanych, bez uwzględnienia wpływu kratownic słupów.



Rys. 5.1. Globalny i lokalny układ współrzędnych

## 6. TECHNIKA HYBRYDOWA ŁĄCZĄCA MEB I MEL

W zakresie zagadnień nie uwzględniających występowania prądów wirowych, zarówno wariant pośredni, jak i bezpośredni metody elementów brzegowych prowadzą przy jednakowej dyskretyzacji brzegów do tej samej liczby równań algebraicznych. W odniesieniu do zagadnień rozważanych w niniejszej pracy podejścia te są w zasadzie równoważne. W zagadnieniach, gdzie występują duże dysproporcje między parametrami materiałowymi podobszarów, większą dokładność, według niektórych autorów, uzyskuje się stosując wariant bezpośredni BEM [74]. W przypadku zagadnień wiropądowych sformułowanie pośrednie prowadzi do mniejszej liczby niewiadomych przy takiej samej dyskretyzacji brzegu obszaru wiropądowego. W niniejszej pracy zastosowano połączenie MEL z pośrednim wariantem MEB. Za przyjęciem takiego rozwiązania przemawia także fakt, że MEL, wykorzystująca pojęcia ładunków liniowych, jest w pewnym sensie zbliżona do pośredniego wariantu MEB, co daje większą przejrzystość metody hybrydowej.

### 6.1. Sformułowanie metody hybrydowej dla zagadnienia pola elektrycznego

Poniżej podano układ równań całkowych opisujących zagadnienie pola elektrycznego pokazane na rys. 6.1:

$$\int_{\Gamma_l} G_{L\varepsilon}(P, P_i) \sigma(P) dP + \sum_{j=1}^{n1} \int_{\Gamma_j} G_{L\varepsilon}(P, P_i) \sigma(P) dP + \int_{\Gamma_g} G_{L\varepsilon}(P, P_i) \sigma(P) dP +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n2} \int_{K_k} G_{L\varepsilon}(P, P_i) \tau(P) dP = \varphi(P_i) \quad \text{dla } P_i \in \bigcup_{j=1}^{n1} \Gamma_j \bigcup_{k=1}^{n2} \Gamma_k \bigcup \Gamma_g$$

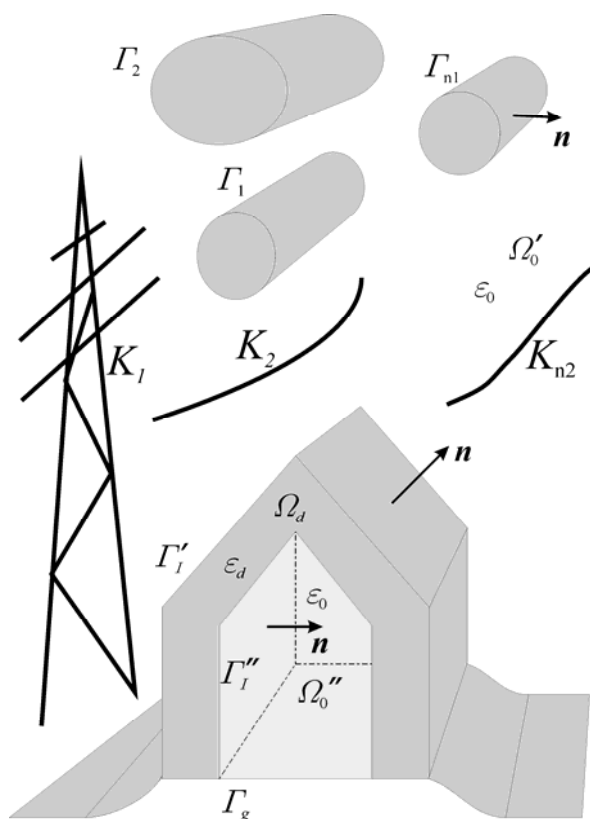
(6.1)

$$\frac{1}{2\varepsilon_0} \frac{\varepsilon_d + \varepsilon_0}{\varepsilon_d - \varepsilon_0} \sigma(P_i) + \int_{\Gamma_l} \frac{\partial G_{L\varepsilon}(P, P_i)}{\partial n_i} \sigma(P) dP + \sum_{j=1}^{n1} \int_{\Gamma_j} \frac{\partial G_{L\varepsilon}(P, P_i)}{\partial n_i} \sigma(P) dP +$$

$$+ \int_{\Gamma_g} \frac{\partial G_{L\varepsilon}(P, P_i)}{\partial n_i} \sigma(P) dP + \sum_{k=1}^{n2} \int_{K_k} \frac{\partial G_{L\varepsilon}(P, P_i)}{\partial n_i} \tau(P) dP = 0 \quad \text{dla } P_i \in \Gamma_l$$

(6.2)

gdzie  $\Gamma_k$  jest powierzchnią  $k$ -tego obiektu modelowanego za pomocą elementów liniowych,  $K_k$  jest  $k$ -tą krzywą, na której rozłożone są ładunki liniowe.  $\Gamma_l = \Gamma_l' \cup \Gamma_l''$ ,  $\Omega_0 = \Omega_0' \cup \Omega_0''$ . Powyższy układ równań sformułowano z wykorzystaniem wzorów (4.51), (4.54) oraz (5.1).



Rys. 6.1. Strefowo niejednorodny obszar  $\Omega$  z otwartym, wielospójnym podobszarem  $\Omega_0 = \Omega_0' \cup \Omega_0''$  o przenikalności elektrycznej  $\varepsilon_0$ , z zamkniętym podobszarem  $\Omega_d$  o przenikalności elektrycznej  $\varepsilon_d$  oraz z obiektami o znanym potencjale elektrycznym na brzegu

Prezentowana technika obliczeniowa polega na przekształceniu układu równań całkowych (6.1) i (6.2) w układ równań algebraicznych, który rozwiązywany jest numerycznie. W tym celu przewody robocze i odgromowe, a także kratownice słupów WN, bramek stacyjnych i inne ażurowe konstrukcje metalowe zastępowane są elementami liniowymi. Powierzchnie litych konstrukcji wsporczych, budynków, korony drzew itd. pokrywane są elementami brzegowymi. Gęstości ładunków powierzchniowych i liniowych na elementach aproksymowane są odpowiednimi funkcjami. W celu uniknięcia konieczności dyskretyzacji płaskich obszarów powierzchni ziemi o współrzędnej  $z = 0$  stosuje się metodę odbić zwierciadlanych [121]. Otrzymany w ten sposób układ równań algebraicznych można zapisać w następującej formie:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{B}_2 & \mathbf{P}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{S1} \\ \mathbf{q}_{S2} \\ \mathbf{q}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

gdzie:

$\mathbf{B}_1$  – macierz MEB o wymiarze  $n_{S1} \times (n_{S1} + n_{S2})$

$\mathbf{B}_2$  – macierz MEB o wymiarze  $(n_{S2} + n_L) \times (n_{S1} + n_{S2})$

$\mathbf{P}_1$  – macierz MEL o wymiarze  $n_{S1} \times n_L$

$\mathbf{P}_2$  – macierz MEL o wymiarze  $(n_{S2} + n_L) \times n_L$

$\mathbf{q}_{S1}$  –  $n_{S1}$ -wymiarowy wektor, którego składowymi są gęstości ładunku polaryzacji na elementach powierzchniowych

$\mathbf{q}_{S2}$  –  $n_{S2}$ -wymiarowy wektor, którego składowymi są gęstości ładunku swobodnego na elementach powierzchniowych

$\mathbf{q}_L$  –  $n_L$ -wymiarowy wektor, którego składowymi są gęstości ładunku swobodnego na elementach liniowych

$\mathbf{v}$  –  $n_W$ -wymiarowy wektor, którego składowymi są potencjały na powierzchniach przewodów roboczych

$n_{S1}$  – liczba elementów brzegowych na powierzchniach dielektryków

$n_{S2}$  – liczba elementów brzegowych na powierzchniach obiektów o potencjale zerowym

$n_L$  – całkowita liczba elementów liniowych

$n_W$  – liczba elementów liniowych na przewodach roboczych

Elementy macierzy  $\mathbf{B}_1$ ,  $\mathbf{B}_2$ ,  $\mathbf{P}_1$ , i  $\mathbf{P}_2$  wyznacza się ze wzorów, które zależą od kształtu elementów liniowych i brzegowych oraz od rodzaju aproksymacji gęstości ładunków na elementach. W niniejszej pracy powierzchnie obiektów pokrywane są płaskimi elementami czworokątnymi bądź trójkątnymi. Przewody oraz elementy konstrukcji ażurowych dyskretyzowane są odcinkami prostoliniowymi. W obu przypadkach stosuje się aproksymację zerowego rzędu, co oznacza, że gęstość ładunku ma stałą wartość na elemencie.

Elementy  $b_{1ij}$  macierzy  $\mathbf{B}_1$  oblicza się z następujących wzorów:

$$b_{1ij} = \int_{S_j} \frac{\partial G_{L\epsilon}(P, P_i)}{\partial n_i} dP - \int_{S'_j} \frac{\partial G_{L\epsilon}(P, P_i)}{\partial n_i} dP \quad \text{dla } i \neq j \quad (6.4)$$

$$b_{1ij} = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{\epsilon_d + \epsilon_0}{\epsilon_d - \epsilon_0} - \int_{S'_j} \frac{\partial G_{L\epsilon}(P, P_i)}{\partial n_i} dP \quad \text{dla } i = j \quad (6.5)$$

a elementy  $b_{2ij}$  macierzy  $\mathbf{B}_2$  wyznacza się z zależności:

$$b_{2ij} = \int_{S_j} G_{L\epsilon}(P, P_i) dP - \int_{S'_j} G_{L\epsilon}(P, P_i) dP \quad (6.6)$$

gdzie  $S_j$  jest  $j$ -tym elementem brzegowym, a  $S'_j$  jest jego zwierciadlanym odbiciem względem płaszczyzny  $xy$ .

Dla  $i \neq j$  powyższe całki oblicza się numerycznie, stosując kwadratury Gaussa [109]. Gdy  $i = j$  to biegun funkcji  $1/r$  leży na elemencie, po którym wykonywane jest całkowanie, a zatem pierwsza całka jest słaboosobliwa. W tym przypadku do całkowania funkcji  $1/r$  stosuje się wzory analityczne. Dla elementu prostokątnego o bokach  $a$  i  $b$ , przy założeniu, że biegun funkcji Greena znajduje się w środku prostokąta, całkę funkcji  $1/r$  oblicza się z zależności [53]:

$$\int_{S_{\square}} \frac{1}{r(P, P_i)} dP = \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy = 2a \ln \left[ \frac{b}{a} + \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} \right] + 2b \ln \left[ \frac{a}{b} + \sqrt{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2} \right] \quad (6.7)$$

gdzie  $S_{\square}$  oznacza element prostokątny.

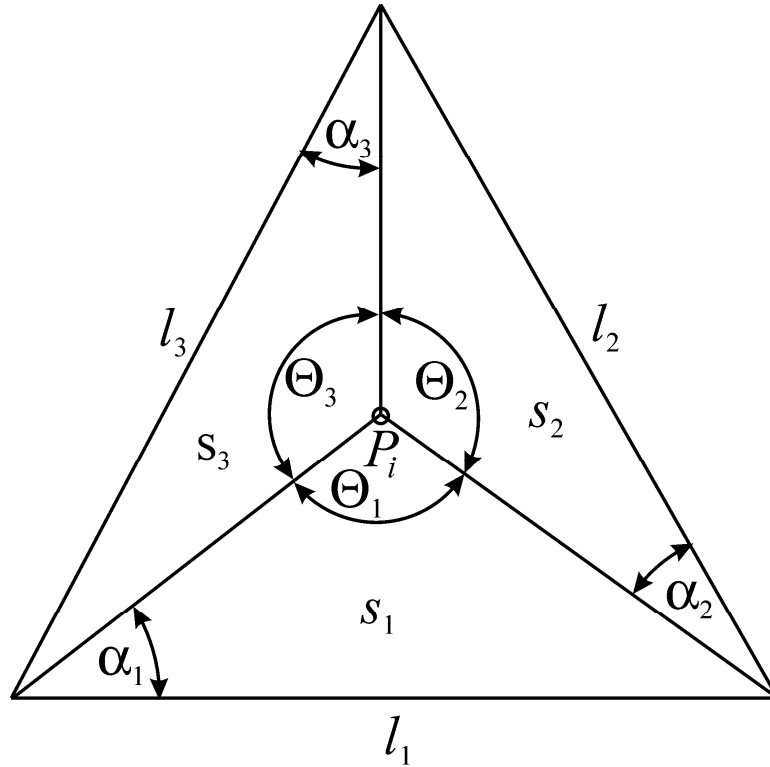
Dla elementów trójkątnych wzór ma następującą postać [13]:

$$\int_{S_{\Delta}} \frac{1}{r(P, P_i)} dP = \sum_{i=1}^3 2 \frac{S_i}{a_i} \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha_i + \Theta_i}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha_i}{2}} \quad (6.8)$$

gdzie  $S_{\Delta}$  jest powierzchnią elementu trójkątnego. Pozostałe oznaczenia pokazano na rysunku 6.2.

Elementy  $p_{1ij}$  macierz  $\mathbf{P}_1$ , oblicza się ze wzoru:

$$p_{1ij} = \int_{L_j} \frac{\partial G_{L\epsilon}(P, P_i)}{\partial n_i} dP - \int_{L'_j} \frac{\partial G_{L\epsilon}(P, P_i)}{\partial n_i} dP \quad (6.9)$$



Rys. 6.2. Trójkątny element brzegowy ( $s_1, s_2, s_3$  oznaczają pola powierzchni trójkątów wewnętrznych)

a elementy  $p_{2ij}$  macierzy  $\mathbf{P}_2$  wyznacza się jak niżej:

$$p_{2ij} = \int_{L_j} G_{L\epsilon}(P, P_i) dP - \int_{L'_j} G_{L\epsilon}(P, P_i) dP \quad (6.10)$$

gdzie  $L_j$  jest  $j$ -tym elementem liniowym, a  $L'_j$  jest jego zwierciadlanym odbiciem względem płaszczyzny  $xy$ . Całki (6.9) oblicza się numerycznie, natomiast całki (6.10) wyznacza się ze wzoru analitycznego (5.5).

W wyniku rozwiązania układu równań (6.3) otrzymuje się rozkłady gęstości ładunków na elementach liniowych i powierzchniowych. Wykorzystując powyższe rozwiązanie można obliczyć skalarny potencjał elektryczny w dowolnym punkcie przestrzeni:

$$\varphi(P_i) = \sum_{k=1}^{n_S} \int_{S_k} G_{L\epsilon}^*(P, P_i) \sigma(P) dP + \sum_{m=1}^{n_L} \int_{L_m} G_{L\epsilon}^*(P, P_i) \tau(P) dP \quad (6.11)$$

przy czym  $n_S = n_{S1} + n_{S2}$ , natomiast  $G_{L\epsilon}^*(P, P_i)$  jest antysymetrycznym względem płaszczyzny  $xy$  rozwiązaniem podstawowym równania Laplacea [13] podzielonym przez stałą elektryczną:



$$G_{L\varepsilon}^*(P, P_i) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right) \quad (6.12)$$

$$r' = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z + z_i)^2} \quad (6.13)$$

Natężenie pola elektrycznego  $\mathbf{E}$  wyznacza się ze znanego wzoru:

$$\mathbf{E} = - \text{grad}\varphi \quad (6.14)$$

przy czym składowe wektora  $\mathbf{E}$  oblicza się stosując wzory różnicowe:

$$\left. \begin{aligned} E_x(x, y, z) &= - \frac{\varphi(x + \Delta x, y, z) - \varphi(x - \Delta x, y, z)}{2\Delta x} \\ E_y(x, y, z) &= - \frac{\varphi(x, y + \Delta y, z) - \varphi(x, y - \Delta y, z)}{2\Delta y} \\ E_z(x, y, z) &= - \frac{\varphi(x, y, z + \Delta z) - \varphi(x, y, z - \Delta z)}{2\Delta z} \end{aligned} \right\} \quad (6.15)$$

## 6.2. Sformułowanie metody hybrydowej dla zagadnienia pola magnetycznego

Analogicznie jak dla pola elektrycznego można połączyć MEB i MEL dla trójwymiarowego zagadnienia pola magnetycznego, pokazanego na rysunku 6.3, w którym uwzględnia się występowanie prądów wirowych:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathbf{j}_s(P_i) + \int_{\Gamma_i} \mathbf{n}_i \times [\mathbf{j}_s(P) \times \text{grad}_i G_H(P, P_i)] dP - \int_{\Gamma_i} \mathbf{n}_i \times \text{grad}_i G_L(P, P_i) \sigma_m(P) dP - \\ + \int_{\Gamma_f} \mathbf{n}_i \times \text{grad}_i G_L(P, P_i) \sigma_m(P) dP - \int_{K_f} \mathbf{n}_i \times \text{grad}_i G_L(P, P_i) \tau_m(P) dP = \\ = -\mathbf{n}_i \times H_0(P_i) \quad \text{dla } P_i \in \Gamma_i \end{aligned} \quad (6.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sigma_m(P_i) - \int_{\Gamma_i} \mathbf{n}_i \cdot \text{grad}_i G_L(P, P_i) \sigma_m(P) dP - \int_{\Gamma_f} \mathbf{n}_i \cdot \text{grad}_i G_L(P, P_i) \sigma_m(P) dP + \\ - \int_{K_f} \mathbf{n}_i \cdot \text{grad}_i G_L(P, P_i) \tau_m(P) dP + \frac{\mu_w}{\mu_0} \int_{\Gamma_i} \mathbf{n}_i \cdot [\mathbf{j}_s(P) \times \text{grad}_i G_H(P, P_i)] dP = \\ = -\mathbf{n}_i \cdot H_0(P_i) \quad \text{dla } P_i \in \Gamma_i \end{aligned} \quad (6.17)$$

$$\int_{\Gamma_i} G_L(P, P_i) \sigma_m(P) dP + \int_{\Gamma_f} G_L(P, P_i) \sigma_m(P) dP + \int_{K_f} G_L(P, P_i) \tau_m(P) dP - C_k =$$

$$= -\psi_0(P_i) \quad \text{dla } P_i \in \Gamma_f \cup \Gamma_{K_f}, k=1,2 \quad (6.18)$$

$C_k$  reprezentuje wartość potencjału magnetycznego na powierzchni  $k$ -tego idealnego ferromagnetyka. W rozważanym przypadku jeden z ferromagnetyków dyskretyzowany jest elementami brzegowymi, drugi zaś zastępowany jest elementami liniowymi. Ponieważ  $C_k$  mają nieznaną wartość, konieczne jest wprowadzenie dwóch dodatkowych równań wynikających z magnetycznego prawa Gaussa. Mają one postać:

$$\int_{K_f} \tau_m(P) dP = 0 \quad (6.19)$$

$$\int_{\Gamma_f} \sigma_m(P) dP = 0 \quad (6.20)$$

Natężenie pierwotnego pola magnetycznego  $\mathbf{H}_0(P_i)$  oraz skalarny potencjał magnetyczny  $\psi_0(P_i)$  pola pierwotnego wyznacza się odpowiednio z następujących wzorów:

$$\mathbf{H}_0(P_i) = -\frac{I_e}{4\pi} \int_{K_e} \frac{\mathbf{r}(P, P_i) \times d\mathbf{l}_1}{r^3} + \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_e} \frac{\mathbf{J}_e(P) \times \mathbf{r}(P, P_i) dP}{r^3} \quad (6.21)$$

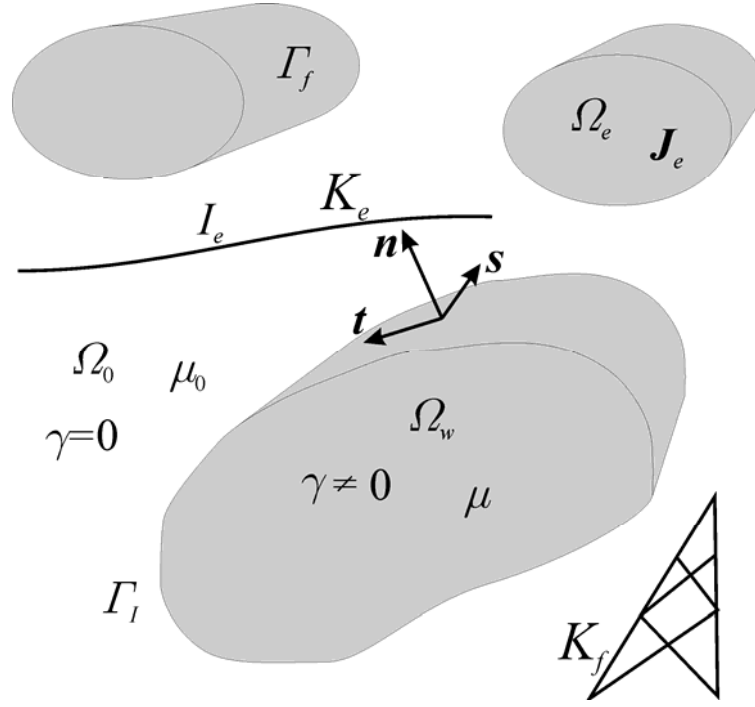
$$\psi_0(P_i) = \frac{I_e}{4\pi} \int_{P_0}^{P_i} \int_{K_e} \frac{\mathbf{r}(P, P_j) \times d\mathbf{l}_1}{r^3} \cdot d\mathbf{l}_2 - \frac{1}{4\pi} \int_{P_0}^{P_i} \int_{\Omega_e} \frac{\mathbf{J}_e(P) \times \mathbf{r}(P, P_j) dP}{r^3} \cdot d\mathbf{l}_2 \quad (6.22)$$

W powyższych wzorach uwzględniono zarówno pole wzbudzone przez prąd  $I_e$  w przewodach o zerowym przekroju poprzecznym, zgodnie z (3.11) i (3.20), jak i przez prąd o gęstości  $\mathbf{J}_e(P)$  w przewodach o skończonym przekroju poprzecznym.

Podobnie jak w przypadku pola elektrycznego sformułowany wyżej układ równań całkowych (6.16) – (6.20) przekształcany jest w układ równań algebraicznych poprzez dyskretyzację brzegów podobszarów oraz linii reprezentującej obiekt ażurowy i aproksymację funkcji niewiadomych na powstałych w wyniku dyskretyzacji elementach brzegowych i liniowych. Ostatecznie otrzymuje się następujący układ równań algebraicznych:

$$0,5 j_{si} + \sum_{j=1}^{n_{s1}} b_{sij}^s j_{sj} + \sum_{j=1}^{n_s} b_{ij}^s j_{ij} - \sum_{j=1}^{n_s} b_{\sigma ij}^s \sigma_{mj} - \sum_{j=1}^{n_l} b_{\tau ij}^s \tau_{mj} = -\mathbf{s}_i \cdot (\mathbf{n}_i \times \mathbf{H}_0(P_i)) \quad \text{dla } P_i \in \Gamma_i \quad (6.23)$$

$$0,5 j_{ti} + \sum_{j=1}^{n_{s1}} b'_{sij} j_{sj} + \sum_{j=1}^{n_{s1}} b'_{ij} j_{ij} - \sum_{j=1}^{n_s} b'_{\sigma ij} \sigma_{mj} - \sum_{j=1}^{n_l} b'_{\tau ij} \tau_{mj} = -\mathbf{t}_i \cdot (\mathbf{n}_i \times \mathbf{H}_0(P_i)) \quad \text{dla } P_i \in \Gamma_i \quad (6.24)$$



Rys. 6.3. Trójwymiarowy obszar  $\Omega$  z podobszarami: powietrznym  $\Omega_0$ , wiroprowadowym  $\Omega_w$ , idealnymi ferromagnetykami  $K_f$  i  $\Gamma_f$ , podobszarem  $\Omega_e$  zawierającym prąd wzbudzenia o gęstości  $\mathbf{J}_e$  oraz krzywą  $K_e$  reprezentującą przewód z prądem wzbudzenia  $I_e$

$$0,5 \sigma_{mj} + \sum_{j=1}^{n_{S1}} b_{sij}^{\sigma} j_{sj} + \sum_{j=1}^{n_{S1}} b_{tij}^{\sigma} j_{tj} - \sum_{j=1}^{n_S} b_{\sigma ij}^{\sigma} \sigma_{mj} - \sum_{j=1}^{n_L} b_{\tau ij}^{\sigma} \tau_{mj} = -\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{H}_0(P_i) \quad \text{dla } P_i \in \Gamma_I \quad (6.25)$$

$$\sum_{j=1}^{n_S} a_{\sigma ij} \sigma_{mj} + \sum_{j=1}^{n_L} a_{\tau ij} \tau_{mj} = C_k - \psi_0(P_i) \quad \text{dla } P_i \in \Gamma_f \cup \Gamma_{K_f}, k=1,2 \quad (6.26)$$

$$\sum_{j=1}^{n_{S2}} s_j \sigma_{mj} = 0 \quad \text{dla } s_j \in \Gamma_f \quad (6.27)$$

$$\sum_{j=1}^{n_L} l_j \tau_{mj} = 0 \quad l_j \in K_f \quad (6.28)$$

Przy czym  $j_{sj}$  i  $j_{tj}$  są składowymi stycznymi fikcyjnej gęstości prądu powierzchniowego na  $j$ -tym elemencie brzegowym, należącym do  $\Gamma_I$ ;  $\sigma_{mj}$  jest fikcyjnym magnetycznym ładunkiem powierzchniowym na  $j$ -tym elemencie brzegowym, natomiast  $\tau_{mj}$  jest gęstością fikcyjnego liniowego ładunku magnetycznego na  $j$ -tym elemencie liniowym;  $s_j$  jest polem powierzchni  $j$ -tego elementu brzegowego, a  $l_j$  jest długością  $j$ -tego elementu liniowego;  $n_{S1}$  jest liczbą elementów brzegowych na brzegu obszaru wiroprowadowego,  $n_{S2}$  i  $n_L$  są odpowiednio liczbami elementów brzegowych i liniowych

na brzegach idealnych ferromagnetyków, natomiast  $n_S$  jest całkowitą liczbą elementów brzegowych. Współczynniki powyższego układu równań algebraicznych wyznacza się z następujących wzorów:

$$b_{sij}^s = \mathbf{s}_i \cdot \left[ \mathbf{n}_i \times \int_{\Gamma_j} (\mathbf{s}_j \times \text{grad}_i G_H(P, P_i)) dP \right] = \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{A}_{ij} \quad (6.29)$$

$$b_{tij}^s = \mathbf{s}_i \cdot \left[ \mathbf{n}_i \times \int_{\Gamma_j} (\mathbf{t}_j \times \text{grad}_i G_H(P, P_i)) dP \right] = \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{C}_{ij} \quad (6.30)$$

$$b_{\sigma ij}^s = \mathbf{s}_i \cdot \left[ \mathbf{n}_i \times \int_{\Gamma_j} \text{grad}_i G_L(P, P_i) dP \right] = \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{D}_{ij} \quad (6.31)$$

$$b_{\tau ij}^s = \mathbf{s}_i \cdot \left[ \mathbf{n}_i \times \int_{K_j} \text{grad}_i G_L(P, P_i) dP \right] = \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{F}_{ij} \quad (6.32)$$

$$b_{sij}^t = \mathbf{t}_i \cdot \mathbf{A}_{ij}, \quad b_{tij}^t = \mathbf{t}_i \cdot \mathbf{C}_{ij}, \quad b_{\sigma ij}^t = \mathbf{t}_i \cdot \mathbf{D}_{ij}, \quad b_{\tau ij}^t = \mathbf{t}_i \cdot \mathbf{F}_{ij} \quad (6.33)$$

$$b_{sij}^\sigma = \mathbf{n}_i \cdot \frac{\mu}{\mu_0} \int_{\Gamma_j} \mathbf{s}_j \times \text{grad}_i G_H(P, P_i) dP \quad (6.34)$$

$$b_{tij}^\sigma = \mathbf{n}_i \cdot \frac{\mu}{\mu_0} \int_{\Gamma_j} \mathbf{t}_j \times \text{grad}_i G_H(P, P_i) dP \quad (6.35)$$

$$b_{\sigma ij}^\sigma = \mathbf{n}_i \cdot \int_{\Gamma_j} \text{grad}_i G_L(P, P_i) dP \quad (6.36)$$

$$b_{\tau ij}^\sigma = \mathbf{n}_i \cdot \int_{K_j} \text{grad}_i G_L(P, P_i) dP \quad (6.37)$$

$$a_{\sigma ij} = \int_{\Gamma_j} G_L(P, P_i) dP \quad (6.38)$$

$$a_{\tau ij} = \int_{K_j} G_L(P, P_i) dP \quad (6.39)$$

Powyższe całki oblicza się numerycznie stosując kwadratury Gaussa [109].

Po rozwiązaniu układu równań (6.23) – (6.28) skalarny potencjał wtórnego pola magnetycznego w dowolnym punkcie przestrzeni powietrznej wyznacza się ze wzoru:

$$\psi_m(P_i) = \sum_{j=1}^{n_s} \int_{S_j} G_L(P, P_i) \sigma_m(P) dP + \sum_{j=1}^{n_l} \int_{L_j} G_L(P, P_i) \tau_m(P) dP \quad (6.40)$$

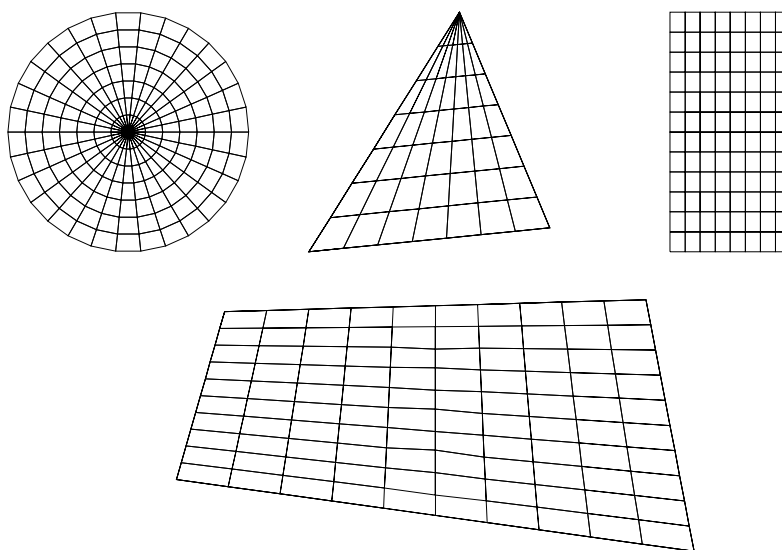
Natężenie wtórnego pola magnetycznego oblicza się analogicznie jak w przypadku pola elektrycznego, wykorzystując schematy różnicowe.

## 7. UWAGI NA TEMAT OPRACOWANYCH PROGRAMÓW KOMPUTEROWYCH

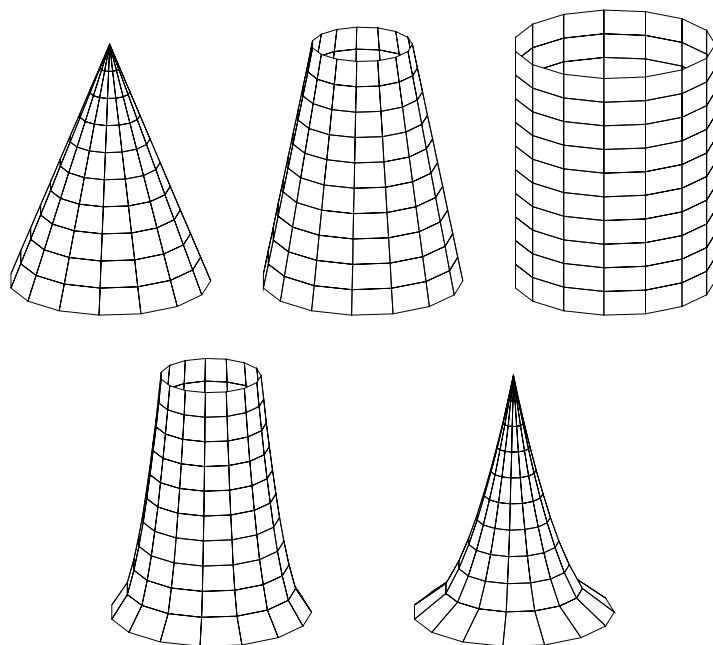
Modele matematyczne pól oraz wybrana w poprzednim rozdziale metoda numeryczna zostały wykorzystane przy opracowaniu odpowiednich procedur obliczeniowych tworzących pakiet oprogramowania BEMsolver 3D. Zarówno w zakresie zagadnień stacjonarnych, jak i quasistacjonarnych, program rozwiązuje problemy trójwymiarowe. W tym miejscu należy podkreślić, że trójwymiarowe zagadnienia wiropądowe wymagają znacznie większej pamięci operacyjnej i mocy obliczeniowej komputera niż zagadnienia stacjonarne o tej samej liczbie elementów brzegowych. Wynika to z trzykrotnie większej liczby niewiadomych na elementach pokrywających brzeg obszaru wiropądowego. Aktualna, rozszerzona wersja programu przeznaczona jest do użytkowania na komputerach typu PC, najlepiej z procesorem Pentium IV lub kompatybilnym, przy czym dla uzyskania rozsądnych czasów obliczeń jego częstotliwość nie powinna być mniejsza od 1,5 GHz. Ponadto komputer powinien być wyposażony w 1 GB pamięci RAM i mieć ok. 5 MB wolnej przestrzeni na twardym dysku. Omawiana wersja programu umożliwia rozwiązywanie zagadnień stacjonarnych, opisanych łączną liczbą 8400 elementów brzegowych i liniowych. W przypadku zagadnień quasistacjonarnych (wiropądowych) maksymalna liczba elementów brzegowych wynosi 1400. Całkowity czas obliczeń maksymalnego zadania (wliczając czas obliczania współczynników macierzy, czas rozwiązywania układu równań oraz czas wyznaczania wartości pola wewnątrz rozważanego obszaru) na komputerze z procesorem Pentium IV o częstotliwości 3,06 GHz wynosi ok. trzech godzin. Oczywiście, program w miarę potrzeb oraz możliwości dostępnego sprzętu komputerowego może być dostosowany do rozwiązywania zagadnień o znacznie większym rozmiarze. Istnieją również jego wersje przeznaczone do pracy na komputerach o dużo mniejszej mocy obliczeniowej. Przykładowo, wersja programu BEMsolver 3D nie uwzględniająca zagadnień wiropądowych, zainstalowana w opracowanym w Instytucie Elektrotechniki komercyjnym pakiecie EMFA [61, 62], może być efektywnie użytkowana już na PC z procesorem Pentium III/600 MHz, z pamięcią RAM 128 MB. W tym przypadku można rozwiązywać zagadnienia o rozmiarze do 2800 elementów liniowych i brzegowych.

Dla łatwiejszego wprowadzania danych opisujących skomplikowane układy przestrzenne program wyposażono w generatory wielu obiektów geometrycznych, takich jak: podstawowe figury płaskie, niektóre bryły obrotowe czy różnego rodzaju wielościany. Istotnym elementem programu jest specjalnie opracowany generator kratownic słupów linii WN oraz bramek stacyjnych. Powyższy generator opracowany z wykorzystaniem danych zawartych w katalogach [37, 38] i dokumentacji [3] wyposażony jest w bibliotekę zawierającą praktycznie wszystkie serie i typy

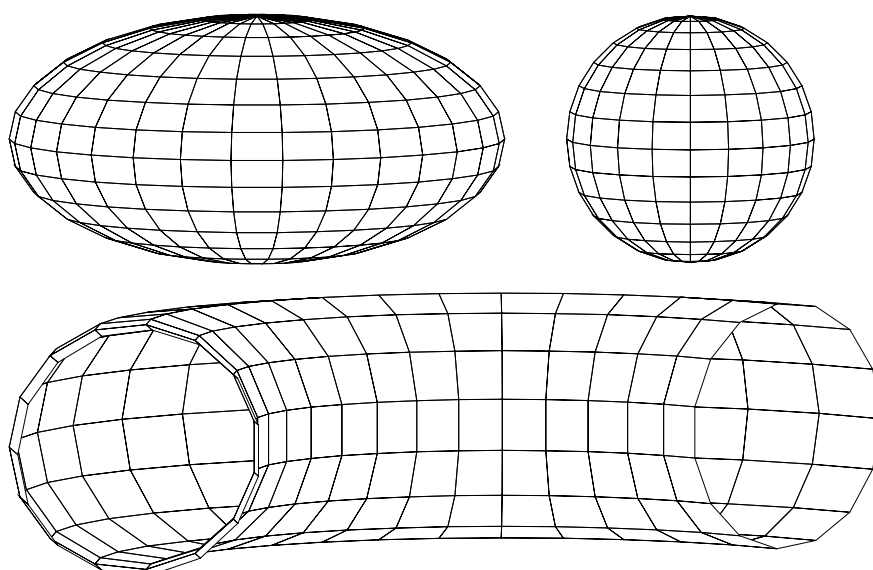
standardowych słupów występujących na terenie Polski, a także zawiera szeroki wybór bramek stacyjnych. Tak więc do odwzorowania na przykład określonego przęsła linii WN konieczne jest wprowadzenie jedynie niewielkiej liczby podstawowych danych wejściowych, takich jak: rozpiętość przęsła, typy i serie ograniczających je słupów, wysokość zawieszenia najniższego przewodu, jego minimalna odległość od ziemi i stan obciążenia linii. Pozostałe niezbędne do przeprowadzenia obliczeń wymiary i dane wyznaczane są automatycznie. Bez większych problemów program może być wzbogacony o nowe konstrukcje słupów WN czy bramek stacyjnych. Przykłady figur geometrycznych, kratownic słupów i bramek stacyjnych generowanych automatycznie przez omawiany program pokazano na rysunkach 7.1–7.13. Program BEMsolver 3D jest pakietem obliczeniowym, który może być wyposażony, w zależności od potrzeb, w odpowiednie procedury graficzne do współpracy z systemami Windows. Obecnie jego uproszczona wersja wykorzystywana jest we wspomnianym wcześniej komercyjnym pakiecie EMFA do analizy pól elektrycznych i magnetycznych na terenie i w sąsiedztwie obiektów elektroenergetycznych.



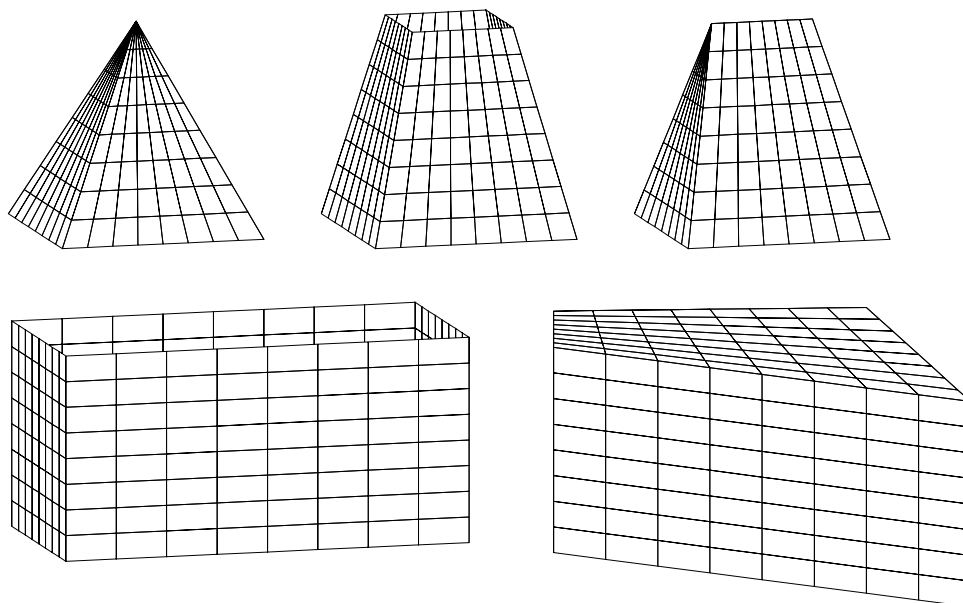
Rys. 7.1. Wybrane figury płaskie generowane automatycznie przez program BEMsolver 3D



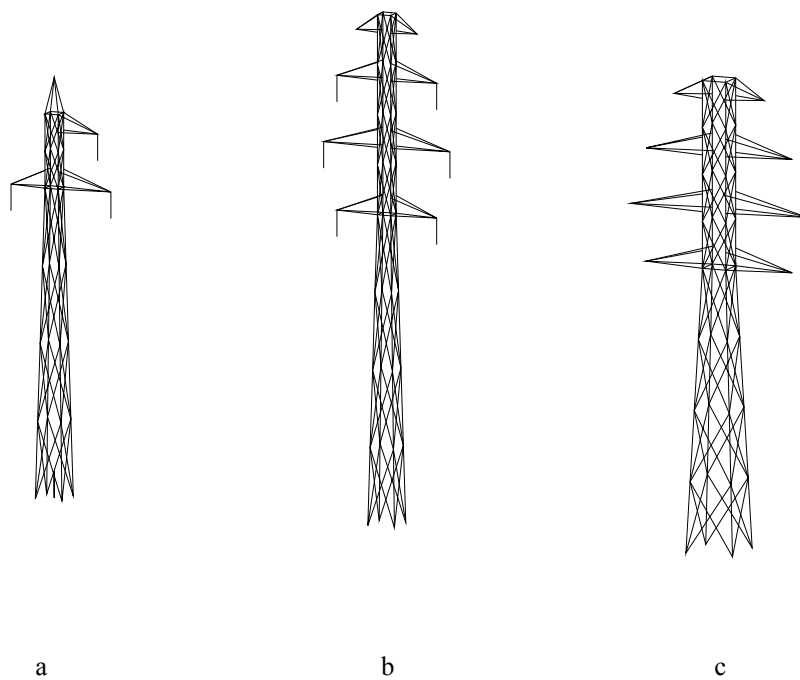
Rys. 7.2. Figury obrotowe tworzone automatycznie przez pakiet BEMsolver 3D



Rys. 7.3. Figury trójwymiarowe tworzone automatycznie przez pakiet BEMsolver 3D

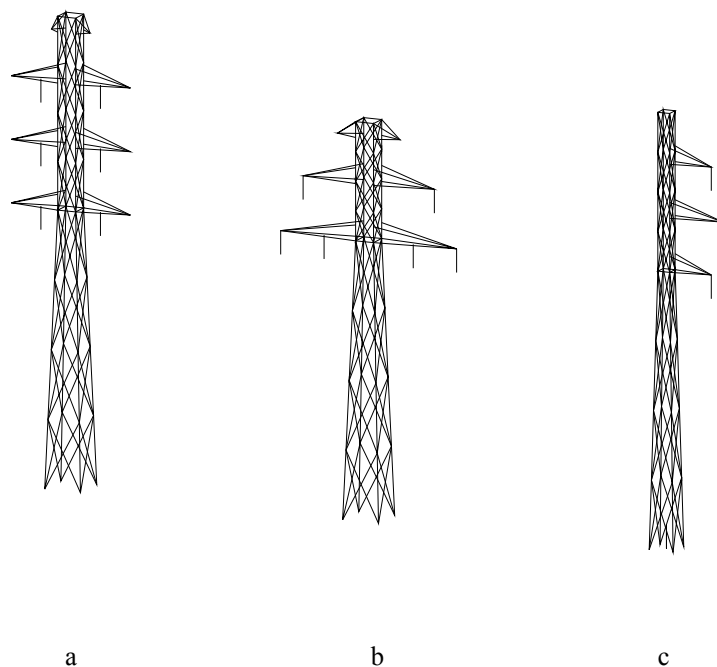


Rys. 7.4. Wielościany generowane przez pakiet BEMsolver 3D

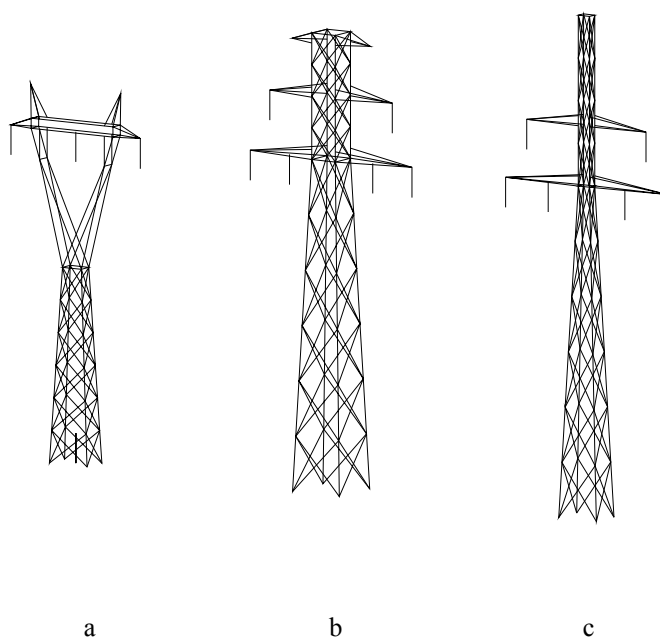


Rys. 7.5. Wybrane kratownice słupów linii 110 kV generowane automatycznie przez program BEMsolver 3D (a – seria S12, typ P, b – seria O24, typ P, c – seria O24 typ ON120)

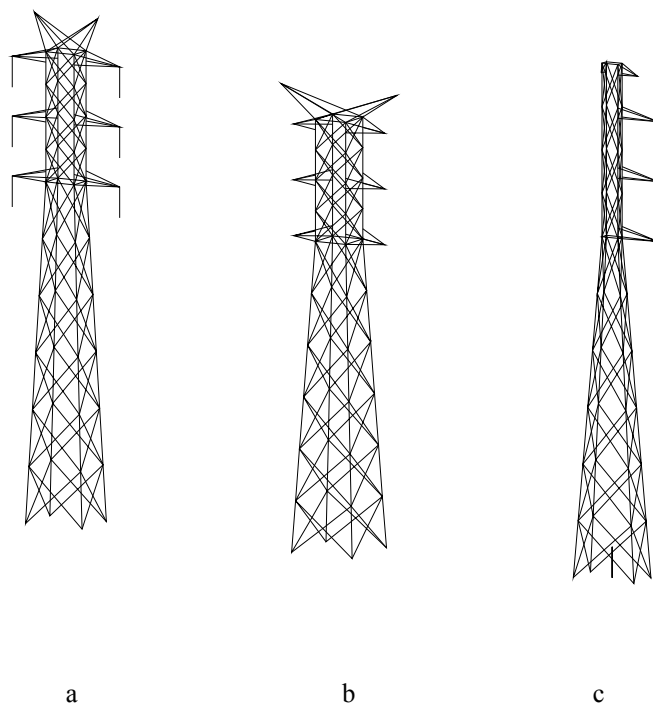




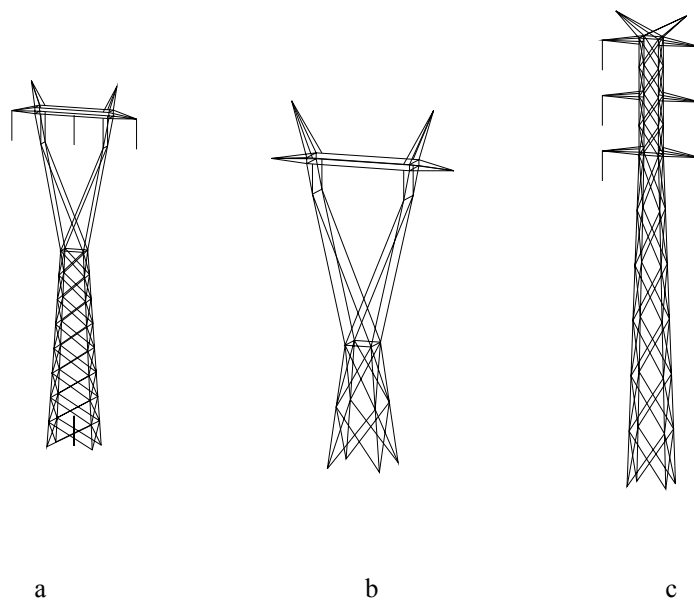
Rys. 7.6. Wybrane kratownice słupów linii 110 kV generowane automatycznie przez program BEMsolver 3D (a – seria C3 typ PL, b – seria D24 typ P, c – seria SL24 typ P)



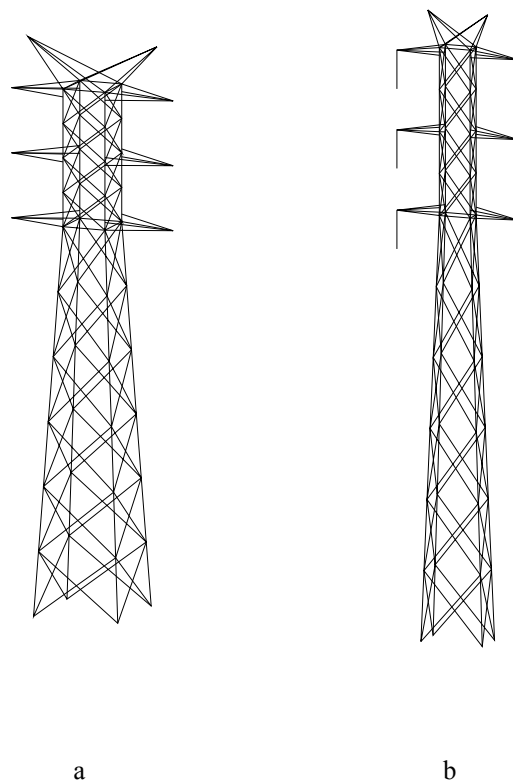
Rys. 7.7. Wybrane kratownice słupów linii 220 kV generowane automatycznie przez program BEMsolver 3D (a – H52 typ P, b – M52 typ PS, c – MC1 typ P)



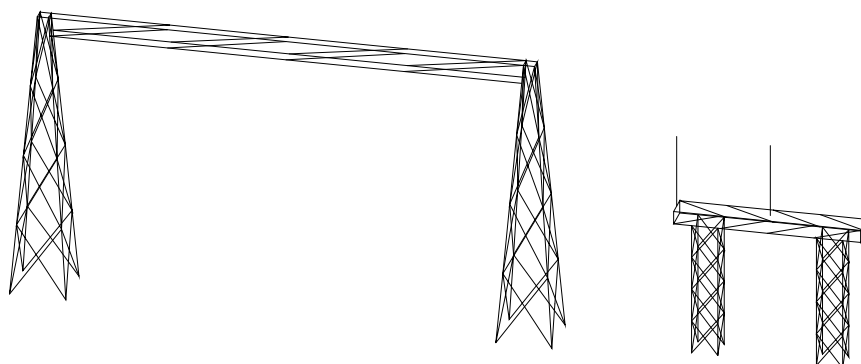
Rys. 7.8. Wybrane kratownice słupów linii 220 kV generowane automatycznie przez program BEMsolver 3D (a – ML52 typ P, b – ML52 typ ON150, c – HL52 typ P)



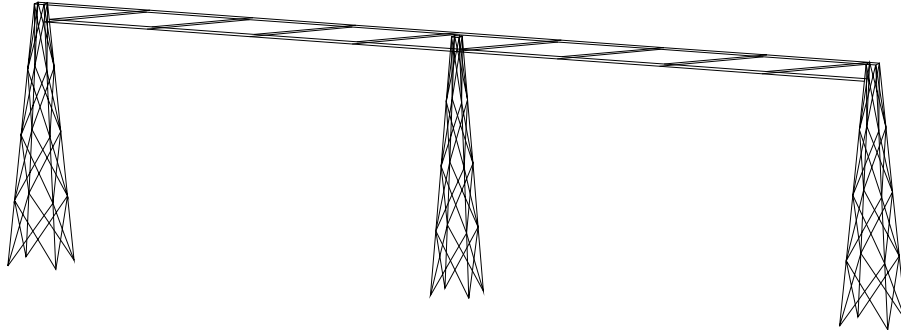
Rys. 7.9. Wybrane kratownice słupów linii 400 kV generowane automatycznie przez program BEMsolver 3D (a – Y25 typ PM, b – ON400 typ ON150, c – ZL52 typ PL)



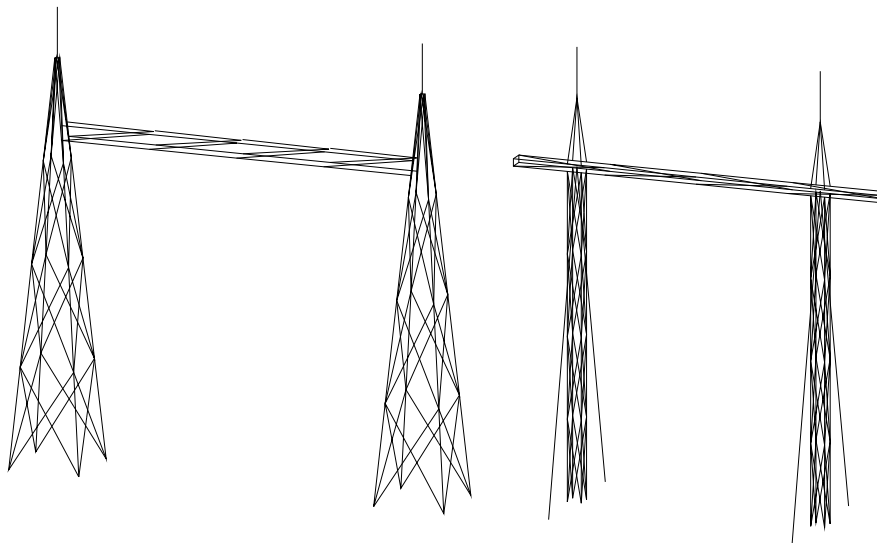
Rys. 7.10. Wybrane kratownice słupów linii 400 kV generowane automatycznie przez program BEMsolver 3D (a – Z52 typ ON120, b – Z33 typ P)



Rys. 7.11. Kratownice ramek szynowych generowane automatycznie przez program BEMsolver 3D



Rys. 7.12. Kratownica podwójnej bramki szynowej generowana automatycznie przez program BEMsolver 3D



Rys. 7.13. Kratownice bramek liniowych generowane automatycznie przez program BEMsolver 3D

## 8. APARATURA POMIAROWA

Do pomiarów, których wyniki przedstawiono w dalszej części pracy, wykorzystano szerokopasmowe mierniki pola serii Tracer model EF90 (pomiar pola elektrycznego) oraz model MR100SE (pomiar pola magnetycznego) amerykańskiej firmy Radiation Technology Inc. Zastosowano także zintegrowany miernik pola

elektrycznego i magnetycznego typu Maschek ESM 100 produkcji niemieckiej firmy Maschek Elektronik. W dalszej części tego rozdziału podano parametry techniczne wyżej wymienionych mierników.

### 8.1. Charakterystyka miernika pola elektrycznego typu Tracer EF90

Miernik pola elektrycznego Tracer EF90 pokazano na rysunku 8.1. Poniżej przedstawiono charakterystykę miernika podaną przez producenta:

- Zastosowanie: pomiar wartości skutecznej pola elektrycznego szkodliwego dla zdrowia i środowiska
- Zakresy pomiarowe natężenia pola elektrycznego w zakresie częstotliwości ELF (30 ÷ 2000) Hz:  
Low (1.0 ÷ 199.9) V/m,  
High (0.10 ÷ 19.99) kV/m
- Zakresy pomiarowe natężenia pola elektrycznego w zakresie częstotliwości VLF (2 ÷ 500) kHz:  
Low (1. ÷ 199.9) V/m,  
High (100 ÷ 1999) V/m
- Błąd graniczny:  $\pm (5 \% \text{ wartości zmierzonej} + 4 c)$   
gdzie  $c$  – wartość działości elementarnej (cyfra)
- Zasilanie: bateryjne (jedna bateria alkaliczna 9 V)
- Miernik EF90 wyposażono w wyświetlacz ciekłokrystaliczny 3½ cyfry, wskaźnik wyładowania baterii i przekroczenia zakresu.

Wstępne pomiary wykazały, że dane dotyczące dokładności miernika zawarte w dokumentacji producenta nie są dotrzymane. Ze względu na brak możliwości wykonania kalibracji miernika na terenie kraju zdecydowano się na zbudowanie własnego stanowiska do skalowania mierników pola elektrycznego. Pomiary, których wyniki przedstawiono w dalszej części pracy, wykonano miernikiem wyskalowanym na wspomnianym stanowisku kalibracyjnym. Ocenia się, że błąd pomiarów nie przekracza 10% wartości mierzonej.

### 8.2. Charakterystyka miernika pola magnetycznego typu Tracer MR100SE

Miernik pola elektrycznego Tracer MR100SE pokazano na rysunku 8.2. Poniżej przedstawiono charakterystykę miernika podaną przez producenta:

- Zastosowanie: pomiar wartości skutecznej pola magnetycznego szkodliwego dla zdrowia i środowiska
- Zakresy pomiarowe natężenia pola magnetycznego w zakresie częstotliwości ELF (5 ÷ 2000) Hz:  
Low (0.10 ÷ 19.99)  $\mu\text{T}$ ,

High (10 ÷ 1999)  $\mu$ T

- Zakresy pomiarowe natężenia pola magnetycznego w zakresie częstotliwości VLF (2 ÷ 400) kHz:

Low (1,0 ÷ 199,9) nT,

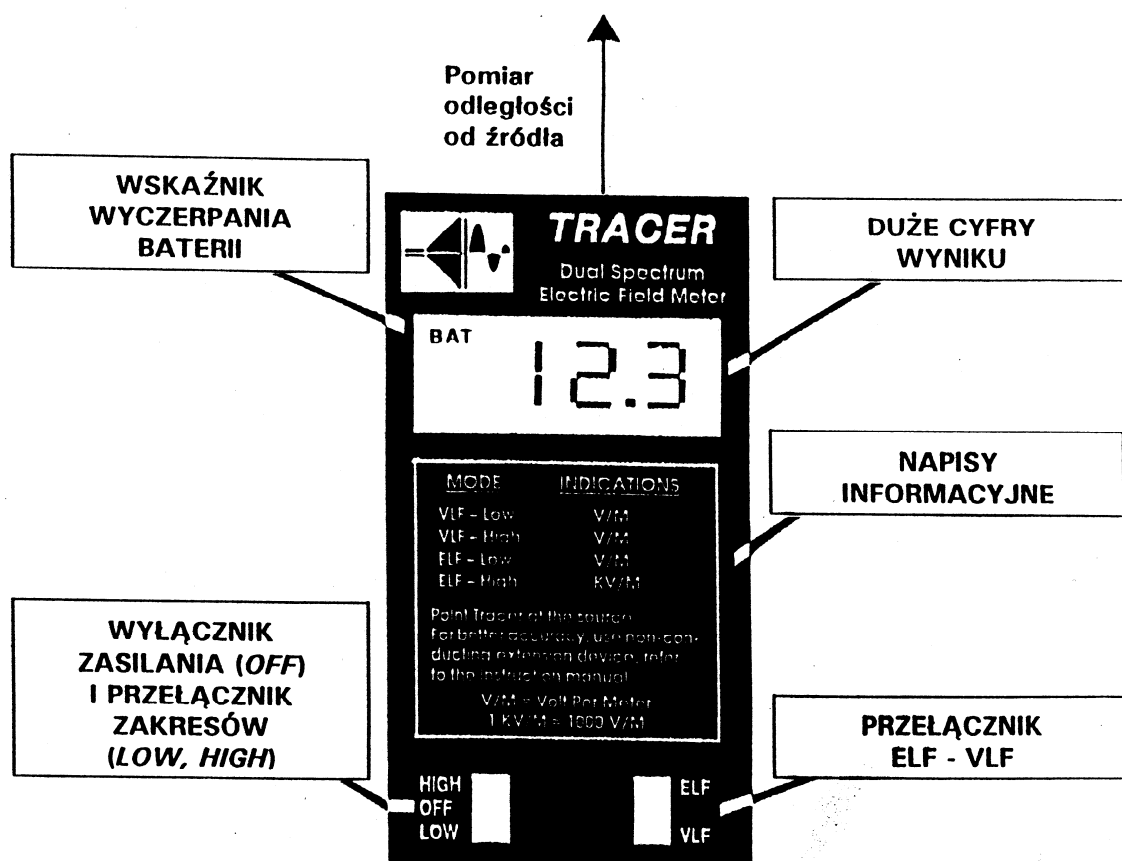
High (100 ÷ 1999) nT

- Błąd graniczny:  $\pm$  (5 % wartości zmierzonej + 4 c) gdzie c – wartość działki elementarnej (cyfra)

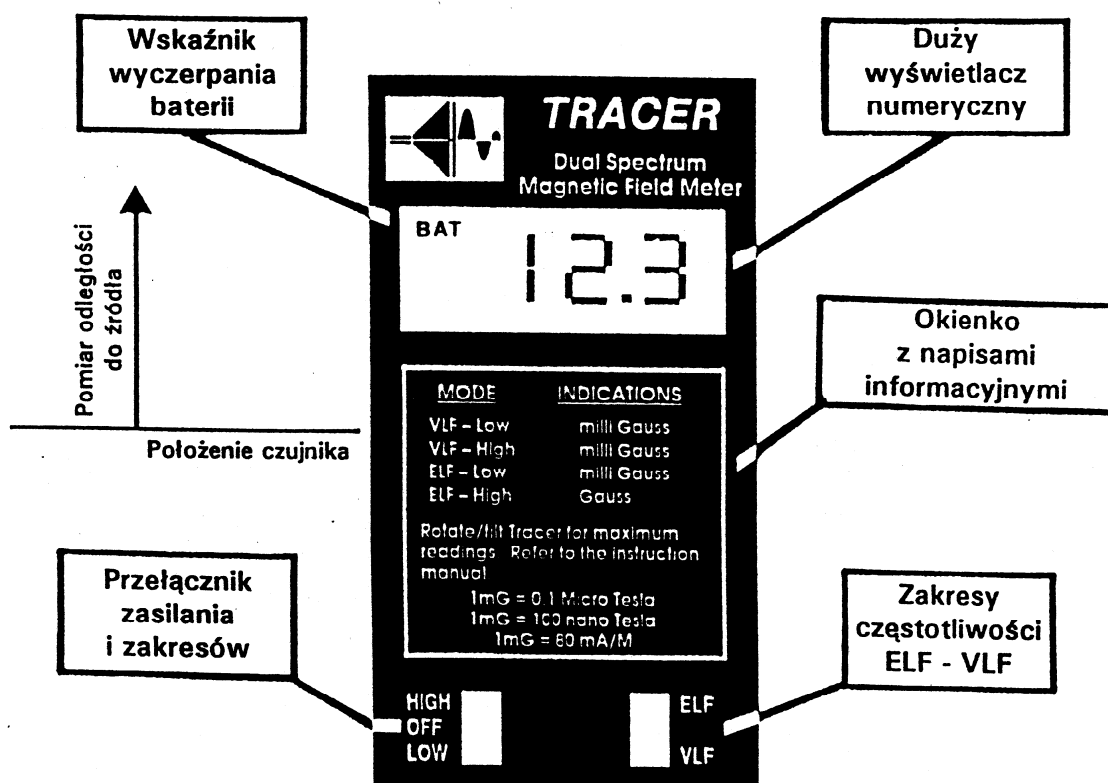
zasilanie: bateryjne (jedna bateria alkaliczna 9 V)

- Miernik MR100SE wyposażono w wyświetlacz ciekłokrystaliczny 3½ cyfry, wskaźnik wyladowania baterii i przekroczenia zakresu.

Przeprowadzone pomiary testowe nie wykazały istotnych rozbieżności między rzeczywistą dokładnością miernika, a dokładnością podaną przez producenta w dokumentacji technicznej.



Rys 8.1. Miernik pola elektrycznego typu Tracer EF90



Rys 8.2. Miernik pola magnetycznego typu Tracer MR100SE

### 8.3. Charakterystyka zintegrowanego miernika pola elektrycznego i magnetycznego typu Maschek ESM-100

Do niektórych pomiarów wykorzystano zakupiony ostatnio przez Instytut Elektrotechniki miernik pól: elektrycznego i magnetycznego typu Maschek ESM-100 (rys 8.3), produkcji niemieckiej firmy Maschek Elektronik. Cechy funkcjonalne i parametry miernika podane przez producenta są następujące:

- Jednoczesny izotropowy pomiar pól: elektrycznego i magnetycznego w jednym punkcie (bezkierunkowa sonda pola elektrycznego i magnetycznego)
- Zakres częstotliwości od 5 Hz do 400 kHz
- Zakresy pomiarowe 100 mV/m – 100 kV/m i 1 nT – 20 mT
- Wyświetlacz ciekłokrystaliczny 3½
- Dokładność  $\pm 5\%$
- Długookresowa (24 h) rejestracja pól bez konieczności zasilania sieciowego i bez potrzeby połączenia z komputerem
- Pamięć rejestrująca do 1800 pomiarów oraz zegar czasu rzeczywistego
- Cztery filtry częstotliwości
- 30 h ciągłej pracy
- Bryzgoszczelność zgodnie IP65 wraz z uszczelnieniem przyłączy

Przeprowadzone pomiary testowe dla pól o częstotliwości 50 Hz nie wykazały istotnych rozbieżności między rzeczywistą dokładnością miernika, a dokładnością deklarowaną przez producenta.



Rys. 8.3. Zintegrowany miernik pola elektrycznego i magnetycznego typu Maschek ESM-100

#### **8.4. Technika wykonywania pomiarów pól elektrycznych i magnetycznych**

Pomiary pól elektromagnetycznych są stosunkowo skomplikowane i wymagają od prowadzącej je osoby pewnego przygotowania z zakresu teorii pola. Zachowanie szczególnej staranności konieczne jest przy pomiarach pola elektrycznego niskiej częstotliwości, zważywszy na fakt, że obecność człowieka istotnie wpływa na jego rozkład. Człowiek podczas dokonywania odczytu powinien znajdować się w pewnej odległości (ok. 1,5 m) od sondy pomiarowej, z przeciwnej strony niż źródła pola.



W przypadku sondy kierunkowej konieczne jest jeszcze takie jej ustawienie, aby wskazanie miernika było maksymalne. Ten ostatni problem nie występuje w przypadku sondy bezkierunkowej. Istotne jest także precyzyjne ustawienie sondy w przestrzeni, co ma szczególne znaczenie w przypadku pól o dużym gradiencie. Tak więc na ostateczną dokładność pomiaru wpływa nie tylko dokładność miernika, ale także szczególna staranność oraz zachowanie powyższych reguł podczas wykonania pomiaru.

## 9. OBLICZENIA I POMIARY PÓL ELEKTRYCZNYCH I MAGNETYCZNYCH W WARUNKACH LABORATORYJNYCH

W celu weryfikacji opisanych wcześniej modeli matematycznych oraz procedur numerycznych przeprowadzono pomiary i obliczenia pól w warunkach laboratoryjnych, gdzie znacznie dokładniej niż w terenie można określić wszystkie parametry układu, takie jak dane geometryczne czy stan źródeł pola (prądy i napięcia), a także można wyeliminować zakłócenia zewnętrzne, pochodzące spoza rozważanego układu.

### 9.1. Opis stanowiska laboratoryjnego

Laboratorium znajdowało się w pomieszczeniu o powierzchni  $6,4 \text{ m} \times 5,6 \text{ m}$  i średniej wysokości (pochylony sufit)  $3,3 \text{ m}$ . Jednym z podstawowych urządzeń w laboratorium był model odcinka linii przesyłowej. Składał się on z trzech przewodów rozpiętych wzdłuż pomieszczenia. Przewody były wykonane z pojedynczych linek Cu w izolacji PCW. Przekrój linki był  $1 \times 12 \text{ mm}^2$ , a jej średnica zewnętrzna (tj. mierzona na izolacji) ok.  $4 \text{ mm}$ . Zamocowania przewodów umożliwiały skokowe rozsuwanie ich do maksymalnej odległości pomiędzy skrajnymi równej  $1,8 \text{ m}$ , przy zawieszeniu w konfiguracji poziomej; długość skoku wynosiła  $0,15 \text{ m}$ . Istniała możliwość opuszczania ich z płynną regulacją zwisu, a także rozmieszczenia wszystkich w płaszczyźnie pionowej.

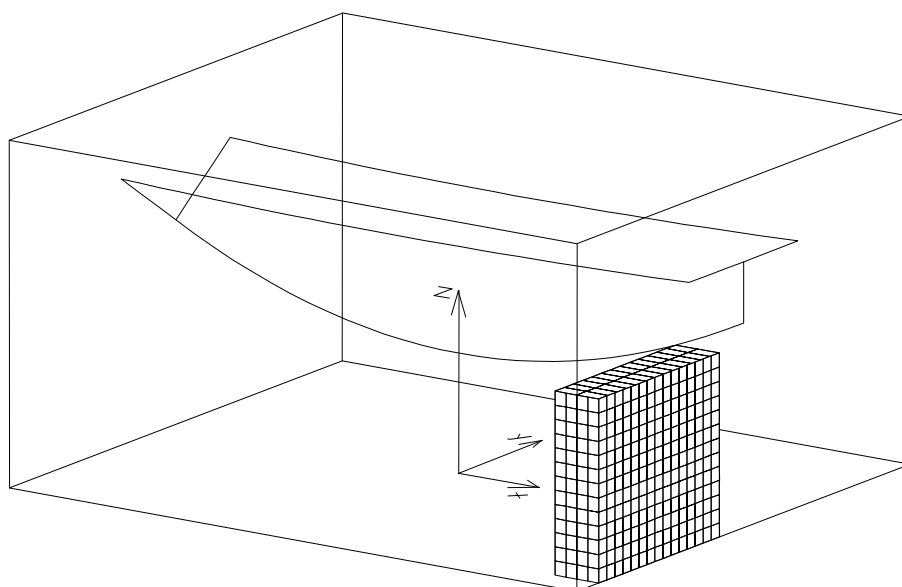
Pole elektryczne i magnetyczne wytwarzane były niezależnie. W celu wzbudzenia pola elektrycznego, do jednego końca przewodów przykładano napięcie, przy pozostawieniu drugiego ich końca w stanie rozwartym (bez przepływu prądu). Dla wzbudzenia pola magnetycznego wymuszano prąd w przewodach, przy zastosowaniu stosunkowo niewielkiego napięcia.

Model linii zasilano z jednego końca, drugi zaś koniec podłączony był do mierników tj. do amperomierzy i woltomierzy i zależnie od potrzeb otwarty lub połączony z odbiornikiem, wykonanym z części zdemontowanego rezystora wielkiej mocy.

Przy pomiarach pola elektrycznego stosowano napięcie  $220/380 \text{ V}$ , bezpośrednio z sieci. Zasilano wszystkie bądź wybrane przewody (jeden lub dwa), zależnie od prowadzonego pomiaru.

Przy pomiarach pola magnetycznego w układzie przewodów wymuszany był prąd do 30 A. Układ zasilany był z autotransformatorów: jednofazowego (do 12 A) lub trójfazowego (do 30 A).

W pomieszczeniu laboratoryjnym, pod jedną ze ścian, ustawione były dwie szafy stalowe o wymiarach  $1,5\text{ m} \times 1,8\text{ m} \times 0,5\text{ m}$  każda, zestawione razem. Szafy w swoim bezpośrednim sąsiedztwie wpływały na rozkłady pól. Ponadto, przy niektórych pomiarach wykorzystano także inne obiekty zniekształcające pole, mianowicie odcinek stalowej rury oraz wykonany ze stalowych prętów ekran (siatka Faraday'a).



Rys. 9.1. Uproszczony widok pomieszczenia laboratoryjnego z rozwieszonymi trzema przewodami (siatką elementów brzegowych pokryto dwie zestawione razem stalowe szafy)

## 9.2. Wyniki obliczeń i pomiarów pola elektrycznego

W pierwszej kolejności wykonano obliczenia i pomiary pola elektrycznego wzbudzanego przez przewody pod napięciem, pod nieobecność obiektów zniekształcających jego rozkłady. Pomierzono i obliczono natężenie pola elektrycznego wzdłuż linii poziomej  $x = 0$  dla czterech różnych konfiguracji i sposobów zasilania przewodów wzbudzających pole. We wszystkich przypadkach odległość między rzutami kolejnych przewodów na płaszczyznę poziomą wynosiła 0,9 m. W celu uniknięcia zniekształcenia pola przez obecność człowieka pomiary wykonywano miernikiem umieszczonym na drewnianym statywie, a wyniki odczytywano z odległości ok. 2,5 m. Pomiary

(konfiguracje od 1 do 4) wykonano miernikiem Tracer EF90. Natężenie tła pola elektrycznego w pomieszczeniu laboratoryjnym nie przekraczało 0,8 V/m.

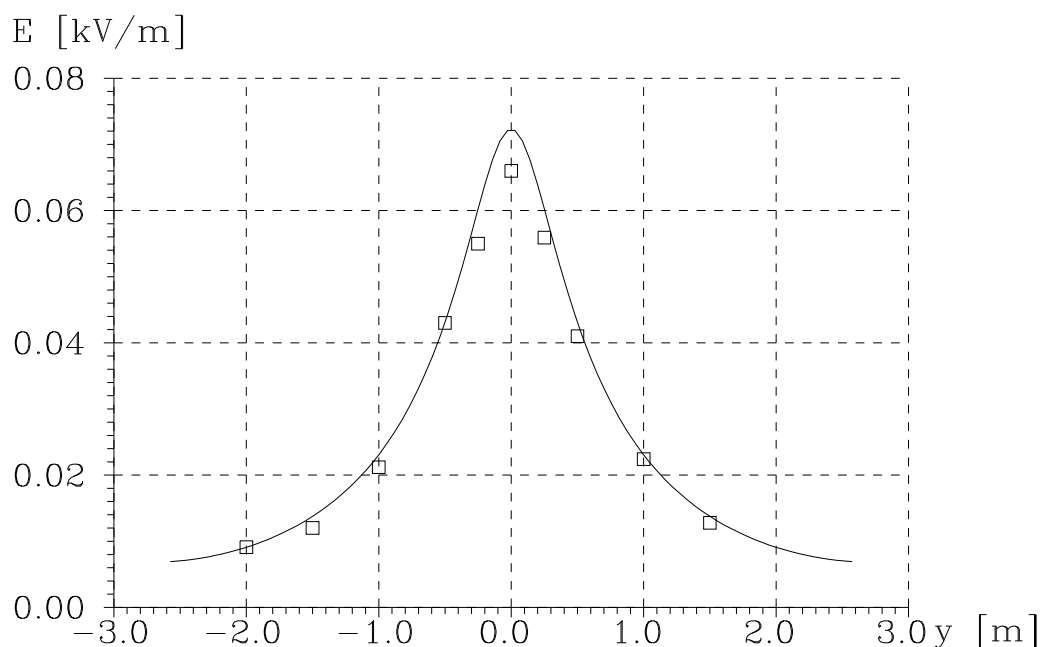
We wszystkich obliczeniach każdy z przewodów podzielono na 30 elementów prostoliniowych. Ponadto uwzględniono wpływ ścian i sufitu, które podzielono na 1125 elementów brzegowych.

### Konfiguracja 1:

Do źródła napięcia 220 V podłączono jedynie przewód środkowy, który zawieszony był na wysokości 2 m. Jego odległość od podłogi wynosiła 1,82 m. Pole mierzono na linii poziomej  $x = 0$ ,  $z = 1,42$  m. Wyniki pomiarów zamieszczono w tabeli 9.1. Wyniki obliczeń numerycznych oraz wyniki pomiarów pokazano na rysunku 9.2.

Tabela 9.1. Wyniki pomiarów pola elektrycznego w konfiguracji 1

$y$ [m]	-2,0	-1,5	-1,0	-0,5	-0,25	0	0,25	0,50	1,0	1,5
$E$ [V/m]	9,1	12	21	43	55	66	56	41	22	13



Rys. 9.2. Rozkład pola elektrycznego w pomieszczeniu laboratoryjnym na linii poziomej  $x = 0$ ,  $z = 1,42$  m (konfiguracja 1)

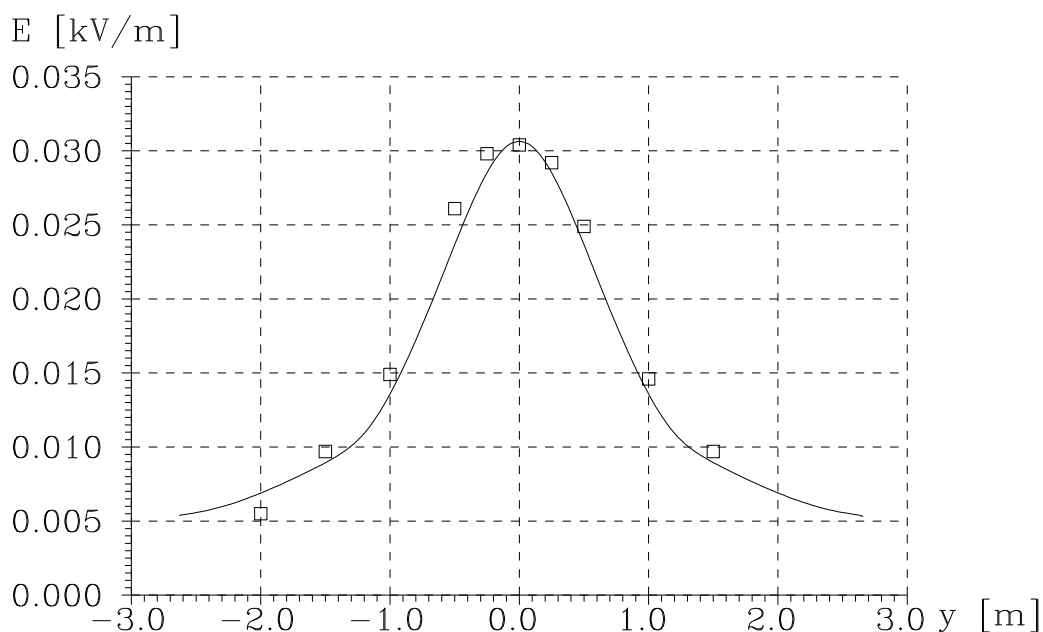
linia ciągła – wyniki obliczeń  
kwadraciki – wyniki pomiarów

Konfiguracja 2:

Trzy przewody podłączono do trójfazowego źródła napięcia  $3 \times 380$  V. Skrajne przewody zawieszono na wysokości 2,6 m, a ich odległość od podłogi wynosiła 2,54 m. Środkowy przewód zawieszono na wysokości 2,0 m, a jego odległość od ziemi wynosiła 1,82 m. Pole mierzono na linii poziomej  $x = 0$ ,  $z = 1,05$  m. Wyniki pomiarów zestawiono w tabeli 9.2. Wyniki obliczeń numerycznych i pomiarów przedstawiono na rysunku 9.3.

Tabela 9.2. Wyniki pomiarów pola elektrycznego w konfiguracji 2

$y$ [m]	-2,0	-1,5	-1,0	-0,5	-0,25	0	0,25	0,50	1,0	1,5
$E$ [V/m]	5,5	9,7	14,9	26,1	29,8	30,4	29,2	24,9	14,6	9,7

Rys. 9.3. Rozkład pola elektrycznego w pomieszczeniu laboratoryjnym na linii poziomej  $x = 0$ ,  $z = 1,05$  m (konfiguracja 2)

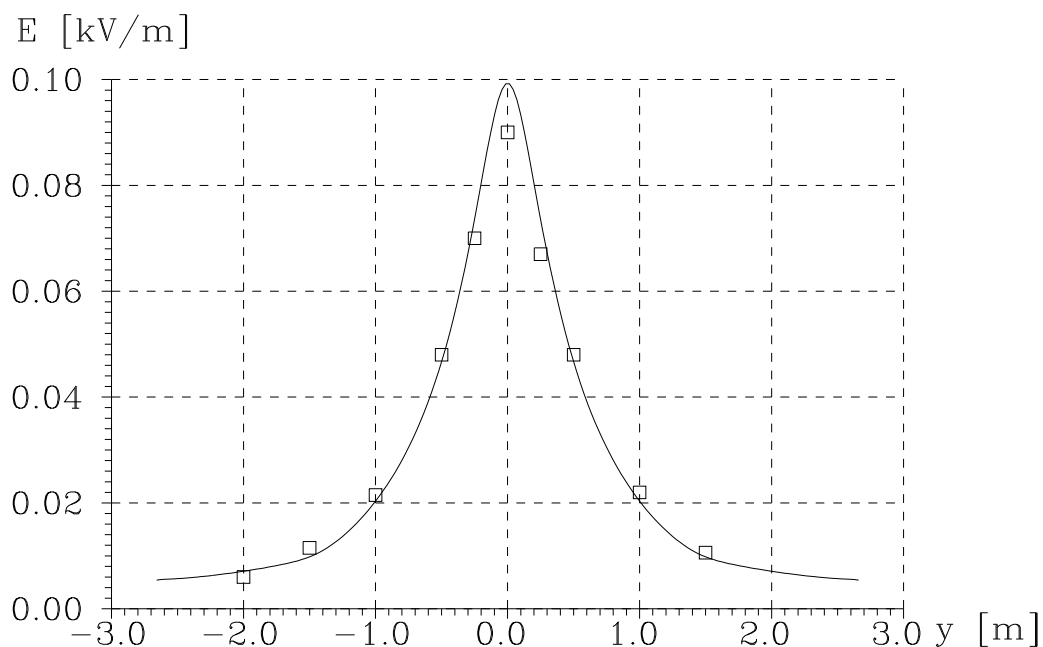
linia ciągła – wyniki obliczeń  
kwadraciki – wyniki pomiarów

Konfiguracja 3:

Podobnie jak w konfiguracji 2, trzy przewody zasilono z trójfazowego źródła napięcia  $3 \times 380$  V. Skrajne przewody zawieszono na wysokości 2,6 m, a ich odległość od podłogi wynosiła 2,54 m. Środkowy przewód zawieszono na wysokości 2,0 m, a jego odległość od podłogi wynosiła 1,35 m. Pomiary wykonano na linii poziomej  $x = 0$ ,  $z = 1,05$  m. Wyniki pomiarów zestawiono w tabeli 9.3. Wyniki obliczeń numerycznych i wyniki pomiarów pokazano na rysunku 9.4.

Tabela 9.3. Wyniki pomiarów pola elektrycznego w konfiguracji 3

$y$ [m]	-2,0	-1,5	-1,0	-0,5	-0,25	0	0,25	0,50	1,0	1,5
$E$ [V/m]	6	11,5	21,5	48	70	90	67	48	22	10,6



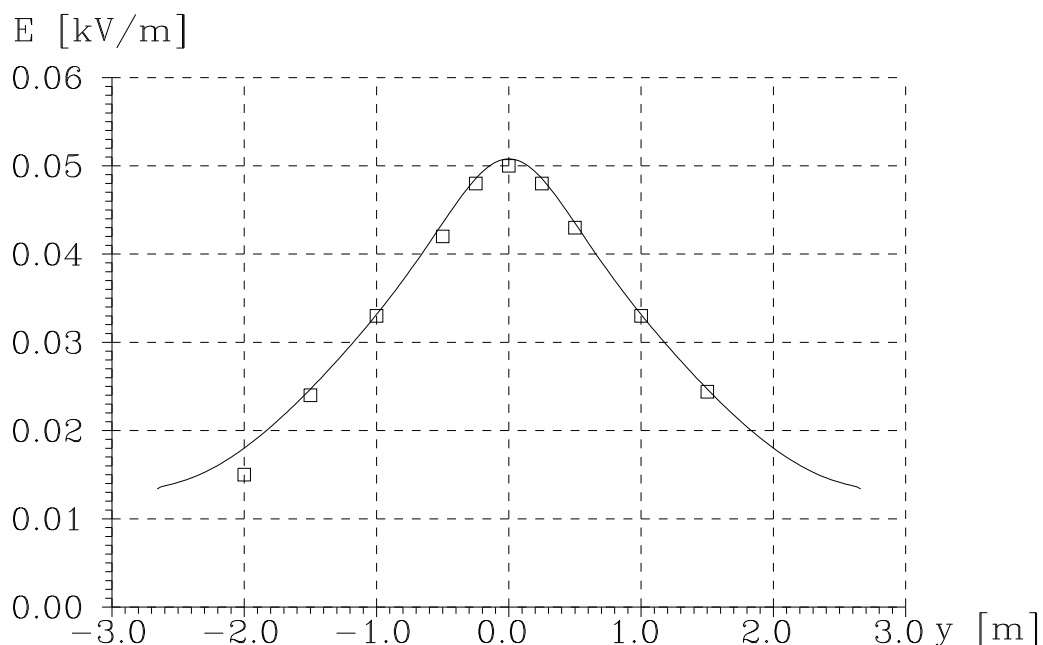
Rys. 9.4. Rozkład pola elektrycznego w pomieszczeniu laboratoryjnym na linii poziomej  $x = 0$ ,  $z = 1,05$  m (konfiguracja 3)  
linia ciągła – wyniki obliczeń  
kwadraciki – wyniki pomiarów

Konfiguracja 4:

W tym przypadku wszystkie trzy przewody połączono z tym samym źródłem napięcia 220 V. Skrajne przewody zawieszono na wysokości 2,6 m, a ich odległość od podłogi wynosiła 2,54 m. Środkowy przewód zawieszony był na wysokości 2,0 m, a jego odległość od podłogi wynosiła 1,82 m. Pomiary wykonano na linii poziomej  $x = 0$ ,  $z = 1,05$  m. Wyniki pomiarów zestawiono w tabeli 9.4. Wyniki obliczeń numerycznych oraz wyniki pomiarów pokazano na rysunku 9.5.

Tabela 9.4. Wyniki pomiarów pola elektrycznego w konfiguracji 4

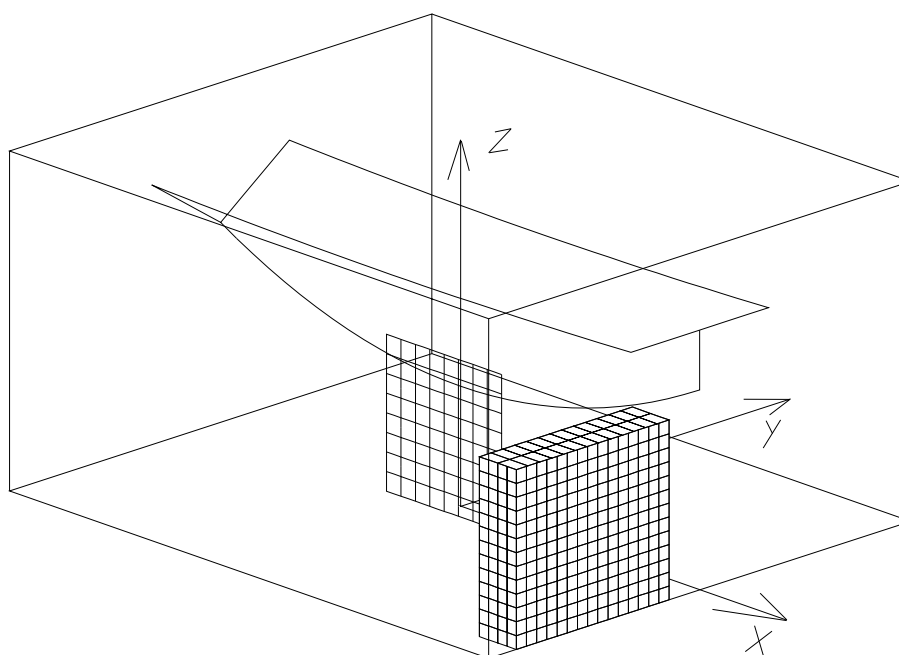
$y$ [m]	-2,0	-1,5	-1,0	-0,5	-0,25	0	0,25	0,50	1,0	1,5
$E$ [V/m]	15	24	33	42	48	50	48	43	33	24,4



Rys. 9.5. Rozkład pola elektrycznego w pomieszczeniu laboratoryjnym na linii poziomej  $x = 0$ ,  $z = 1,05$  m dla konfiguracji 4  
 linia ciągła – wyniki obliczeń  
 kwadraciki – wyniki pomiarów

W dalszej części niniejszego punktu przedstawiono obliczenia i pomiary pola w sąsiedztwie wcześniej wspomnianego ekranu o wymiarach:  $1,56\text{ m} \times 1,57\text{ m}$ , wykonanego z osiemnastu stalowych prętów o średnicy  $0,07\text{ m}$ . Ekran ustawiono pionowo wzdłuż pomieszczenia, w odległości  $0,25\text{ m}$  od środkowego przewodu, tak jak to pokazano na rysunku 9.6. W obliczeniach ściany i sufit pomieszczenia pokryto łączną liczbą 1125 elementów brzegowych, natomiast ekran podzielono na 288 elementów liniowych. Pomiary wykonano miernikiem Maschek ESM-100 (konfiguracja 5 i 6). Wyniki obliczeń i pomiarów pokazano na rysunkach 9.7 i 9.8.

Na zakończenie niniejszego podrozdziału należy stwierdzić, że we wszystkich rozważanych przypadkach uzyskano zadawalającą zgodność wyników obliczeń i pomiarów. Potwierdza to prawidłowość zaproponowanego modelu pola elektrycznego dla rozważanych tutaj zagadnień. Świadczy to również o dostatecznej dokładności wybranego wariantu metody numerycznej łączącej MEB i MEL oraz o prawidłowym działaniu opracowanych algorytmów i programów komputerowych.



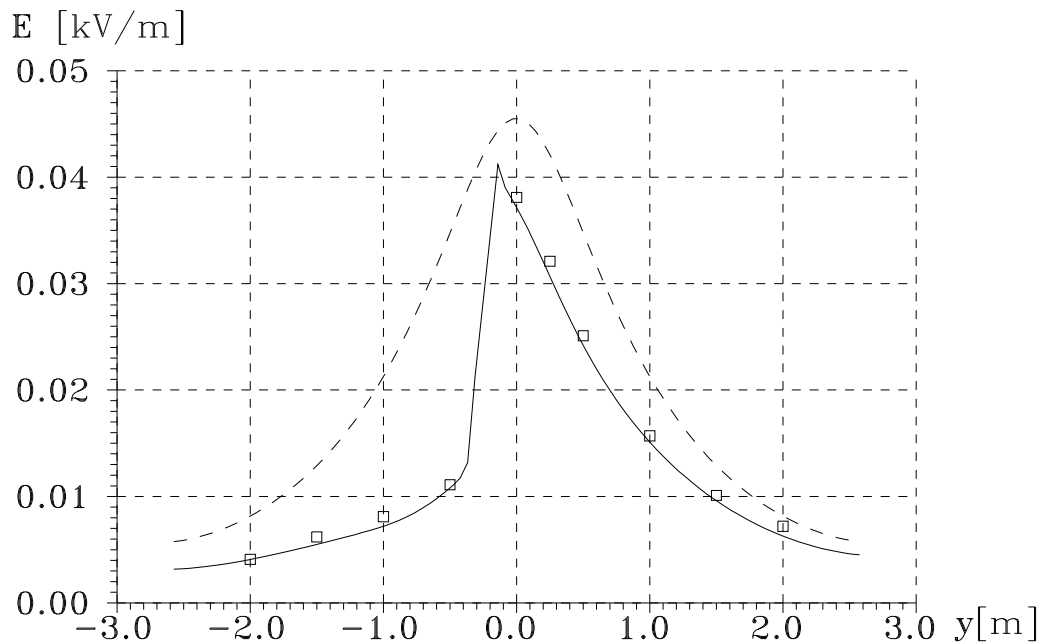
Rys. 9.6. Widok ogólny pomieszczenia laboratoryjnego z umieszczonym centralnie ekranem wykonanym z 18 stalowych prętów

Konfiguracja 5:

W rozważanej konfiguracji do źródła napięcia 220 V podłączono jedynie przewód środkowy, który zawieszony był na wysokości 2 m. Jego odległość od podłogi wynosiła 1,62 m. Pole mierzono na linii poziomej  $x = 0$ ,  $z = 0,95$  m. Wyniki pomiarów zamieszczono w tabeli 9.5. Wyniki obliczeń numerycznych oraz wyniki pomiarów pokazano na rysunku 9.7.

Tabela 9.5. Wyniki pomiarów pola elektrycznego w konfiguracji 5

$y$ [m]	-2,0	-1,5	-1,0	-0,5	0	0,25	0,50	1,0	1,5	2,0
$E$ [V/m]	4,1	6,2	8,1	11,1	38,1	32,1	25,1	15,7	10,1	7,2



Rys. 9.7. Rozkład pola elektrycznego w pomieszczeniu laboratoryjnym na linii poziomej  $x = 0$ ,  $z = 0,95$  m (konfiguracja 5)

linia przerywana – obliczony rozkład pola pod nieobecność ekranu

linia ciągła – wyniki obliczeń

kwadraciki – wyniki pomiarów

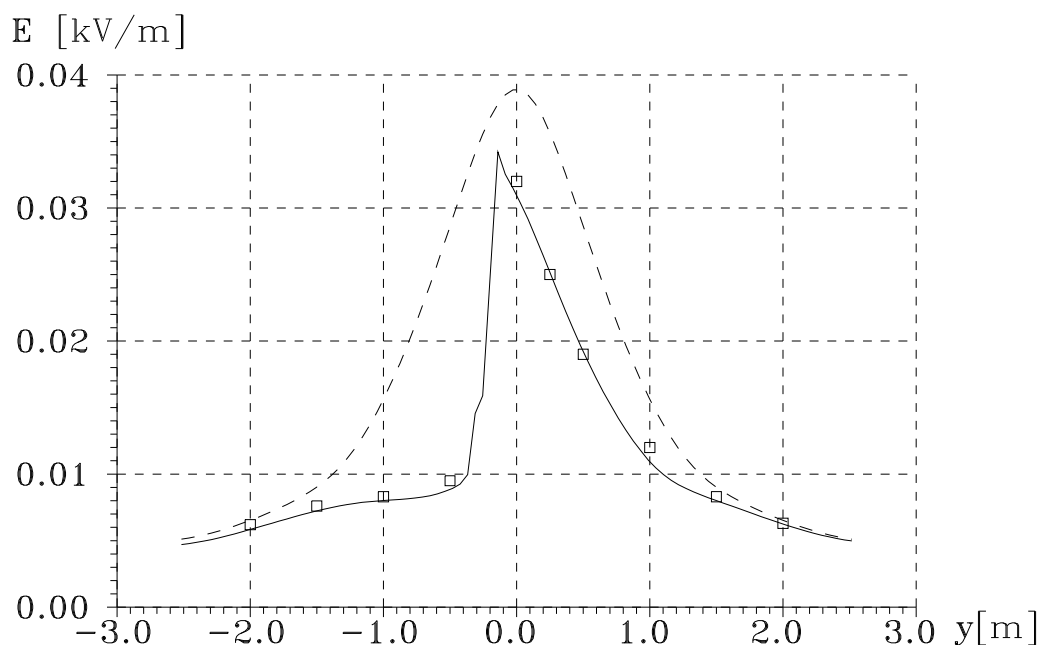


Konfiguracja 6:

Trzy przewody podłączono do trójfazowego źródła napięcia  $3 \times 380$  V. Skrajne przewody zawieszono na wysokości 2,6 m, a ich odległość od podłogi wynosiła 2,54 m. Środkowy przewód zawieszono na wysokości 2,0 m, a jego odległość od podłogi wynosiła 1,62 m. Pomiary wykonano na linii poziomej  $x = 0$ ,  $z = 0,95$  m. Wyniki pomiarów zamieszczono w tabeli 9.6. Wyniki obliczeń numerycznych oraz wyniki pomiarów pokazano na rysunku 9.8.

Tabela 9.6. Wyniki pomiarów pola elektrycznego w konfiguracji 6

$y$ [m]	-2,0	-1,5	-1,0	-0,5	0	0,25	0,50	1,0	1,5	2,0
$E$ [V/m]	6,2	7,6	8,3	9,5	32,0	25,0	19,0	12,0	8,3	6,3



Rys. 9.8. Rozkład pola elektrycznego w pomieszczeniu laboratoryjnym na linii poziomej  $x = 0$ ,  $z = 0,95$  m (konfiguracja 6)

linia przerywana – obliczony rozkład pola pod nieobecność ekranu

linia ciągła – wyniki obliczeń,

kwadraciki – wyniki pomiarów,

### 9.3. Wyniki obliczeń i pomiarów pola magnetycznego

Dla zweryfikowania zaproponowanych w pracy modeli pola magnetycznego oraz opracowanych programów komputerowych wykonano obliczenia i pomiary pola głównie w sąsiedztwie obiektów zniekształcających jego rozkłady. Obiektami tymi były: wspomniany wcześniej odcinek stalowej rury, opisany w poprzednim punkcie ekran z prętów stalowych oraz dwie stalowe szafy. Obliczenia wykonano stosując zarówno uproszczony model pola jak i model uwzględniający oddziaływanie prądów wirowych.

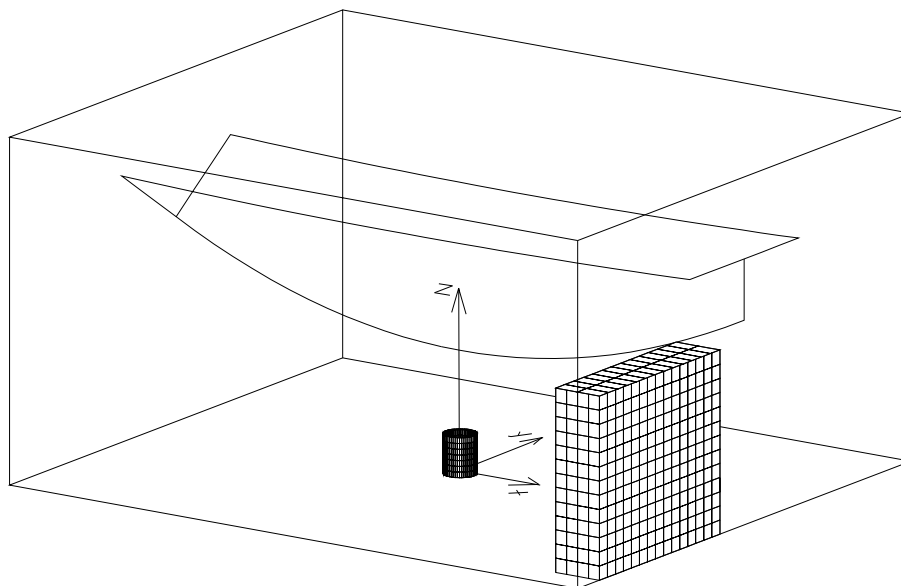
W pierwszej kolejności wykonano obliczenia i pomiary natężenia pola magnetycznego, pod nieobecność obiektów zniekształcających jego rozkłady, a następnie w sąsiedztwie ustawionego centralnie odcinka stalowej rury o średnicy 0,27/0,324 m i wysokości 0,39 m. Pomiary przeprowadzono dla różnych sposobów zasilania przewodów modelu linii. Geometryczny układ przewodów przedstawiono na rysunku 9.9. Skrajne przewody zawieszono na wysokości 2,6 m, a ich najmniejsza odległość od podłogi wynosiła 2,54 m. Przewód środkowy zawieszony był na wysokości 2,0 m, a jego minimalna odległość od podłogi wynosiła 1,2 m. Odległości między rzutami kolejnych przewodów na płaszczyznę podłogi wynosiły 0,9 m.

W obliczeniach odcinek rury (rys. 9.10) podzielono na 1280 elementów brzegowych. Obie szafy podzielono na łączną liczbę 1048 elementy brzegowe. Opisaną w tym miejscu część pomiarów wykonano miernikiem Tracer MR100SE (konfiguracja od 7 do 12) oraz miernikiem Maschek ESM-100 (konfiguracja 13). Ten ostatni przypadek dotyczył pomiarów i obliczeń pola magnetycznego w sąsiedztwie ekranu wykonanego ze stalowych prętów, którego wymiary podano w punkcie 9.2.

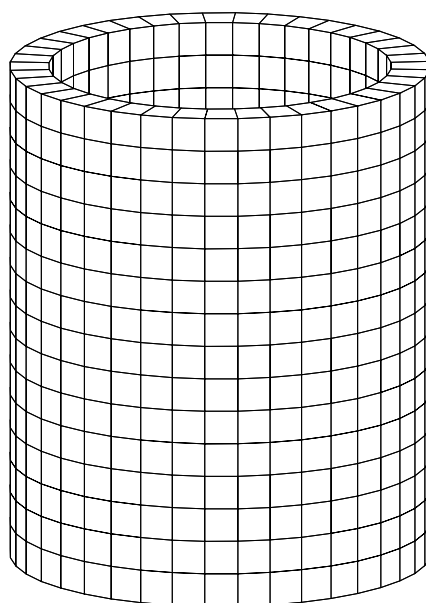
Podczas wykonywania pomiarów tło w pomieszczeniu laboratoryjnym nie przekraczało 0,2 A/m. Wyniki obliczeń i pomiarów pokazano na rysunkach 9.11 – 9.17.

W podsumowaniu niniejszego punktu należy stwierdzić, że model uproszczony pola magnetycznego, zastosowany do obiektów wykonanych z litych ferromagnetyków (w przypadku słabych pól tzn. nie powodujących nasycenia), prowadzi do wyników, które mogą być traktowane jako przybliżone. Dokładniejsze wyniki (dla słabych pól) otrzymuje się poprzez uwzględnienie prądów wirowych, choć wymaga to znacznie większej mocy obliczeniowej komputera. Jednocześnie należy dodać, że przyjęty model matematyczny zagadnień wiropądowych jest skuteczny, a opracowany program komputerowy działa prawidłowo.

W tym miejscu trzeba także stwierdzić, że zastosowanie modelu uproszczonego wykorzystującego elementy liniowe w odniesieniu do ekranu zbudowanego z prętów stalowych (siatka Faraday'a) nie prowadzi do zadawalających wyników. W obliczeniach uwidacznia się silne oddziaływanie ekranu na rozkład pola. W rzeczywistości, na co wskazują pomiary, wpływ ten jest nieznaczny. Spowodowane jest to prawdopodobnie nieuwzględnieniem prądów indukujących się w prętach ekranu. Podobne wyniki otrzymano mierząc oddziaływanie kratownic słupów WN na rozkłady pola magnetycznego w ich bezpośrednim sąsiedztwie. Z powyższego wynika, że w obliczeniach można zaniedbać wpływ kratownic na rozkłady pola magnetycznego.



Rys. 9.9. Widok ogólny pomieszczenia laboratoryjnego z uwidocznionymi obiektami zniekształcającymi pole – odcinkiem stalowej rury oraz dwoma zestawionymi razem stalowymi szafami



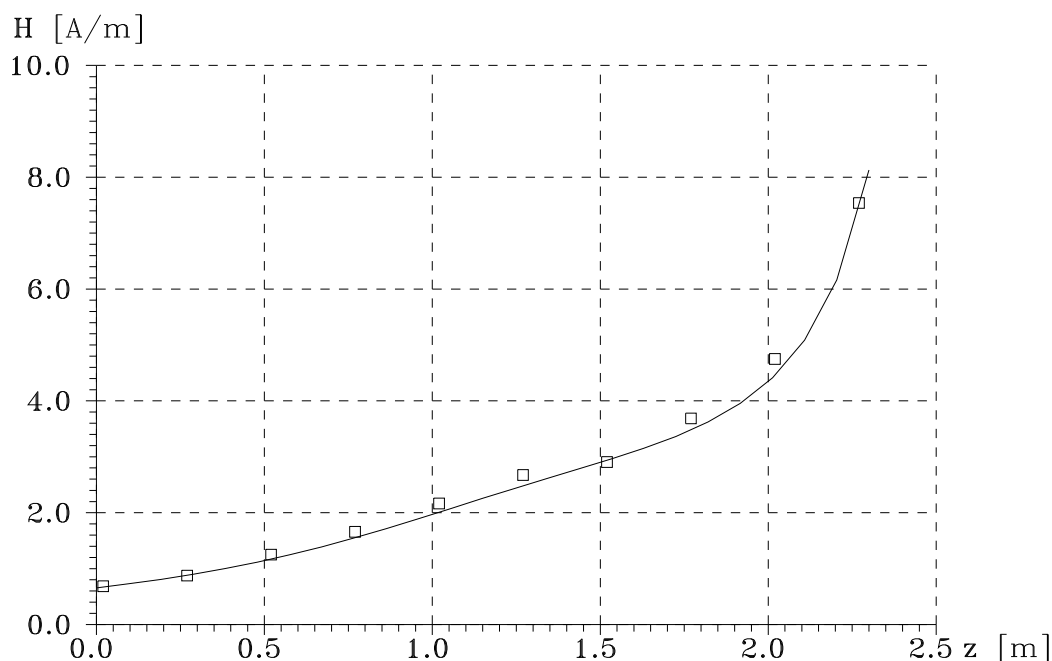
Rys. 9.10. Odcinek stalowej rury pokryty siecią elementów brzegowych

Konfiguracja 7:

W rozważanym przypadku jeden ze skrajnych przewodów oraz przewód środkowy z jednego końca podłączono do źródła napięcia, a z drugiego końca zwarto drutem oporowym. Prąd w obwodzie wynosił 10,6 A. Pomiary wykonano pod skrajnym zasilanym przewodem na linii pionowej  $x=0$ ,  $y=0,9$ , pod nieobecność obiektu rurowego. Wyniki pomiarów zestawiono w tabeli 9.7. Wyniki obliczeń i pomiarów pokazano na rysunku 9.11.

Tabela 9.7. Wyniki pomiarów pola magnetycznego w konfiguracji 7

$z$ [m]	0,05	0,30	0,50	0,80	1,05	1,30	1,55	1,80	2,05	2,30
$H$ [A/m]	0,68	0,88	1,25	1,66	2,17	2,68	2,91	3,69	4,75	7,54



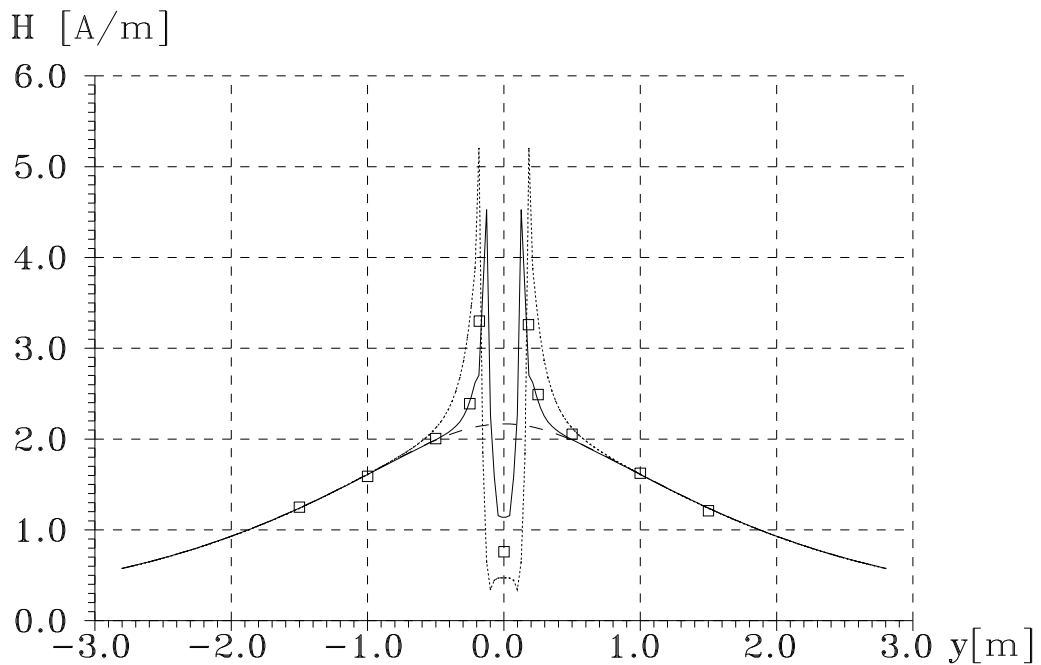
Rys. 9.11. Rozkład pola magnetycznego pod zasilanym skrajnym przewodem na linii pionowej  $x=0$ ,  $y=0,9$  m (konfiguracja 7)  
 linia ciągła – wyniki obliczeń  
 kwadraciki – wyniki pomiarów

**Konfiguracja 8:**

W tym przypadku wszystkie trzy przewody z jednego końca podłączono do trójfazowego symetrycznego źródła napięcia, a z drugiego końca zwarto drutem oporowym. Prąd w każdej z faz wynosił 23 A. Pomiary wykonano na linii poziomej  $x = 0$ ,  $z = 0,3$  m. Obiekt rurowy ustawiono jak na rysunku 9.9. Wyniki pomiarów zestawiono w tabeli 9.8. Wyniki obliczeń i pomiarów pokazano na rysunku 9.12.

Tabela 9.8. Wyniki pomiarów pola magnetycznego w konfiguracji 8

$y$ [m]	-1,5	-1,0	-0,5	-0,25	-0,18	0	0,18	0,25	0,50	1,0	1,50
$H$ [A/m]	1,25	1,59	2,01	2,39	3,30	0,70	3,26	2,49	2,05	1,62	1,21

Rys. 9.12. Rozkład pola magnetycznego na linii poziomej  $x = 0$ ,  $z = 0,3$  m (konfiguracja 8)

linia ciągła – wyniki obliczeń z uwzględnieniem prądów wirowych

linia punktowa – wyniki obliczeń bez uwzględnienia prądów wirowych (model uproszczony)

linia przerywana – wyniki obliczeń bez uwzględnienia wpływu obiektu

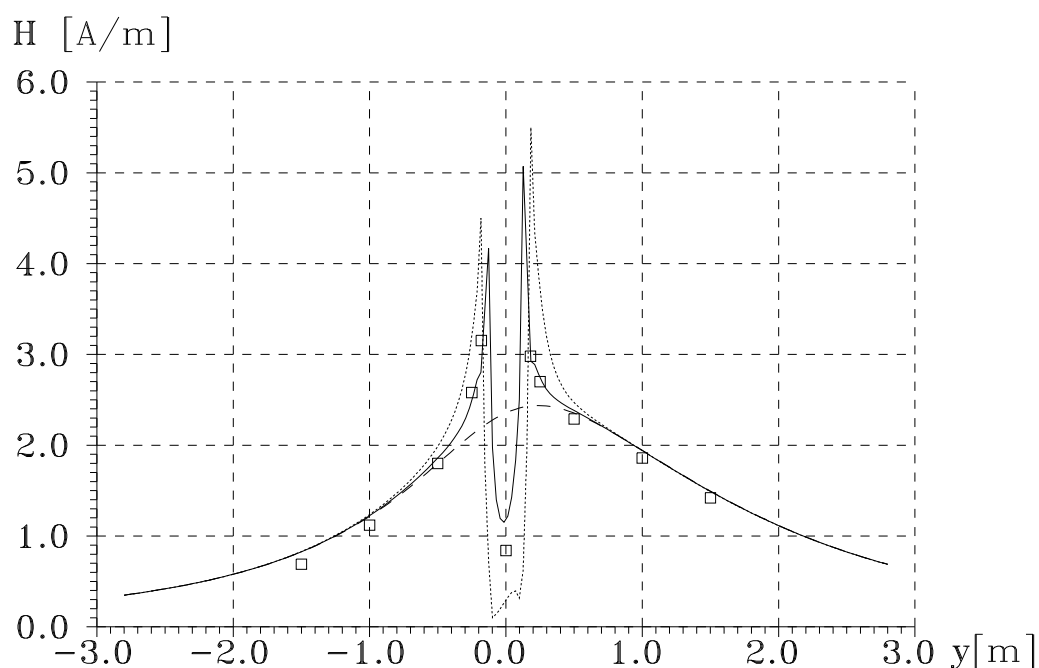
kwadraciki – wyniki pomiarów

Konfiguracja 9:

Zastosowano zasilanie jak w konfiguracji 7 z tą różnicą, że prąd w przewodach wynosił 23,75 A. Pomiary wykonano na linii poziomej  $x = 0$ ,  $z = 0,3$  m. Obiekt rurowy ustawiono jak na rysunku 9.9. Wyniki pomiarów zestawiono w tabeli 9.9. Wyniki obliczeń i pomiarów pokazano na rysunku 9.13.

Tabela 9.9. Wyniki pomiarów pola magnetycznego w konfiguracji 9

$y$ [m]	-1,5	-1,0	-0,5	-0,25	-0,18	0,0	0,18	0,25	0,50	1,0	1,50
$H$ [A/m]	1,13	1,12	1,79	2,51	3,11	0,84	2,98	2,70	2,29	1,86	1,42

Rys. 9.13. Rozkład pola magnetycznego na linii poziomej  $x = 0$ ,  $z = 0,3$  m (konfiguracja 9)

linia ciągła – wyniki obliczeń z uwzględnieniem prądów wirowych

linia punktowa – wyniki obliczeń bez uwzględnienia prądów wirowych (model uproszczony)

linia przerywana – wyniki obliczeń bez uwzględnienia wpływu obiektu

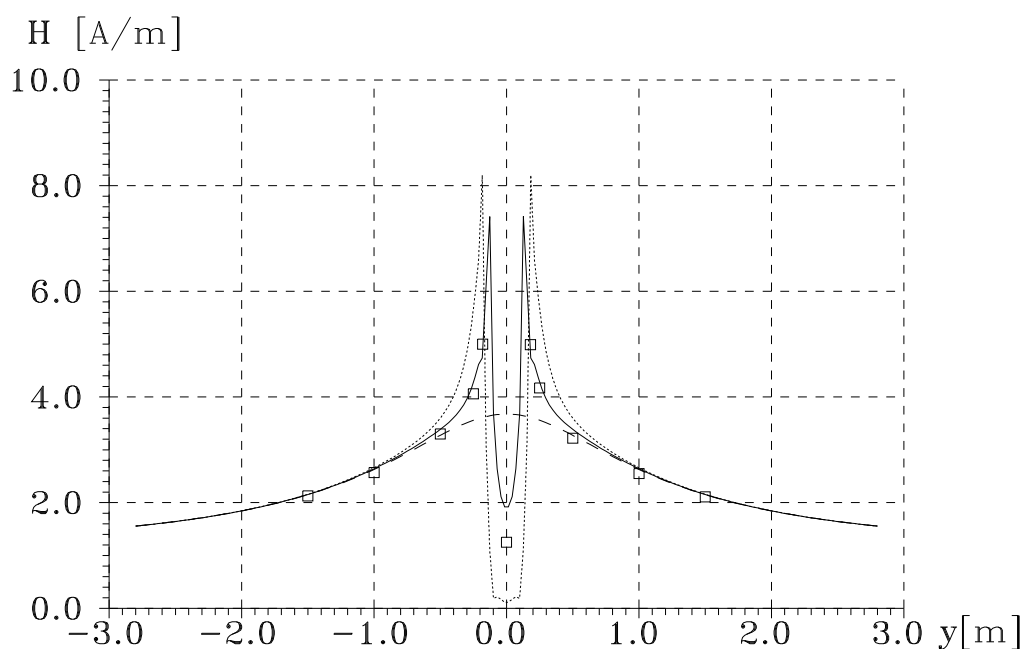
kwadraciki – wyniki pomiarów

**Konfiguracja 10:**

Jeden z końców przewodu środkowego połączono ze źródłem napięcia, drugi zaś z drutem oporowym, który z kolei połączono z zaciskiem uziemienia. Prąd w przewodzie wynosił 22,75 A. Pomiary wykonano na linii poziomej  $x = 0$ ,  $z = 0,3$  m. Obiekt rurowy ustawiono jak na rysunku 9.9. Wyniki pomiarów zestawiono w tabeli 9.11. Wyniki obliczeń i pomiarów pokazano na rysunku 9.14.

Tabela 9.10. Wyniki pomiarów pola magnetycznego w konfiguracji 10

$y$ [m]	-1,5	-1,0	-0,5	-0,25	-0,18	0	0,18	0,25	0,50	1,0	1,50
$H$ [A/m]	2,13	2,57	3,3	4,06	5,0	1,25	4,99	4,17	3,22	2,55	2,11



Rys. 9.14. Rozkład pola magnetycznego na linii poziomej  $x = 0$ ,  $z = 0,3$  m (konfiguracja 10)  
 linia ciągła – wyniki obliczeń z uwzględnieniem prądów wirowych  
 linia kropkowa – wyniki obliczeń bez uwzględnienia prądów wirowych (model uproszczony)  
 linia przerywana – wyniki obliczeń bez uwzględnienia wpływu obiektu  
 kwadraciki – wyniki pomiarów

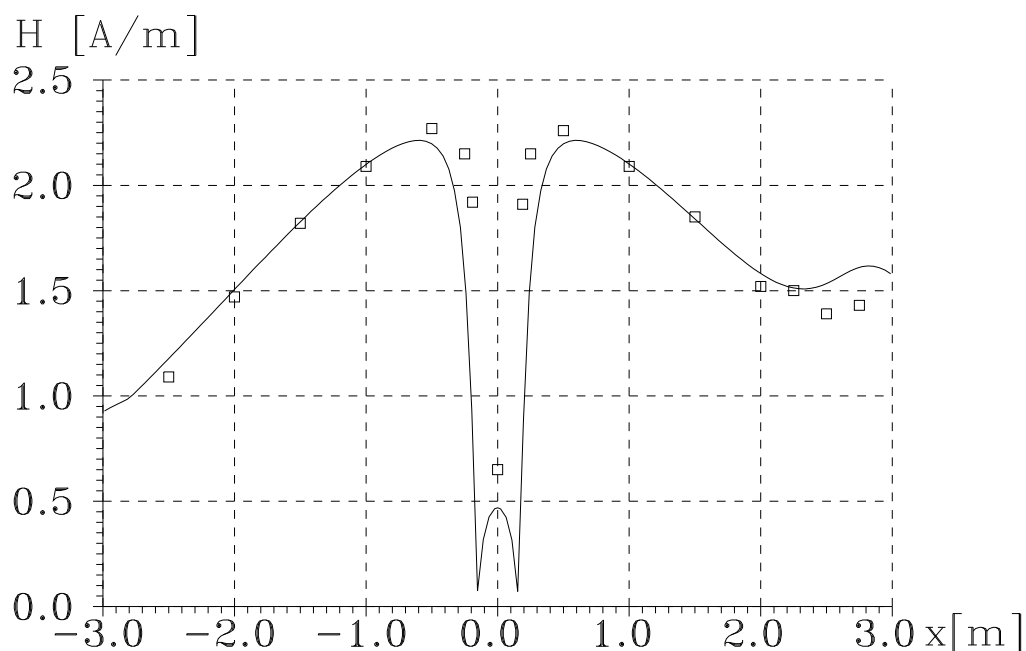
Konfiguracja 11:

Zastosowano sposób zasilania jak w konfiguracji 8 z tą różnicą, że prąd w przewodach wynosił 25 A. Pomiary wykonano na linii poziomej  $y = 0$ ,  $z = 0.3$  m. Obiekt rurowy ustawiono jak na rysunku 9.8. Wyniki pomiarów zestawiono w tabeli 9.11. Wyniki pomiarów i obliczeń bez uwzględnienia prądów wirowych pokazano na rysunku 9.15.

Tabela 9.11. Wyniki pomiarów pola magnetycznego w konfiguracji 11

$x$ [m]	-2,5	-2,0	-1,5	-1,0	-0,5	-0,25	-0,18	0	0,18
$H$ [A/m]	1,09	1,47	1,82	2,09	2,27	2,15	1,92	0,65	1,91

$x$ [m]	0,25	0,5	1,00	1,50	2,00	2,25	2,50	2,75
$H$ [A/m]	2,15	2,26	2,09	1,85	1,55	1,50	1,41	1,45



Rys. 9.15. Rozkład pola magnetycznego na linii poziomej  $y = 0$ ,  $z = 0,3$  m (konfiguracja 11)  
linia ciągła – wyniki obliczeń bez uwzględnienia prądów wirowych  
kwadraciki – wyniki pomiarów



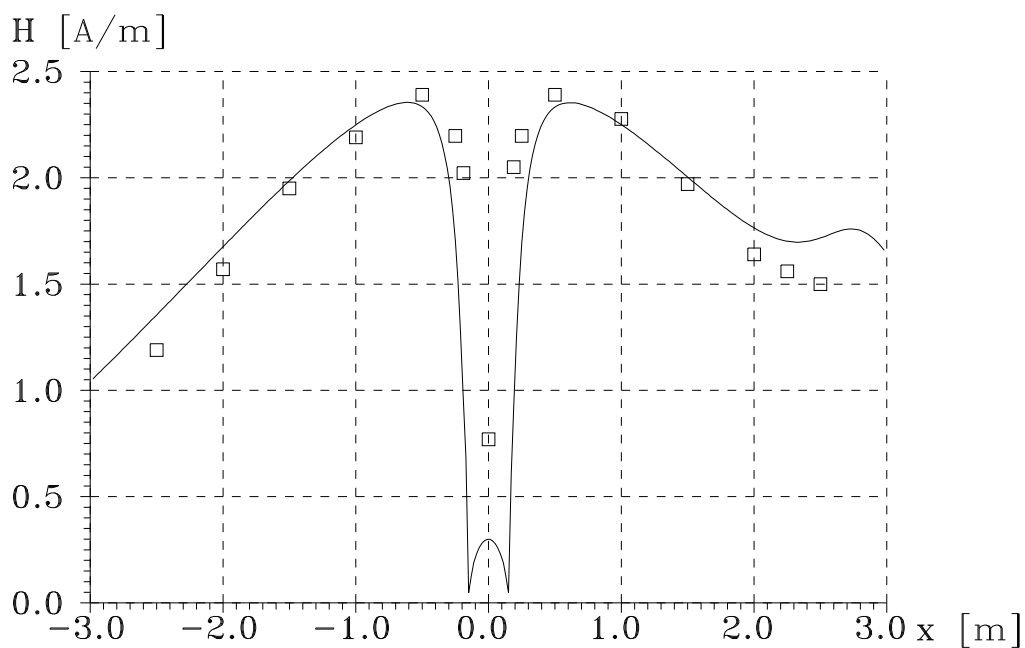
Konfiguracja 12:

Zastosowano zasilanie jak w konfiguracji 7 z tą różnicą, że prąd w przewodach wynosił 25,5 A. Pomiary wykonano na linii poziomej  $y=0$ ,  $z=0,3$  m. Wyniki pomiarów zestawiono w tabeli 9.12. Wyniki pomiarów i obliczeń bez uwzględnienia prądów wirowych pokazano na rysunku 9.16.

Tabela 9.12. Wyniki pomiarów pola magnetycznego w konfiguracji 12

$x$ [m]	-2,5	-2,0	-1,5	-1,0	-0,5	-0,25	-0,18	0
$H$ [A/m]	1,19	1,57	1,95	2,19	2,39	2,50	2,02	0,77

$x$ [m]	0,18	0,25	0,50	1,00	1,50	2,00	2,25	2,50
$H$ [A/m]	2,05	2,20	2,39	2,28	1,97	1,64	1,50	1,45



Rys. 9.16. Rozkład pola magnetycznego na linii poziomej  $y=0$ ,  $z=0,3$  m (konfiguracja 12)  
linia ciągła – wyniki obliczeń bez uwzględnienia prądów wirowych  
kwadraciki – wyniki pomiarów

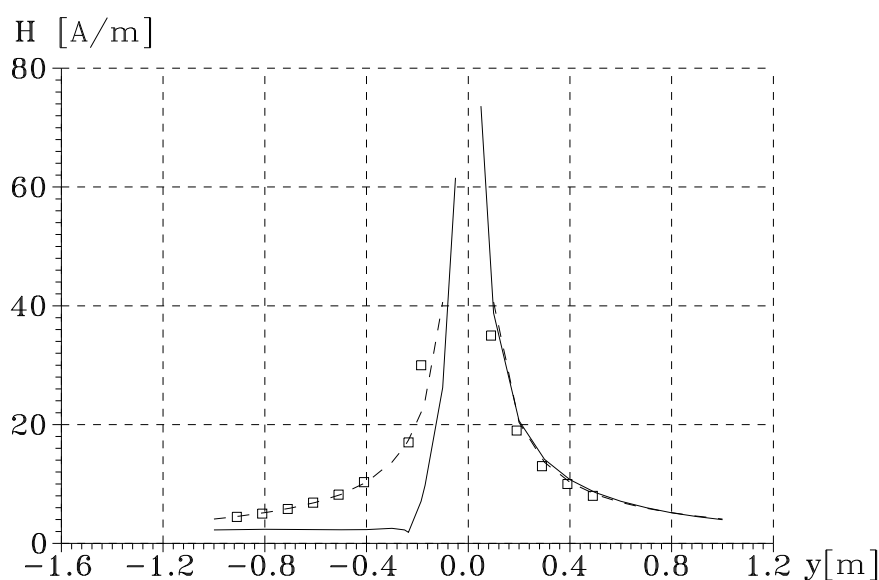
Konfiguracja 13:

Ostatni przykład dotyczy pomiarów i obliczeń pola magnetycznego w sąsiedztwie ekranu wykonanego ze stalowych prętów, którego wymiary podano w punkcie 9.2. Zastosowano sposób zasilania jak w konfiguracji 7 z tą różnicą, że prąd w przewodach wynosił 21,5 A. Ekran ustawiono pionowo wzdłuż pomieszczenia w odległości 0,21 m od środkowego przewodu, tak jak to pokazano na rysunku 9.6. Odległość środkowego przewodu od podłogi wynosiła 0,95 m. Pomiary wykonano na linii poziomej  $x = 0$ ,  $z = 0,95$  m. Wyniki pomiarów zestawiono w tabeli 9.13. Wyniki obliczeń i pomiarów pokazano na rysunku 9.17.

Tabela 9.13. Wyniki pomiarów pola magnetycznego w konfiguracji 13

$y$ [m]	-0,91	-0,81	-0,71	-0,61	-0,51	-0,41	-0,235
$H$ [A/m]	4,45	5,0	5,8	6,85	8,2	10,3	17,0

$y$ [m]	-0,185	0,09	0,19	0,29	0,39	0,49
$H$ [A/m]	30,0	35,0	19,0	13,0	10,0	8,0

Rys. 9.17. Rozkład pola magnetycznego na linii poziomej  $x = 0$ ,  $z = 0,95$  m (konfiguracja 13)

linia ciągła – wyniki obliczeń z uwzględnieniem wpływu ekranu

linia przerywana – wyniki obliczeń bez uwzględnienia wpływu ekranu

kwadraciki – wyniki pomiarów

## 10. ANALIZA WYBRANYCH ZAGADNIENÍ EMC NISKIEJ CZĘSTOTLIWOŚCI

### 10.1. Uwagi wstępne

Dla zilustrowania możliwości zaproponowanych modeli matematycznych, metod numerycznych oraz opracowanych programów komputerowych zaprezentowano wyniki obliczeń pól elektrycznych i magnetycznych w sąsiedztwie i na terenie wybranych rzeczywistych obiektów elektroenergetycznych.

Przedstawiono wyniki obliczeń pola elektrycznego w sąsiedztwie napowietrznych linii WN zlokalizowanych na obszarach zurbanizowanych, w sąsiedztwie i na terenie wewnętrznej stacji 110/15 kV, a także na terenie napowietrznej rozdzielni wielkiej mocy. Pokazano również wyniki obliczeń pola elektrycznego na przedpolu dużej elektrowni. W zaprezentowanych przykładach obliczeniowych konieczne było zastosowanie trójwymiarowych modeli matematycznych uwzględniających wpływ różnego rodzaju obiektów zniekształcających rozkłady pól.

Obliczenia pola magnetycznego dotyczą wybranych linii WN oraz wewnętrznej stacji elektroenergetycznej 110/15 kV.

Ze względu na niedawną zmianę przepisów w sprawie dopuszczalnych poziomów pól elektromagnetycznych w środowisku [94], gdzie między innymi zmieniono wysokość, na której dokonuje się kontroli natężeń pól z uprzednio obowiązującej 1,8 m npt na 2 m npt, część przedstawionych dalej wyników obliczeń, wykonanych przed zmianą powołanych przepisów, dotyczy wysokości 1,8 m npt. Skrót npt oznacza tutaj: „nad poziomem terenu”.

Ze względu na trójfazowy charakter wymuszeń, miejscem geometrycznym końców wektorów natężeń analizowanych pól w dowolnym punkcie przestrzeni są elipsy (pola eliptyczne). W przedstawionych dalej przykładach przez natężenie pola elektrycznego bądź magnetycznego rozumiana jest długość długiej półosi elipsy podzielona przez  $\sqrt{2}$ . Innymi słowy jest to moduł wartości skutecznej wektora natężenia pola w kierunku, w którym przyjmuje on największą wartość.

### 10.2. Analiza pól elektrycznych

W niniejszym podrozdziale zaprezentowano obliczone rozkłady pola elektrycznego w sąsiedztwie i na terenie wspomnianych wcześniej obiektów. Wybrane obliczenia porównano z wynikami pomiarów.

#### 10.2.1. Pole elektryczne pod liniami WN przebiegającymi przez teren zabudowany

Dopuszczalne poziomy natężenia pola elektrycznego o częstotliwości 50 Hz w środowisku określono w Rozporządzeniu Ministra Środowiska [94]. Dopuszczalne poziomy tych pól zróżnicowano dla:

- a) terenów przeznaczonych pod zabudowę mieszkaniową, gdzie natężenie pola elektrycznego nie może przekraczać 1 kV/m,
- b) miejsc dostępnych dla ludności, gdzie natężenie pola elektrycznego nie może przekraczać 10 kV/m.

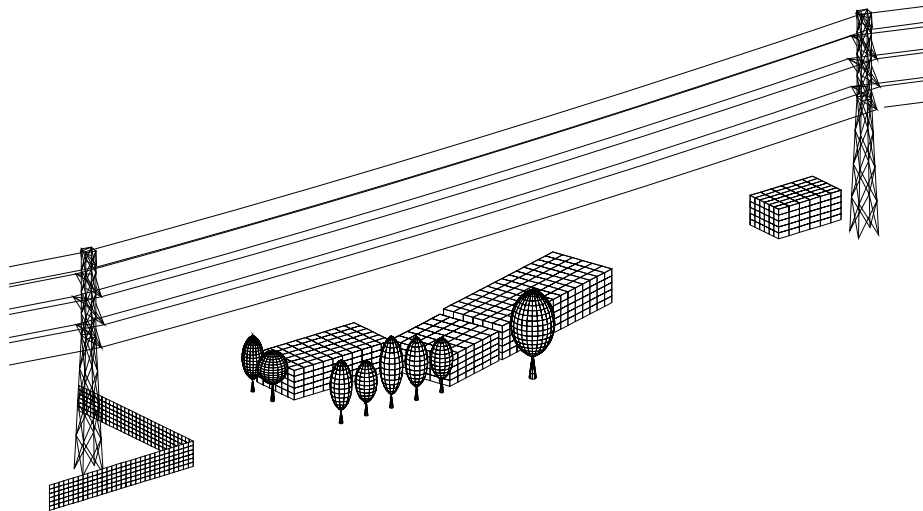
Sprawdzenia poziomów natężeń pól dokonuje się:

- a) na wysokości 2 m nad powierzchnią ziemi lub nad innymi powierzchniami, na których mogą przebywać ludzie, w szczególności nad dachami spełniającymi rolę tarasów, tarasami, balkonami, podestami itp.
- b) w pobliżu obiektów budowlanych, w odległości nie mniejszej niż 1,6 m od ścian tych obiektów.

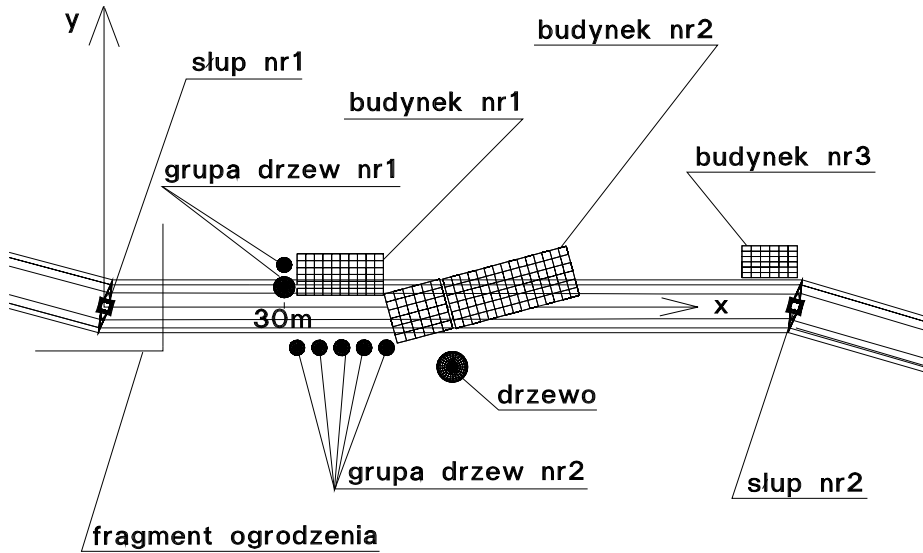
Prowadzenie napowietrznych linii WN w terenie zabudowanym wiąże się z koniecznością zachowania odpowiednich odstępów między przewodami roboczymi linii a sąsiadującymi z nią budynkami tak, aby nie były przekroczone dopuszczalne poziomy natężenia pola elektrycznego. Obowiązujące przepisy [84] zabraniają prowadzenie linii 220 kV i 400 kV nad budynkami mieszkalnymi oraz użyteczności publicznej, w których stale przebywają ludzie, chociaż dopuszczają krzyżowanie ich liniami 110 kV i modernizowanymi liniami 220 kV. W przypadku, gdy linia WN ma być prowadzona w sąsiedztwie takiego budynku lub gdy nowy budynek ma być usytuowany w niewielkiej odległości od linii WN, projektanci często posługują się wytycznymi zawartymi w nieobowiązującym już zarządzeniu Ministra Górnictwa i Energetyki z 1985 r. [126], gdzie podano minimalne odległości przewodów linii od budynku (jego ścian, tarasów, balkonów, lub innych miejsc budynku, w których możliwy jest stały pobyt ludzi) gwarantujące, że przy ich zachowaniu natężenie pola elektrycznego w rozważanych miejscach nie przekroczy określonej w przepisach wartości 1 kV/m. Nie oznacza to jednak, że jeżeli odległość ta będzie mniejsza, to w interesującym miejscu dopuszczalna wartość natężenia pola elektrycznego zostanie przekroczona. Często na terenie silnie zurbanizowanym zachodzi konieczność przyjęcia mniejszych odległości od tych, które podano w powołanym zarządzeniu. Zachodzi wtedy potrzeba obliczeniowego wyznaczenia rozkładów pola, z możliwie najprecyzyjniejszym uwzględnieniem obiektów wpływających na jego rozkłady.

Pierwszy zaprezentowany przykład dotyczy przęsła linii 110 kV, położonego przy ulicy Fieldorfa u zbiegu z ulicą Ostrobramską w Warszawie. Jest to przęsło linii dwutorowej, zbudowane na słupach serii OS24 typu ON150. W sąsiedztwie rozważanego przęsła usytuowane są budynki i drzewa (rys. 10.1). Słup nr 1 znajduje się za ogrodzeniem o wysokości 3 m, wykonanym z metalowej siatki. Rozpiętość przęsła wynosi 108 m, wysokość zawieszenia dolnych przewodów jest 16 m, a ich najmniejsza odległość od ziemi wynosiła 15,2 m. Wysokość drzewa nr 1 wynosi 5 m, natomiast gabaryty budynku nr 1 są: 13,5 m × 6,5 m × 3,5 m. Obliczono i pomierzono rozkłady natężenia pola elektrycznego na wysokości 2 m npt, wzdłuż osi linii, na odcinku między pierwszym słupem a budynkiem nr 1 oraz wzdłuż lewego skrajnego przewodu, na odcinku między pierwszym słupem i drzewem nr 1. W obliczeniach uwzględniono:

- kratownicę słupa nr 1, którą podzielono na 400 elementów liniowych,
- fragment metalowego ogrodzenia, które podzielono na 360 elementów brzegowych,
- drzewo nr 1, które podzielono na 360 elementów brzegowych,
- budynek nr 1, który podzielono na 220 elementów brzegowych.



a.



b.

Rys. 10.1. Przęsło linii 110 kV położone przy ulicy Fieldorfa w Warszawie  
a. – widok ogólny, b. – rzut poziomy

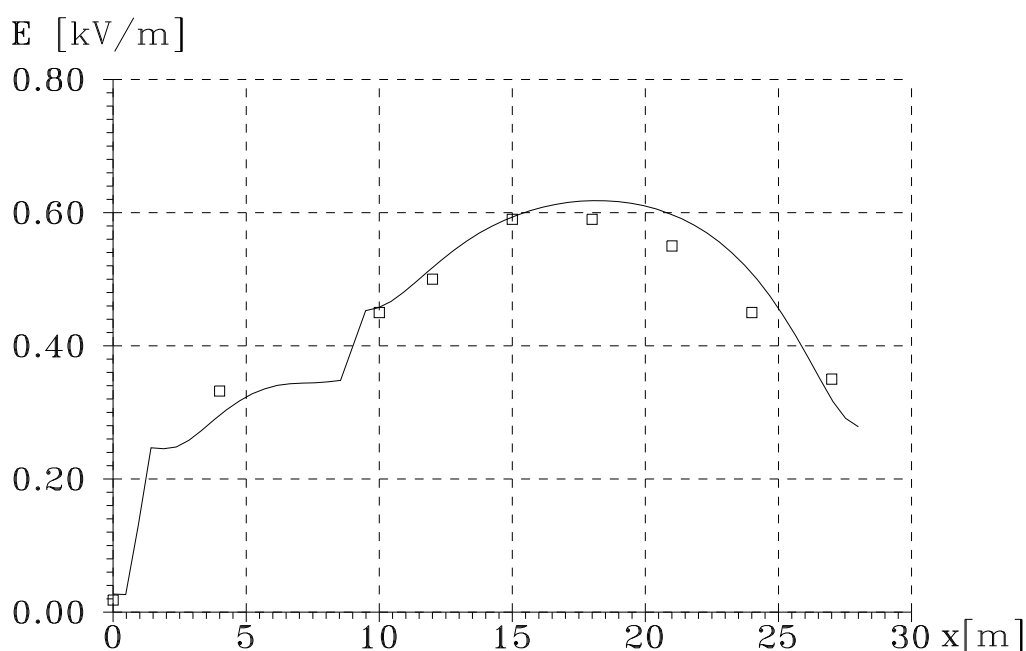
Na rysunku pominięto obiekty znajdujące się w dalszej odległości od linii WN. Przewody rozważanego przęsła linii WN oraz przęsła przylegającego od strony słupa nr 1 zastąpiono łączną liczbą 320 elementów liniowych.

Pomiary pola wykonano miernikiem Maschek ESM-100. Wyniki obliczeń i pomiarów przedstawiono na rysunkach 10.2 i 10.3.

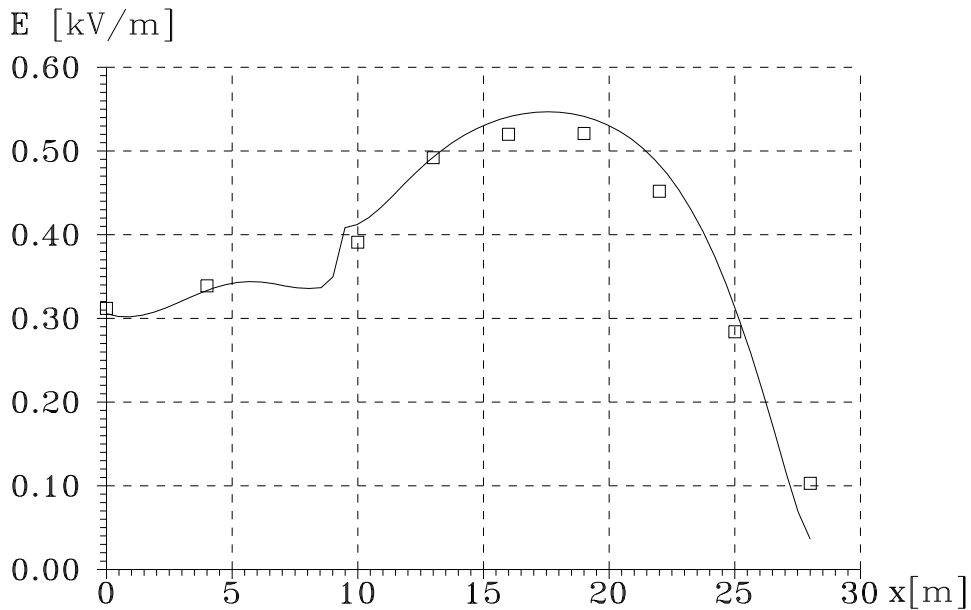
Należy stwierdzić, że mimo stosunkowo skomplikowanej konfiguracji zagadnienia uzyskano zadawalającą zgodność wyników obliczeń z pomiarami. Na wykresach można wyraźnie zaobserwować ekranujące oddziaływanie kratownicy słupa, metalowego ogrodzenia oraz drzew i budynków.

W tym miejscu warto wspomnieć, że obliczenia sprawdzające poziom emitowanego przez linie WN pola elektrycznego wykonuje się dla warunków pracy linii, przy których natężenie pola w interesujących miejscach osiąga najwyższe wartości tzn. przy najwyższym dopuszczalnym napięciu roboczym linii i największym dopuszczalnym zwisie przewodów roboczych, a wyniki pomiarów przelicza się na takie warunki.

Celem przedstawionego przykładu była eksperymentalna weryfikacja obliczeń i dlatego uwzględniono w nich warunki pracy linii, takie jakie występowały podczas wykonywania pomiarów.

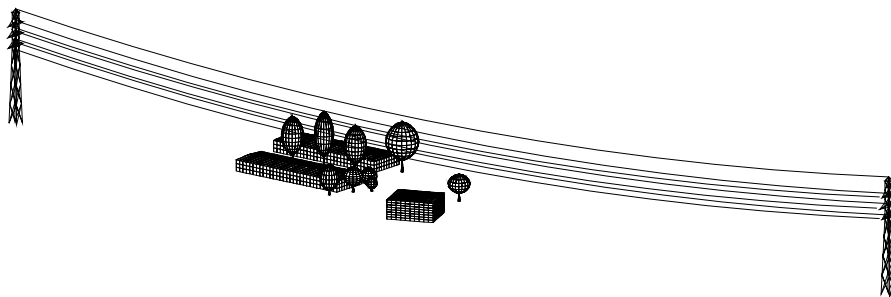


Rys. 10.2. Rozkład pola elektrycznego pod linią 110 kV wzdłuż osi linii, na odcinku między pierwszym słupem a budynkiem nr 1, kwadracikami oznaczono wyniki pomiarów

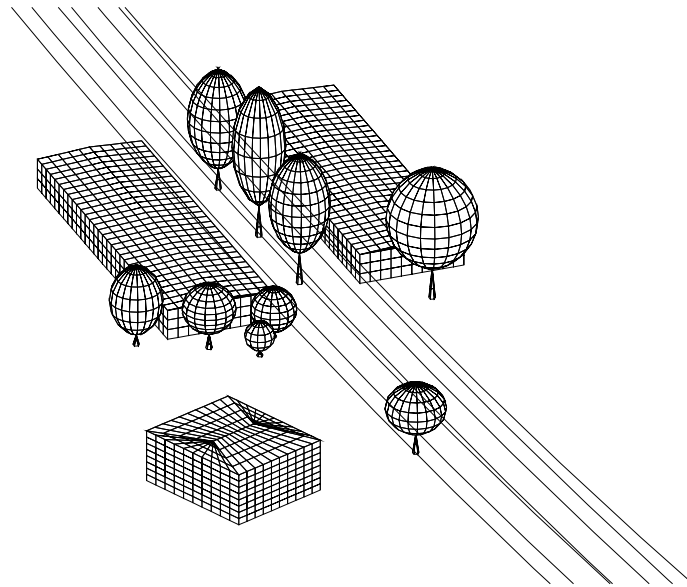


Rys. 10.3. Rozkład pola elektrycznego pod linią 110 kV wzdłuż lewego skrajnego przewodu linii, na odcinku między pierwszym słupem a drzewem nr 1, kwadracikami oznaczono wyniki pomiarów

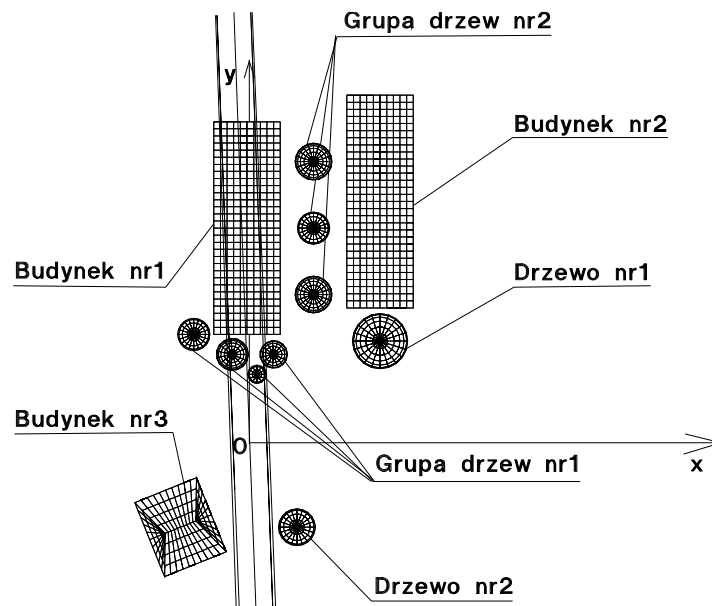
Kolejny przykład dotyczy działki zlokalizowanej w Warszawie, przy ul. Kaczeńca, nad którą przebiega przęsło dwutorowej linii 110 kV (rys. 10.4 i 10.5). Na rozważanym fragmencie działki znajdują się trzy budynki oraz liczne drzewa, w większości liściaste. Budynki oznaczone na rysunku 10.5. b. numerami 1 i 2 zbudowano z płyt betonowych w latach 70 ubiegłego wieku z przeznaczeniem na hotele robotnicze. Numerem 3 oznaczono murowany budynek gospodarczy.



Rys. 10.4. Przęsło dwutorowej linii 110 kV przebiegające nad fragmentem działki położonej przy ul. Kaczeńca w Warszawie



a.



b.

Rys. 10.5. Rozważany fragment działki przy ul. Kaczeńca, nad którą przebiega dwutorowa linia 110 kV  
 a. – widok ogólny, b. – rzut poziomy

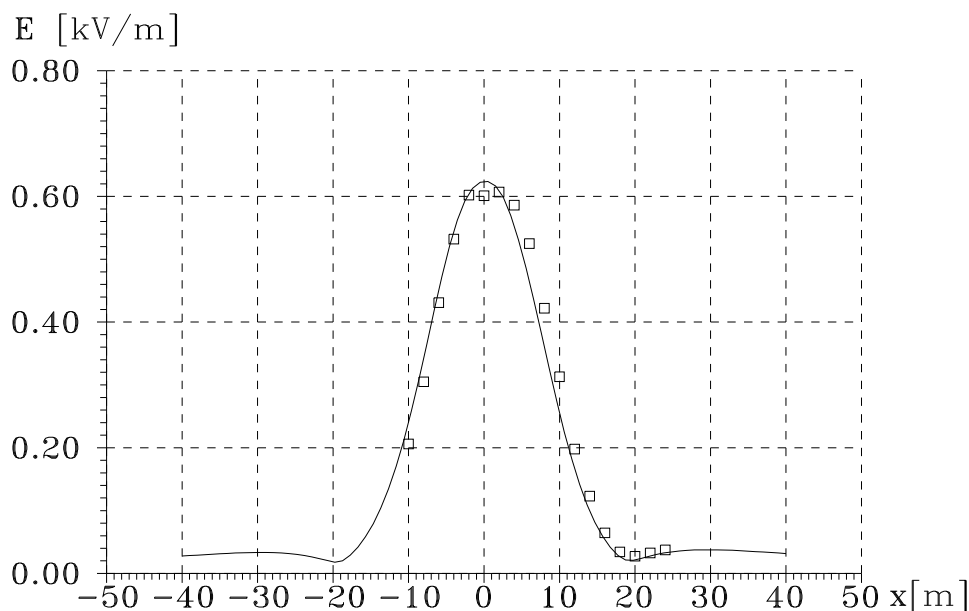


Budynki nr 1 i nr 2 mają wymiary:  $10\text{ m} \times 32\text{ m} \times 3,3\text{ m}$ , a budynek nr 3 ma wymiary:  $12\text{ m} \times 12\text{ m} \times 5,3\text{ m}$ .

Rozważane prześło linii WN jest zbudowane na słupach serii OY typu ONI+6 i ONII+6; przewody fazowe AFL-6  $180\text{ mm}^2$ , przewód odgromowy AFL  $1,770\text{ mm}^2$ . Rozpiętość prześła jest  $270\text{ m}$ , minimalna odległość najniższego przewodu fazowego od ziemi w temperaturze  $40^\circ\text{C}$  jest  $9,42\text{ m}$ , wysokość zawieszenia najniższych przewodów fazowych na obu słupach wynosi  $20\text{ m}$ .

Wykonano obliczenia i pomiary natężenia pola elektrycznego w środku prześła, tj. między budynkami nr 1 i nr 3, na odcinku równoległym do krótszej ściany budynku nr 1 (w odległości  $13\text{ m}$  od tej ściany, na wysokości  $2\text{ m}$  npt). W czasie wykonywania pomiarów odległość najniższego przewodu roboczego od ziemi wynosiła  $11,5\text{ m}$ . Pomiary wykonano miernikiem Maschek ESM-100. Obliczenia wykonano przy dyskretyzacji poszczególnych obiektów jak na rysunku 10.5. Wyniki obliczeń i pomiarów natężenia pola elektrycznego przedstawiono na rysunku 10.6. Uzyskano ich zadowalającą zgodność.

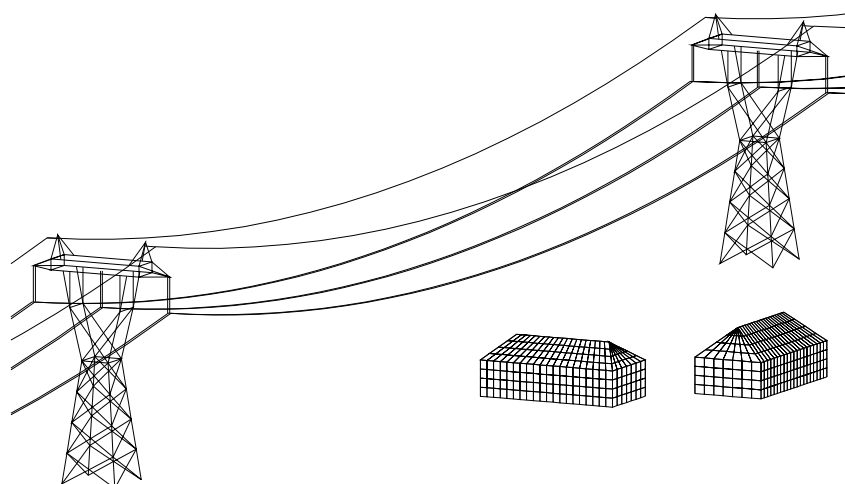
Warto tutaj wspomnieć, że w przypadku nieuwzględnienia drzew oraz przy przyjęciu najbardziej niekorzystnych (ze względu na poziom natężenia pola elektrycznego) warunków pracy linii, w bezpośrednim sąsiedztwie budynku nr 1, jak wykazano w [64], natężenie pola elektrycznego przekroczy wartość  $1\text{ kV/m}$ . A zatem w przypadku wycięcia drzew budynek nr 1 nie powinien być eksploatowany jako budynek mieszkalny.



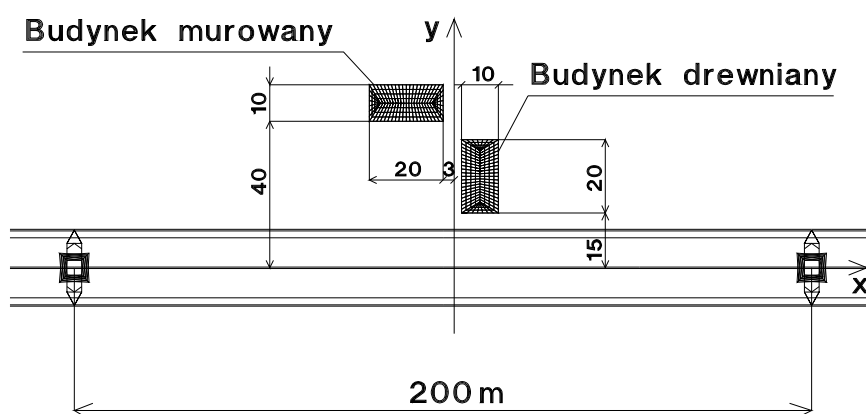
Rys. 10.6. Natężenie pola elektrycznego pod prześłem linii  $110\text{ kV}$  na terenie działki położonej przy ul. Kaczeńca w Warszawie, kwadracikami oznaczono wyniki pomiarów

Ostatni z tej grupy przykładów dotyczy prześła linii  $400\text{ kV}$ , zbudowanego na słupach Y52, usytuowanego w pobliżu dwóch budynków: murowanego (mieszkalnego)

i drewnianego (gospodarczego). Widok ogólny przęsła oraz zasadnicze wymiary obiektów pokazano na rysunku 10.4. Minimalna odległość przewodów roboczych od ziemi wynosi 15 m, a przewodów odgromowych 24 m. Wysokość zawieszenia przewodów roboczych wynosi 24 m, a przewodów odgromowych 33 m. Każdy z budynków ma wysokość 7 m, przy czym wysokość ich dachów wynosi 3 m. Grubość ścian budynku drewnianego jest 0,35 m. Przenikalność elektryczną drewna przyjęto  $7,5\epsilon_0$ .



a.

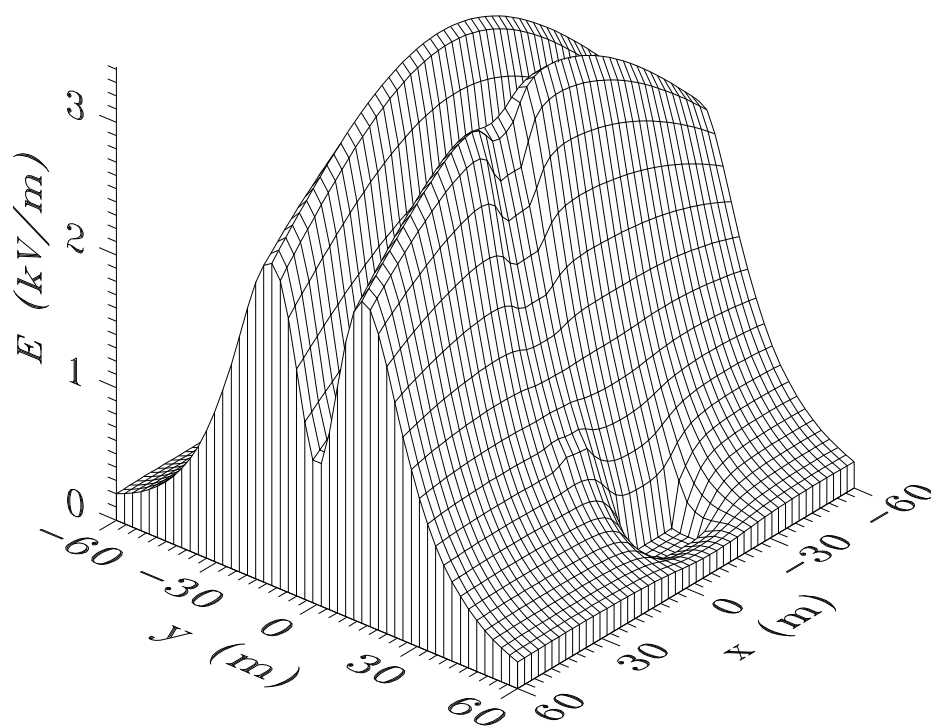


b.

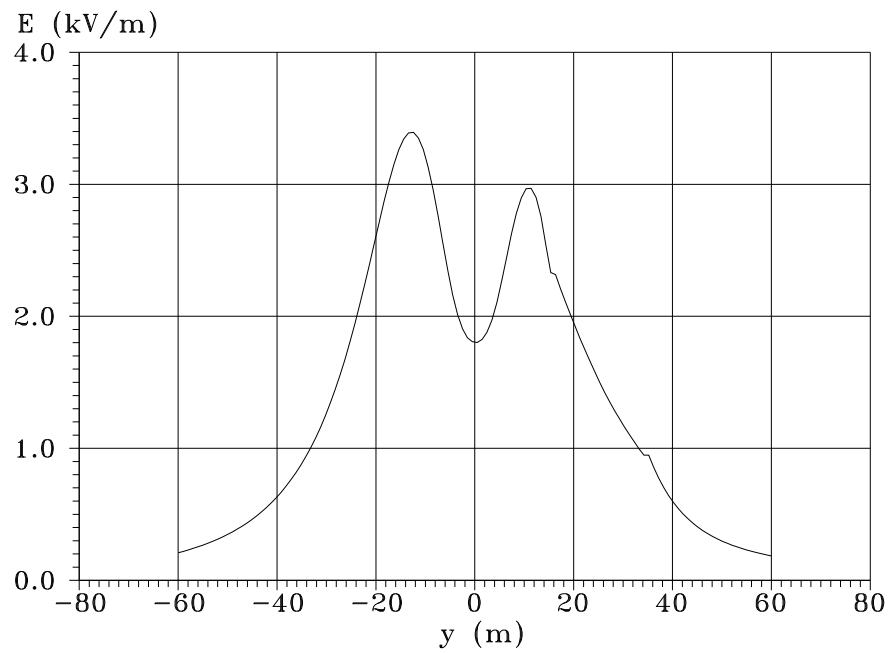
Rys. 10.7. Przęsło linii 400 kV zlokalizowane w sąsiedztwie budynków, a. – widok ogólny, b. – rzut poziomy

Każdy przewód roboczy rozważanego przęsła podzielono na 30 elementów liniowych, a przewód odgromowy na 20 elementów. W obliczeniach uwzględniono także połowę długości dwóch przęseł przylegających. Sposób dyskretyzacji budynków pokazano na rysunku 10.4. Pokryte one zostały łączną liczbą 1350 elementów brzegowych. Każdy ze słupów zastąpiono 180 elementami liniowymi. Całkowita liczba elementów liniowych i brzegowych zadania wynosiła 2050.

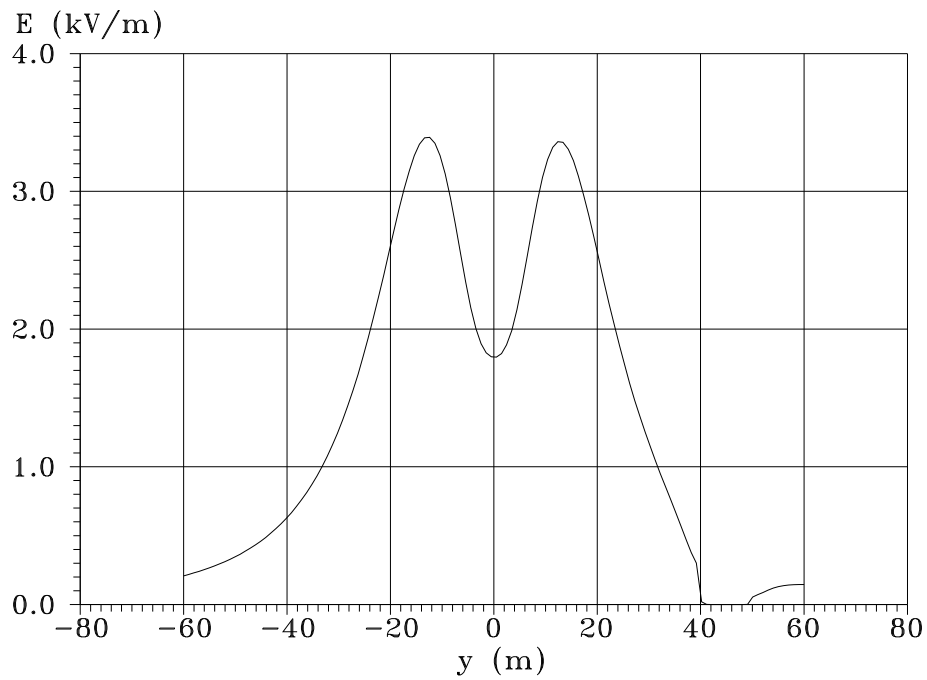
Na rysunku 10.5 pokazano rozkład pola elektrycznego pod rozważanym przęsłem na wysokości 1,8 m nad poziomem terenu. Wyraźnie uwidocznione zostało tutaj ekranujące oddziaływanie budynków, które oczywiście jest znacznie silniejsze w przypadku budynku murowanego. Na rysunkach 10.6 i 10.7 przedstawiono rozkłady pola na odcinkach prostopadłych do linii, przechodzących odpowiednio przez budynek drewniany i murowany, co jeszcze lepiej zobrazowało oddziaływanie budynków na jego rozkłady. Należy stwierdzić, że w sąsiedztwie rozważanego przęsła występuje strefa ograniczonego użytkowania [122], ale murowany budynek mieszkalny zlokalizowany jest poza jej zasięgiem.



Rys. 10.8. Natężenie pola elektrycznego pod przęsłem linii 400 kV położonym w sąsiedztwie dwóch budynków – murowanego i drewnianego



Rys. 10.9. Wyniki obliczeń natężenia pola elektrycznego pod przęsłem linii 400 kV, na odcinku prostopadłym do osi linii, przechodzącym przez budynek drewniany



Rys. 10.10. Wyniki obliczeń natężenia pola elektrycznego pod przęsłem linii 400 kV, na odcinku prostopadłym do osi linii, przechodzącym przez budynek murowany

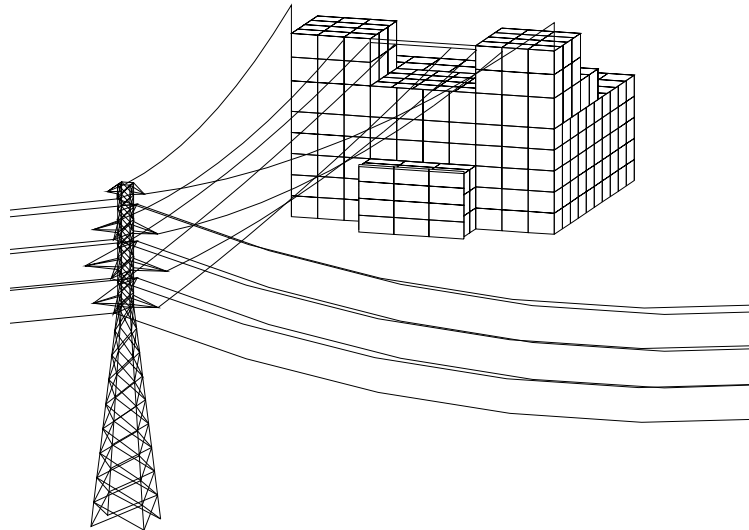
### 10.2.2. Pole elektryczne w sąsiedztwie i na terenie wewnętrznej stacji 110/15 kV

W niniejszym punkcie w pierwszej kolejności wyznaczono rozkłady natężenia pola elektrycznego w sąsiedztwie wewnętrznej stacji 110/15 kV zlokalizowanej w jednej z dzielnic Warszawy. Rozdzielnia 110 kV omawianej stacji jest rozdzielnią gazową produkcji firmy ABB, natomiast rozdzielnia 15 kV wykonana została z zastosowaniem celek produkcji firmy Siemens. W stacji zainstalowano dwa transformatory o mocy 25 MVA każdy, które docelowo będą zastąpione transformatorami o mocy 63 MVA. Widok ogólny budynku stacji wraz z wyprowadzeniem napowietrznej linii 110 kV pokazano na rys. 10.11.

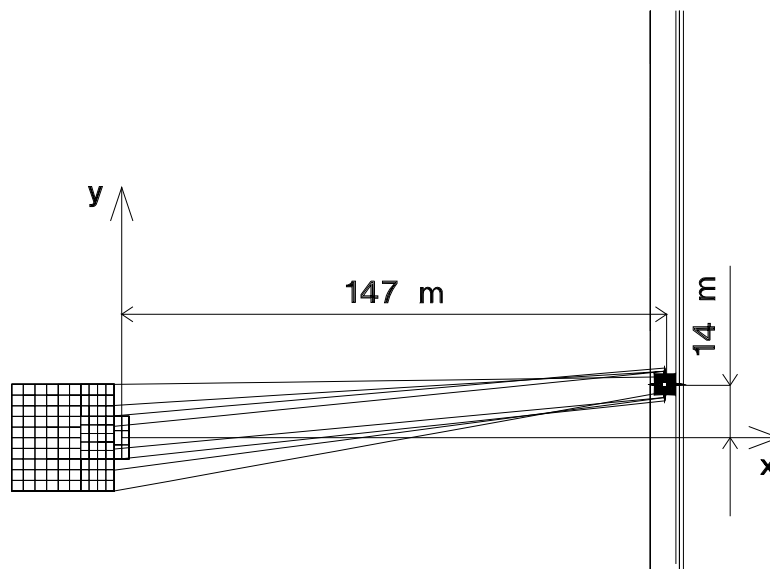
Przewody wyprowadzenia dwutorowej linii 110 kV z budynku stacji z jednej strony zawieszono na słupie rozgałęźnym serii SC3R, zaś z drugiej strony przytwierdzone są do bramki umieszczonej na dachu budynku stacji, między komorami transformatorów (rys. 10.7). Na słupie przewody fazowe zawieszono w układzie pionowym, natomiast na ścianie rozdzielni tworzą układ poziomy, tak jak to pokazano na rys. 10.11. Wysokość zawieszenia przewodów fazowych na ścianie frontowej podstacji wynosi 19 m. Odległość między sąsiednimi przewodami fazowymi na ścianie frontowej budynku stacji jest 2,8 m. Wysokość zawieszenia na słupie najniższego przewodu fazowego jest 22,7 m, środkowego przewodu fazowego wynosi 26,6 m, a najwyższego przewodu fazowego jest 30,5 m. Odległość najniższego przewodu fazowego od osi symetrii słupa jest 3,5 m, środkowego 4,4 m, a najwyższego jest 3,5 m. Minimalna odległość dolnego przewodu fazowego od ziemi wynosi 15 m. Wysokość zawieszenia przewodów odgromowych na dachu budynku podstacji jest 34,9 m, a odległość między nimi wynosi 29 m. Wysokość zawieszenia przewodów odgromowych na słupie jest 33,1 m, a odległość między nimi wynosi 4 m. Słup odległy jest o 147 m od ściany frontowej budynku stacji. Przewody robocze wykonane są z linki AFL-6 o przekroju 240 mm<sup>2</sup>, a przewody odgromowe z linki AFL-1,7 o przekroju 70 mm<sup>2</sup>.

Obliczono rozkłady natężenia pola elektrycznego na obszarze między ścianą frontową budynku stacji a słupem rozgałęźnym, na wysokości 1,8 m npt. W obliczeniach budynek stacji podzielono na 445 elementów brzegowych, słup linii WN zamodelowano za pomocą 300 elementów liniowych, a przewody linii WN podzielono na łączną liczbę 230 elementów liniowych. Wyniki obliczeń przedstawiono na rysunkach 10.12 i 10.13, przy czym dla zobrazowania ekranującego oddziaływania słupa WN, pokazano rozkłady natężenia pola elektrycznego zarówno bez uwzględnienia, jak i z uwzględnieniem jego wpływu.

W dalszej części niniejszego punktu przedstawiono wyniki obliczeń pola elektrycznego wewnątrz budynku rozważanej stacji elektroenergetycznej. Jak wspomniano wcześniej, rozdzielnia wysokiego napięcia jest rozdzielnią gazową, w której izolację stanowi SF<sub>6</sub> pod ciśnieniem wyższym od atmosferycznego, zamknięty w obudowie, w której znajdują się przewody pod napięciem. Obudowę tę stanowią uziemione stalowe rury, skutecznie ekranujące pole elektryczne. Pole elektryczne o większej wartości może pojawić się jedynie w komorach dwóch transformatora o mocy 25 MVA, do których górne napięcie doprowadzone jest za pośrednictwem gołych przewodów. Jedna z komór graniczy z pomieszczeniem rejonowej dyspozycji ruchu (RDR), w którym to pomieszczeniu przebywa personel techniczny oraz zlokalizowane są infrastruktura elektroniczna i sprzęt komputerowy.

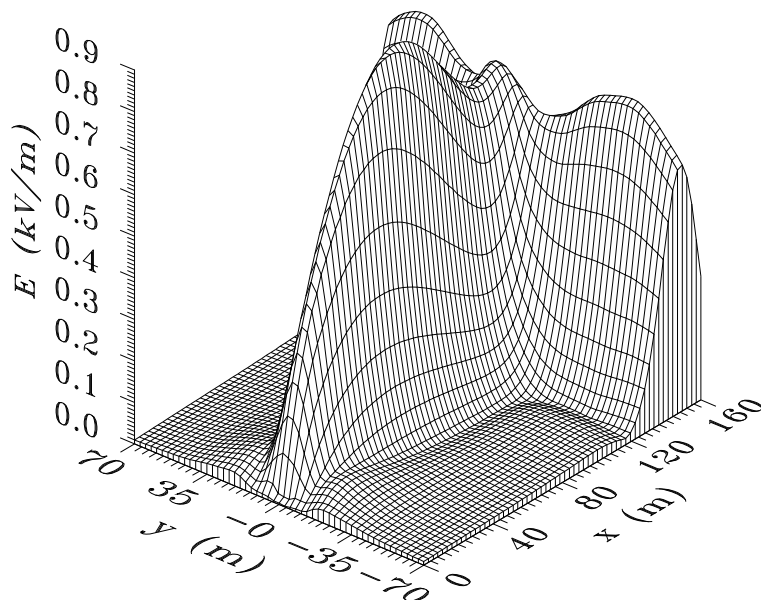


a.

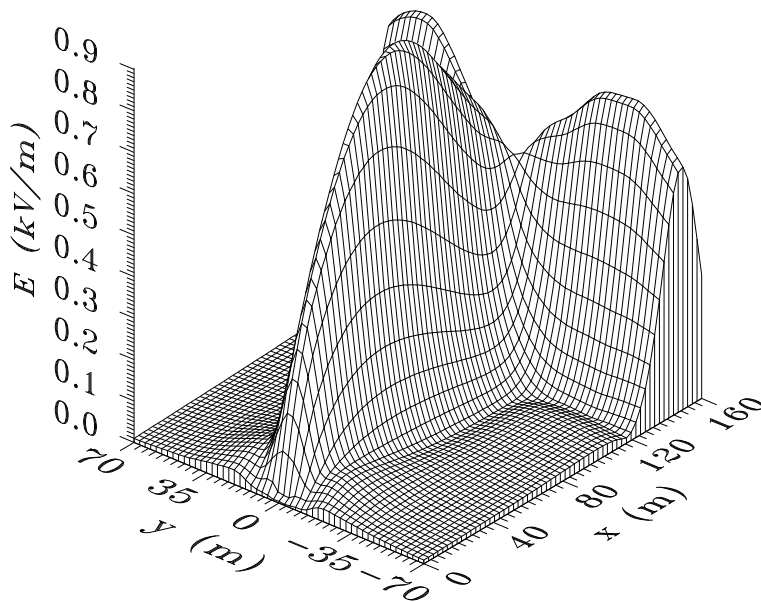


b.

Rys. 10.11. Wyprowadzenie linii 110 kV ze stacji 110/15 kV, a – widok ogólny, b – rzut poziomy  
Na rysunku pokazano sposób dyskretyzacji budynku stacji

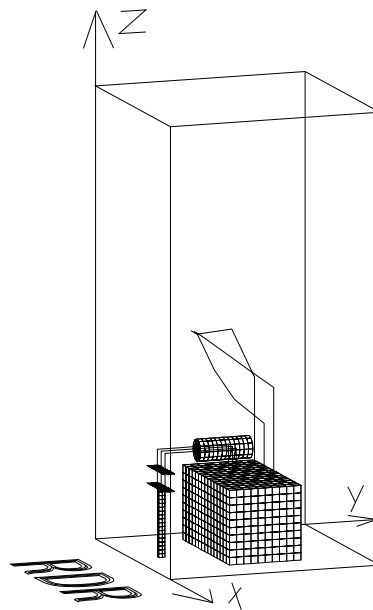


Rys. 10.12. Rozkład pola elektrycznego pod wyprowadzeniem linii 110 kV z podstacji 110/15 kV (w obliczeniach pominięto ekranujący wpływ słupa)

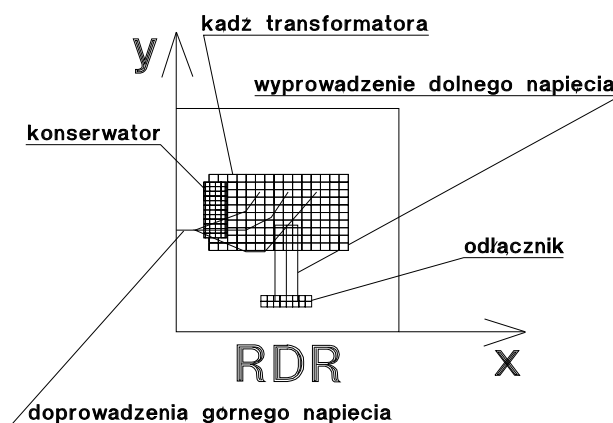


Rys. 10.13. Rozkład natężenia pola elektrycznego pod wyprowadzeniem linii 110 kV z budynku stacji 110/15 kV (w obliczeniach uwzględniono ekranujący wpływ słupa)

Widok komory transformatora pokazano na rysunku 10.14. Jej wymiary są następujące:  $8,8 \text{ m} \times 8,8 \text{ m} \times 18,2 \text{ m}$ . Gabaryty kadzi transformatora wraz z radiatorami są:  $3,17 \text{ m} \times 5,5 \text{ m} \times 2,8 \text{ m}$ . Ściany i sufit komory transformatora podzielono na łączną liczbę 900 elementów brzegowych, natomiast doprowadzenia górnego i dolnego napięcia podzielono na 55 elementów liniowych. Sposób dyskretyzacji kadzi transformatora na 900 elementów brzegowych pokazano na rysunku 10.14.



a.

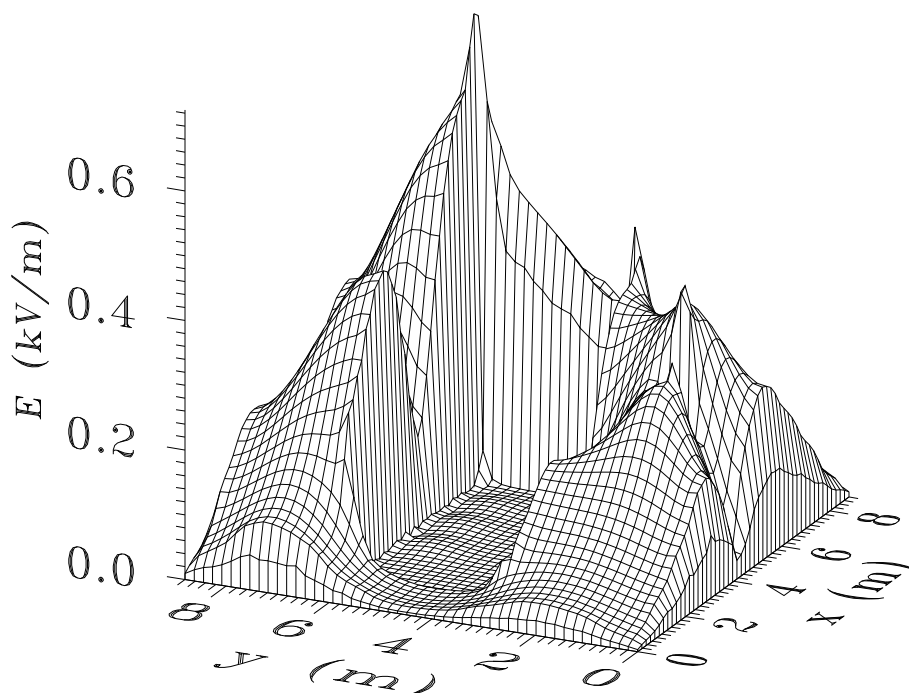


b.

Rys. 10.14. Komora transformatora 25 MVA we wnętrzej stacji 110/15 kV (RDR – pomieszczenie rejonowej dyspozycji ruchu), a. – widok ogólny, b. – rzut poziomy



Na rysunku 10.15 przedstawiono wyniki obliczeń rozkładów natężenia pola elektrycznego na wysokości 2 m ponad powierzchnią podłogi komory transformatora. Ze względu na ekranujące oddziaływanie ścian oraz kadzi transformatora maksymalna wartość natężenia pola elektrycznego tylko nieznacznie przekracza 0,7 kV/m.



Rys. 10.15. Rozkład pola elektrycznego na wysokości 2 m nad poziomem podłoża w komorze transformatora 25 MVA we wnętrzu stacji 110/15 kV zlokalizowanej na terenie Warszawy

### 10.2.3. Pole elektryczne na terenie napowietrznej rozdzielni 400 kV

W napowietrznych rozdzielniach najwyższych napięć (220 kV i 400 kV) pole elektryczne lokalnie może osiągać znaczne wartości [4, 24, 25, 80, 117]. Zgodnie z rozporządzeniem Ministra Pracy i Polityki Społecznej [96] obszary występowania relatywnie silnych pól elektromagnetycznych określa się poprzez podanie zasięgów tzw. stref ochronnych, które muszą być oznakowane na terenie obiektu oraz opisane w jego dokumentacji. We wspomnianym rozporządzeniu wprowadzono trzy strefy ochronne:

- strefę niebezpieczną, w której przebywanie pracowników jest zabronione
- strefę zagrożenia, w której dopuszczalny czas pracowników zależy od natężenia pola
- strefę pośrednią, w której przebywanie pracowników jest dozwolone w czasie jednej zmiany roboczej.

Obszar poza zasięgiem stref ochronnych jest obszarem strefy bezpiecznej.

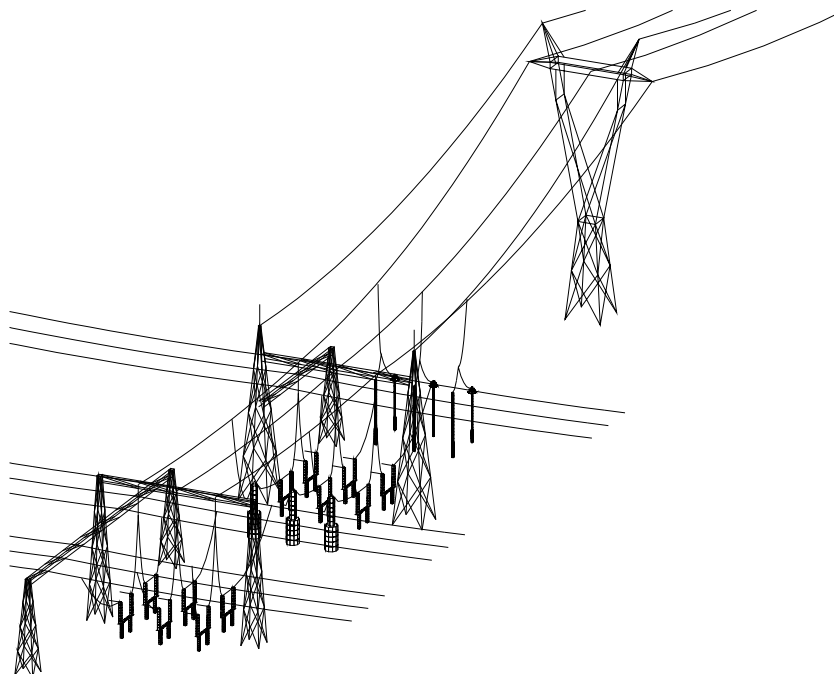
Dla pól elektrycznych o częstotliwości 50 Hz za strefę niebezpieczną uważa się obszar, na którym natężenie pola elektrycznego  $E$  przekracza 20 kV/m. Strefę zagrożenia stanowi obszar, na którym natężenie pola elektrycznego zawiera się w granicach:

$$10 \text{ kV/m} < E < 20 \text{ kV/m}$$

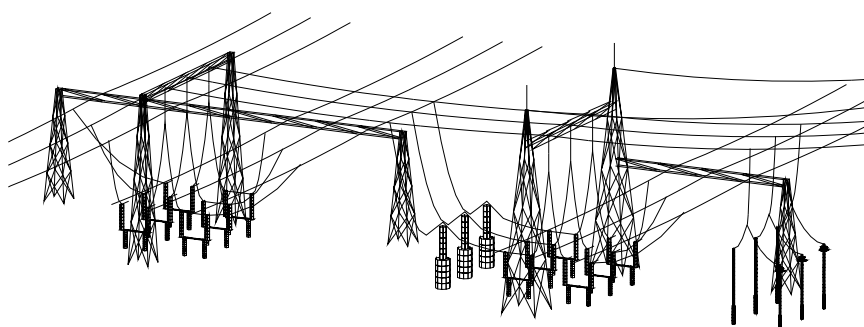
przy czym dopuszczalne narażenie na wpływ pola elektrycznego określone jest wartością wyrażenia  $D_{dE} = E^2 \cdot t$ , gdzie  $E$  jest natężeniem pola magnetycznego, w którym przebywa pracownik w czasie  $t$ , przy czym  $t \leq 8$  h; dla pól tej strefy  $D_{dE}$  (doza) nie może przekraczać  $800 \text{ (kV/m)}^2 \times \text{h}$ , przy czym gdy ekspozycja o działaniu miejscowym dotyczy wyłącznie kończyn, dopuszcza się zwiększone ich narażenie na pole magnetyczne o natężeniu 5 razy większym od dopuszczalnego dla całego ciała, z jednoczesnym dopuszczeniem dozy dla kończyn 25 razy większej od dozy dla całego ciała.

Jeszcze do niedawna rozkłady pola elektrycznego oraz zasięgi stref ochronnych na terenie rozdzielni najwyższych napięć wyznaczano na drodze pomiarów na modelach fizycznych wykonanych w skali [4, 14, 24, 80]. Podejście takie wymagało budowy szczegółowych, a co za tym idzie kosztownych modeli dla różnych typów i rozwiązań konstrukcyjnych rozdzielni. Rozwój metod numerycznych oraz dynamiczny postęp w zakresie sprzętu komputerowego umożliwia obecnie obliczeniowe modelowanie omawianych pól.

W niniejszym punkcie rozważono fragment napowietrznej rozdzielni 400 kV. Jest to rozwiązanie powtarzalne Energoprojektu Kraków [80]. W rozdzielni zastosowano podwójny układ szyn zbiorczych z szyną obejściową oraz grzebieniowy układ odłączników szynowych. Przewody są wykonane z linek i występują trzy poziomy ich prowadzenia. W szynach zbiorczych zastosowano skojarzony system faz. W przedstawionym przykładzie rozdzielni wykorzystano wyłącznik liniowy DLF 420 wyprodukowany przez ZWAR Warszawa na licencji ABB. Ogólny widok rozdzielni pokazano na rysunku 10.16, a rzuty: pionowy i poziomy na rysunku 10.17. Wysokość zawieszenia przewodów szyn zbiorczych i szyny obejściowej na bramkach wynosi 15 m, a ich najmniejsza odległość od ziemi jest 14,5 m. Wysokość zawieszenia przewodów na bramkach liniowych wynosi 23 m, a ich minimalna odległość od ziemi jest 22 m. Noże odłączników obrotowych znajdują się na wysokości 6 m, a ich przerwa izolacyjna wynosi 4 m. Wysokość wyłącznika wynosi 9,1 m. Przyjęto, że przenikalność elektryczna elementów ceramicznych aparatury rozdzielczej jest równa  $6\epsilon_0$ . Wykonano obliczenia rozkładów natężenia pola elektrycznego na wysokości 1,8 m nad powierzchnią terenu, zarówno pod szynami zbiorczymi, jak i w polu wyłącznika liniowego. Wyniki obliczeń przedstawiono na rysunkach 10.18 – 10.23. W przypadku nieuwzględnienia konstrukcji wsporczych aparatury rozdzielczej obliczone natężenie pola elektrycznego nie przekracza 10 kV/m. Uwzględnienie metalowych podstaw oraz izolatorów odłączników i wyłącznika powoduje, że obliczone natężenie pola elektrycznego lokalnie (w sąsiedztwie tych konstrukcji) przekracza nieznacznie 12 kV/m. Wynika to z koncentracyjnego oddziaływania tych elementów na rozkłady pola.

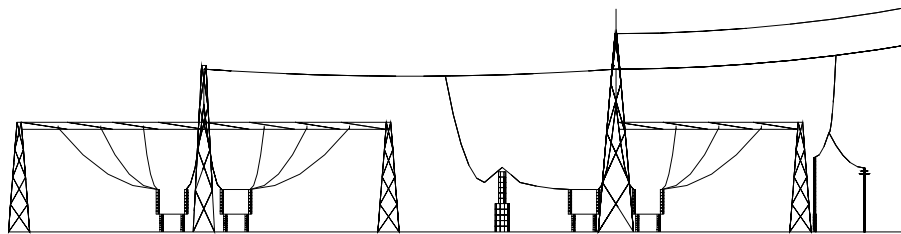


a.

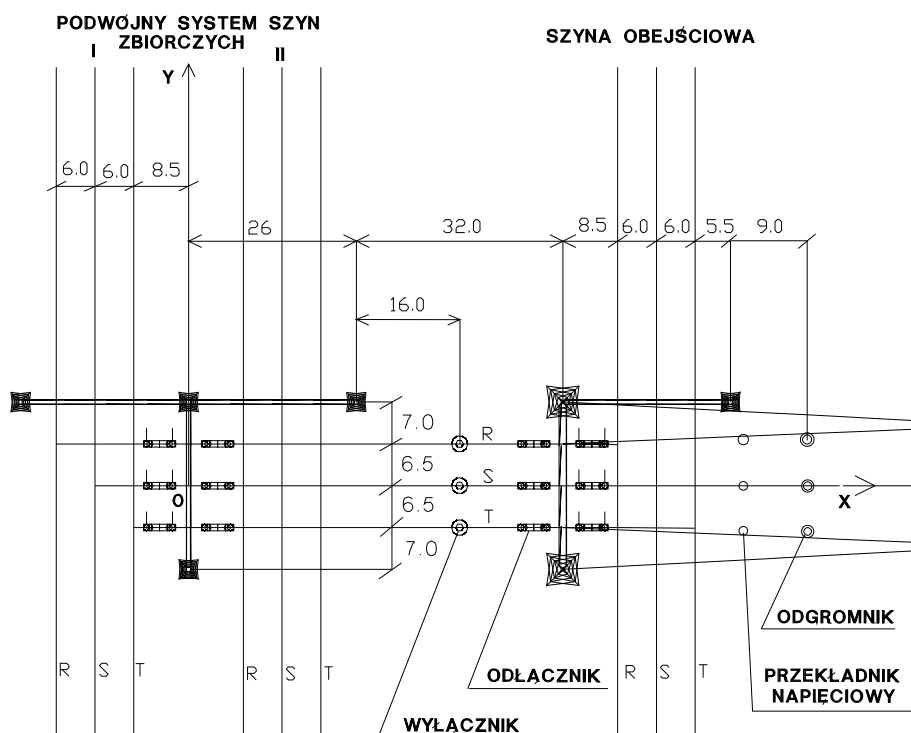


b.

Rys. 10.16. Widok ogólny fragmentu rozdzielni 400 kV w układzie grzebieniowym (rozwiązanie powtarzalne Energoprojektu Kraków), a. – widok ogólny z góry, b – widok ogólny z boku

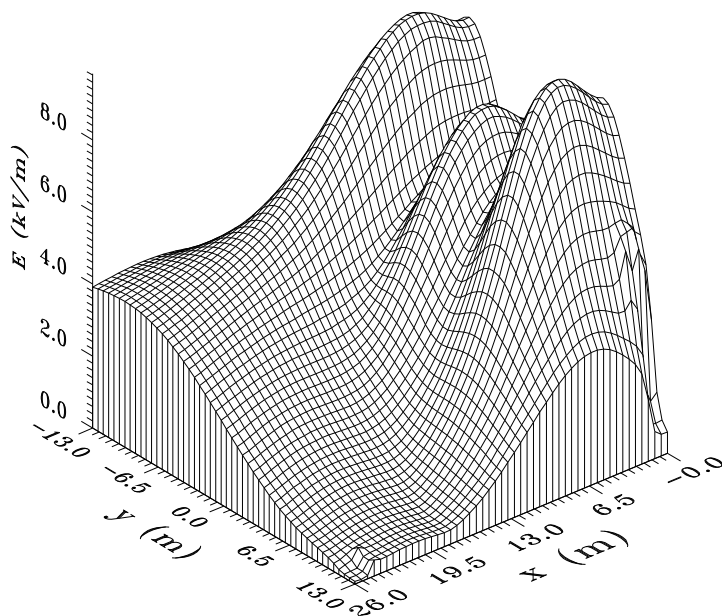


a.

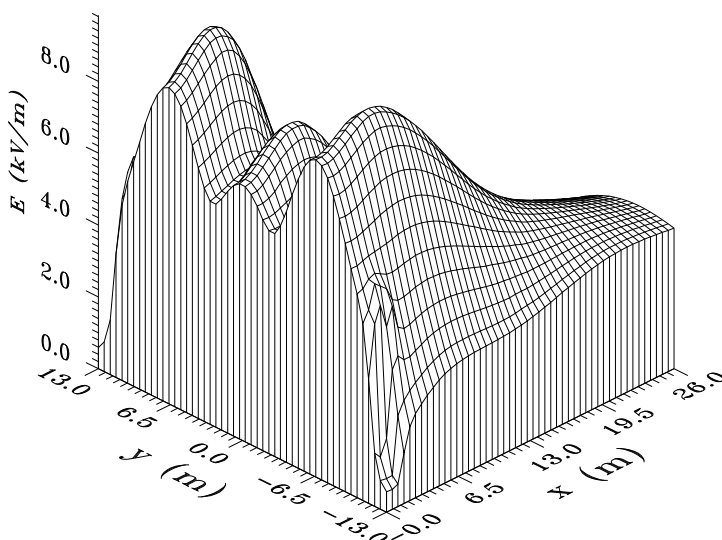


b.

Rys. 10.17. Rzuty fragmentu rozdzielni 400 kV w układzie grzebieniowym (rozwiązanie powtarzalne Energoprojektu Kraków), a. – rzut pionowy, b – rzut poziomy

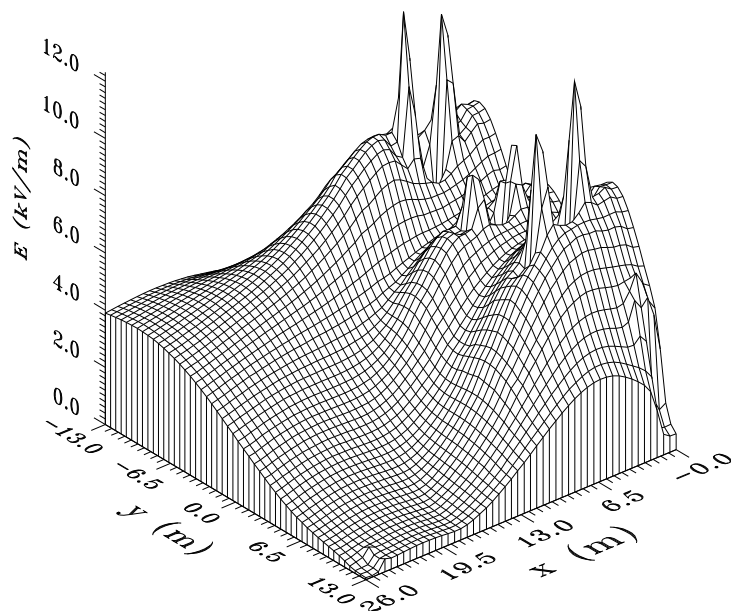


a.

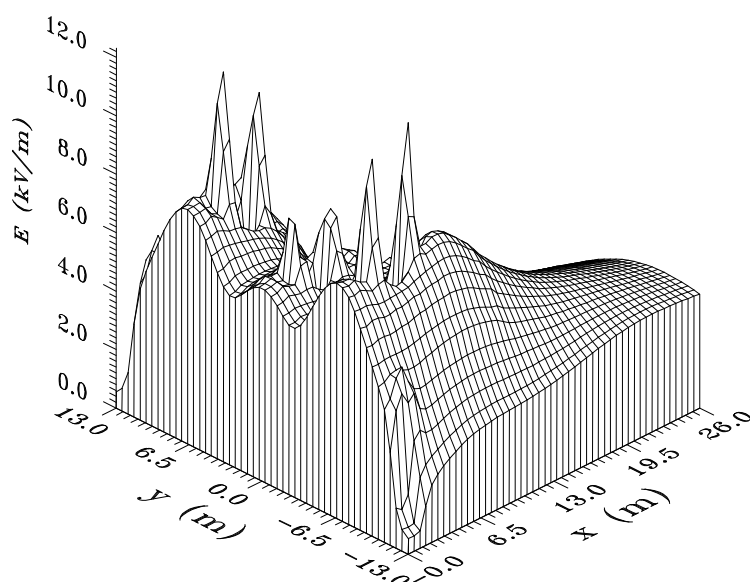


b.

Rys. 10.18. Rozkład pola elektrycznego pod szynami zbiornymi rozdzielni 400 kV, bez uwzględnienia wpływu konstrukcji wsporczych aparatury rozdzielczej, a. – widok od strony wyłącznika liniowego, b. – widok od strony bramki

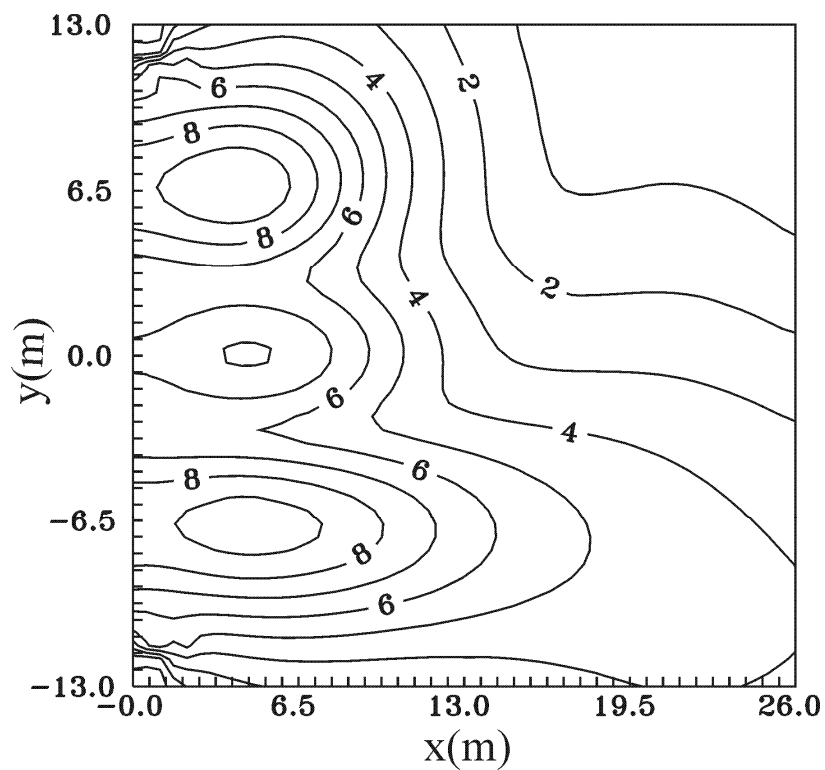


a.

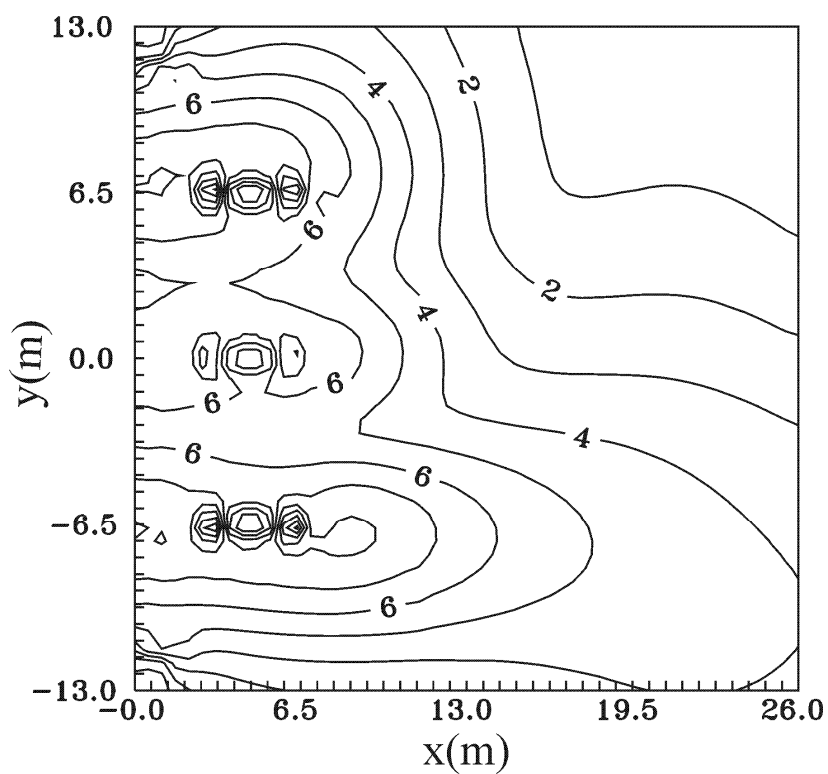


b.

Rys. 10.19. Rozkład pola elektrycznego pod szynami zbiorczymi rozdzielni 400 kV, z uwzględnieniem wpływu konstrukcji wsporczych odłączników, a. – widok od strony wyłącznika liniowego, b. – widok od strony bramki

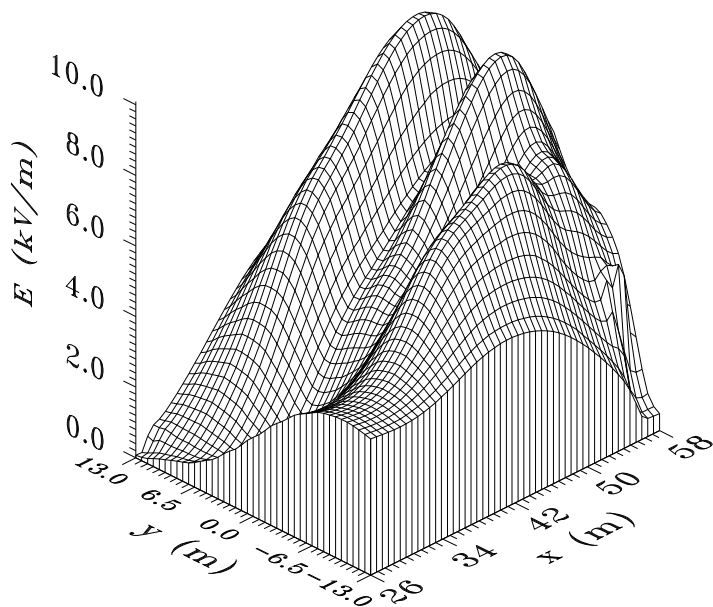


a.

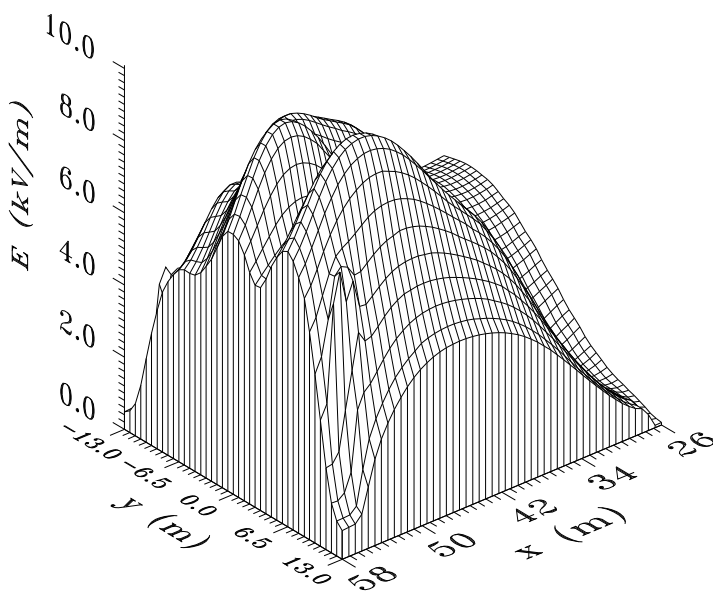


b.

Rys. 10.20. Linie stałego natężenia pola elektrycznego pod szynami zbiorczymi rozdzielni 400 kV (a. – bez uwzględnienia wpływu konstrukcji wsporczych odłączników b. – z uwzględnieniem wpływu konstrukcji wsporczych odłączników)



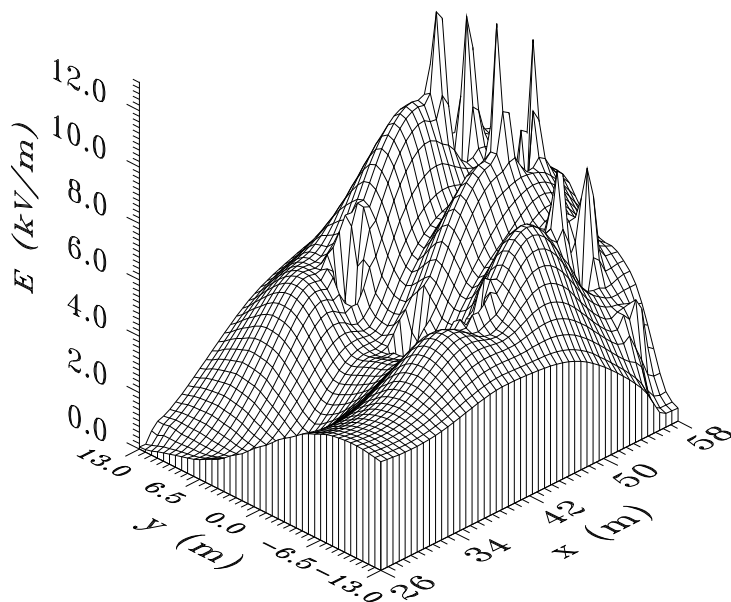
a.



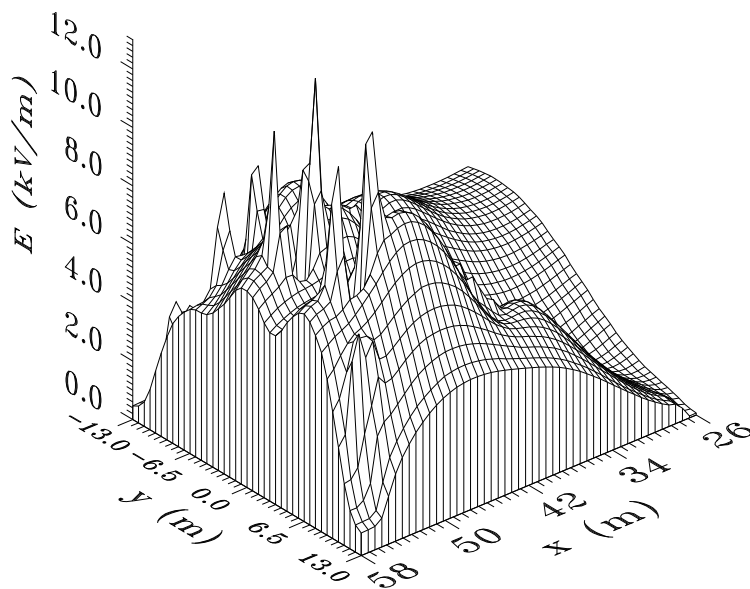
b.

Rys. 10.21. Rozkład pola elektrycznego w sąsiedztwie wyłącznika liniowego rozdzielni 400 kV, bez uwzględnienia wpływu konstrukcji wsporczych aparatury rozdzielczej, a. – widok od strony szyn zbiorczych, b. – widok od strony szyny obejściowej



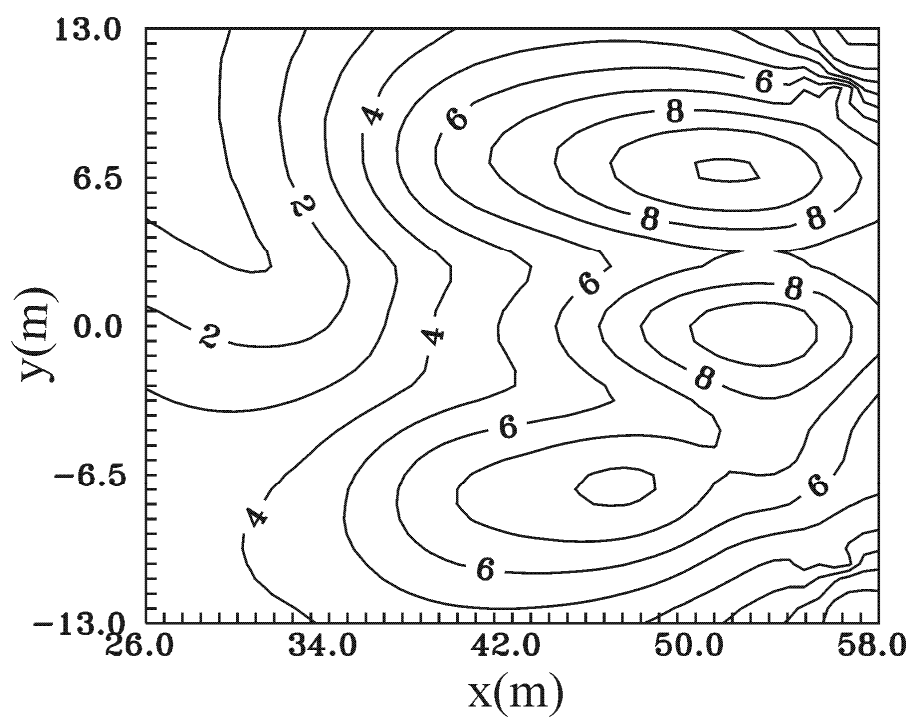


a.

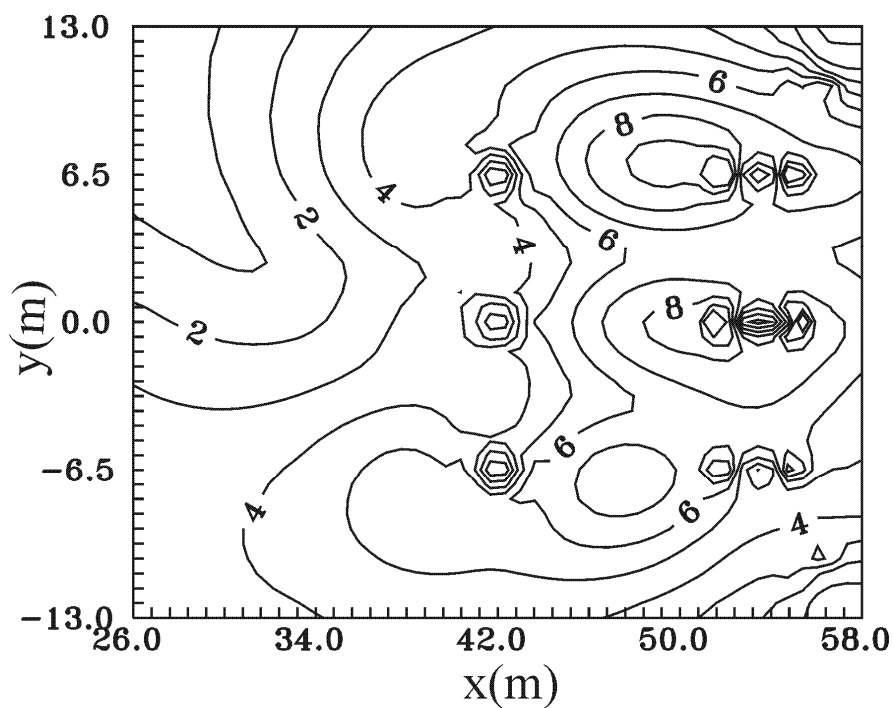


b.

Rys. 10.22. Rozkład pola elektrycznego w sąsiedztwie wyłącznika liniowego rozdzielni 400 kV, z uwzględnieniem wpływu konstrukcji wsporczych aparatury rozdzielczej, a. – widok od strony szyn zbiorczych, b. – widok od strony szyny obejściowej

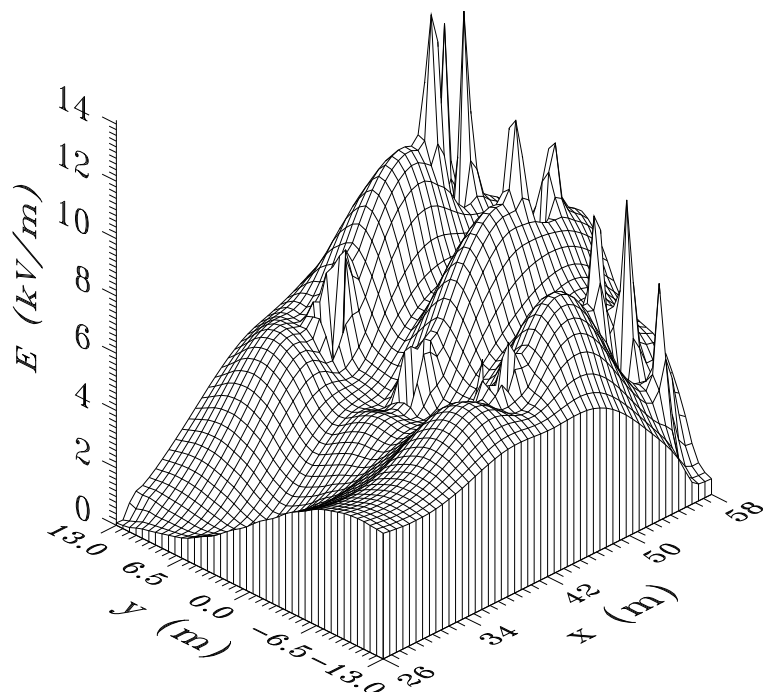


a.

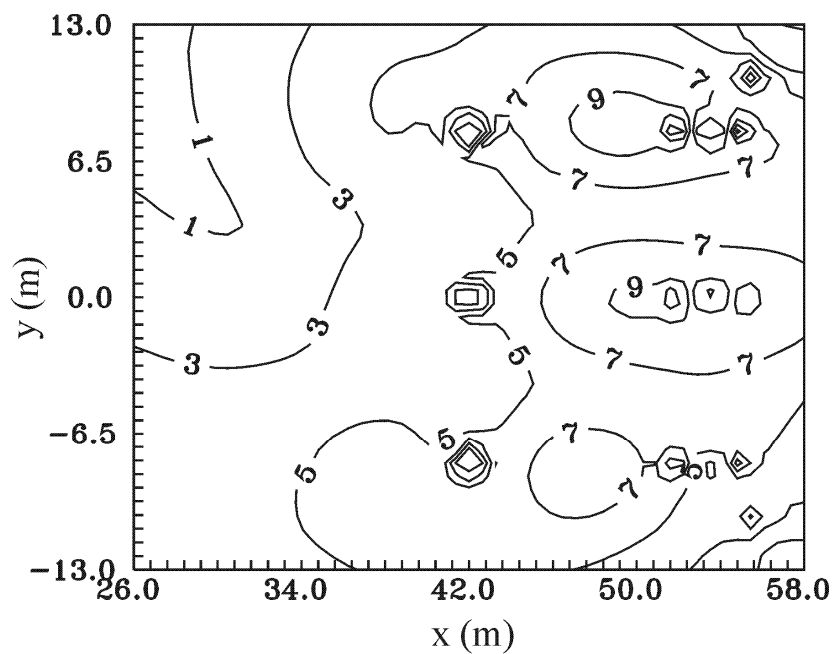


b.

Rys. 10.23. Linie stałego natężenia pola elektrycznego w sąsiedztwie wyłącznika liniowego rozdzielni 400 kV (a. – bez uwzględnienia wpływu konstrukcji wsporzecznych odłączników, b. – z uwzględnieniem wpływu konstrukcji wsporzecznych odłączników)



a.



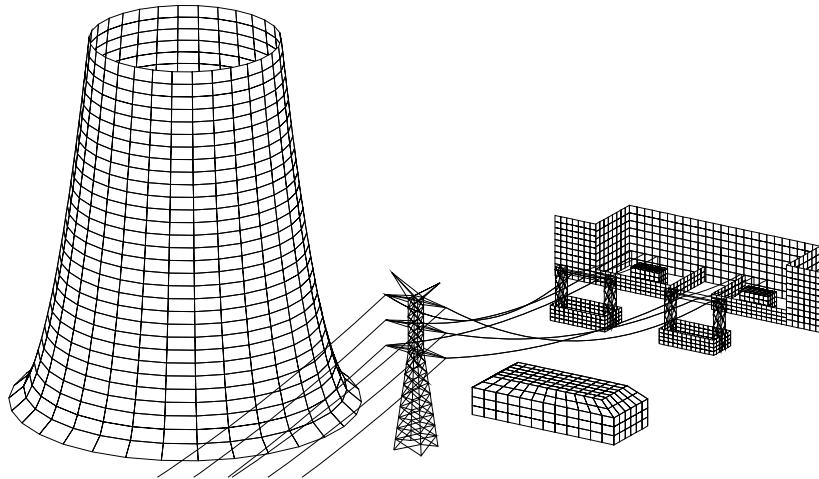
b.

Rys. 10.24. Natężenie pola elektrycznego w sąsiedztwie wyłącznika liniowego rozdzielni 400 kV, przy odległości między przewodami fazowymi 8 m (a. – przestrzenny rozkład pola, b. – linie stałego natężenia pola)

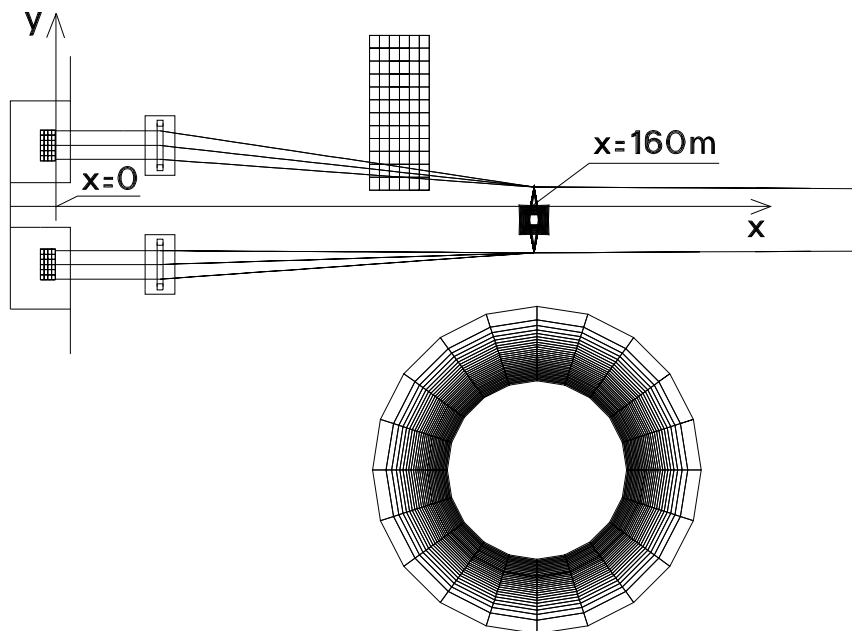
Na zakończenie tego punktu warto wspomnieć, że pomiary wykonane w Polsce w rozdzielniach 400 kV z konstrukcjami pod aparaturę o wysokości 2,5 – 3 m wykazały w jednych rozdzielniach natężenia pola elektrycznego nie przekraczające 15 kV/m, a w innych przekraczające nawet 20 kV/m [4]. Wynika to z faktu, że na wartość natężenia pola elektrycznego przy powierzchni ziemi wpływa szereg czynników, takich jak: wysokość prowadzenia przewodów na poszczególnych poziomach, odległość między przewodami fazowymi na danym poziomie, długość tak zwanej fazy samotnej, rodzaj konstrukcji wsporczych itp. Dla porównania na rysunku 10.24 pokazano rozkład pola w sąsiedztwie wyłącznika liniowego takiej samej rozdzielni jak rozważana, z tą różnicą, że odległość między przewodami fazowymi na poszczególnych poziomach między brankami liniowymi wynosiła nie 6,5 m a 8 m. Jak widać, w tym przypadku natężenie pola elektrycznego w sąsiedztwie odłączników osiągnęło wartość 14 kV/m. Otrzymane wyniki obliczeń są zbieżne z badaniami modelowymi wykonanymi przez Energopomiar Gliwice [24].

#### **10.2.4. Pole elektryczne na przedpolu elektrowni**

W niniejszym punkcie przedstawiono wyniki obliczeń pola elektrycznego w sąsiedztwie jednej z linii blokowych Elektrowni „Bełchatów” [66]. We wspomnianej elektrowni pracuje 12 bloków elektroenergetycznych o mocy 360 MW każdy, co daje łącznie 20% mocy zainstalowanej w krajowych elektrowniach. Z elektrowni wychodzi siedem dwutorowych linii 220 kV i 400 kV (dwanaście torów blokowych i dwa tory potrzeb własnych). Powyższe linie zbudowane są na słupach Z52 i ZL52. Ze względu na znaczny obszar na jakim rozmieszczone są linie blokowe oraz sąsiedztwo różnych obiektów zniekształcających rozkłady pola elektrycznego, symulacja komputerowa staje się niezwykle przydatna przy wyznaczaniu zasięgu obszarów ograniczonego użytkowania na terenach przylegających do elektrowni. Na rysunku 10.25 przedstawiono geometrię problemu. Ponieważ obliczenia dotyczą terenu na zewnątrz rozdzielni elektrownianej, nie uwzględniono w nich wpływu stosunkowo wysoko usytuowanych szyn zbiorczych oraz aparatury rozdzielczej. Uwzględniono natomiast wpływ bramek liniowych oraz ich ogrodzeń. Na rysunku 10.26 pokazano rozkład natężenia pola elektrycznego na wysokości 1,8 m npt między ogrodzeniami bramek liniowych i pierwszym słupem linii 220 kV. Bardzo wyraźnie uwidocznił się tutaj ekranujący wpływ budynku murowanego, kratownicy słupa linii WN, ogrodzeń pól bramkowych oraz chłodni kominowej. Rozbieżność między obliczeniami a pomiarami wykonanymi przez Energopomiar Gliwice nie przekroczyła 15%.

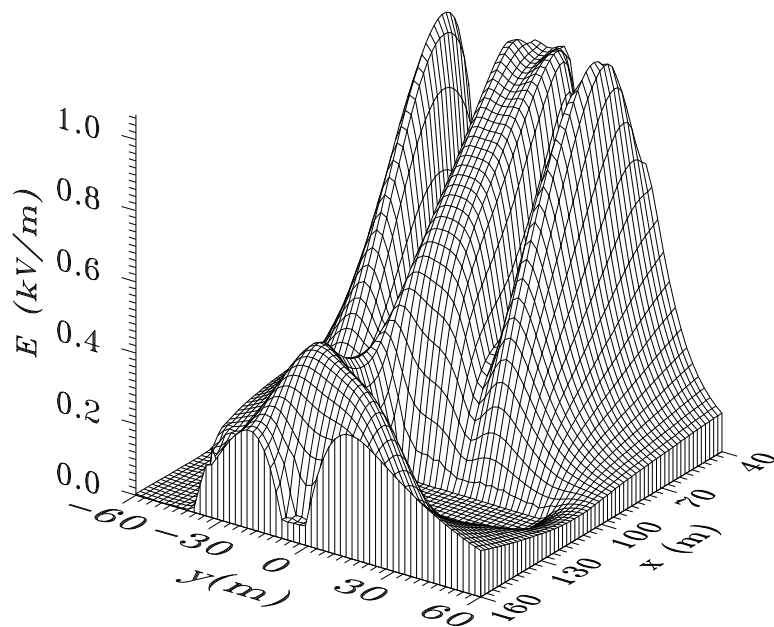


a.

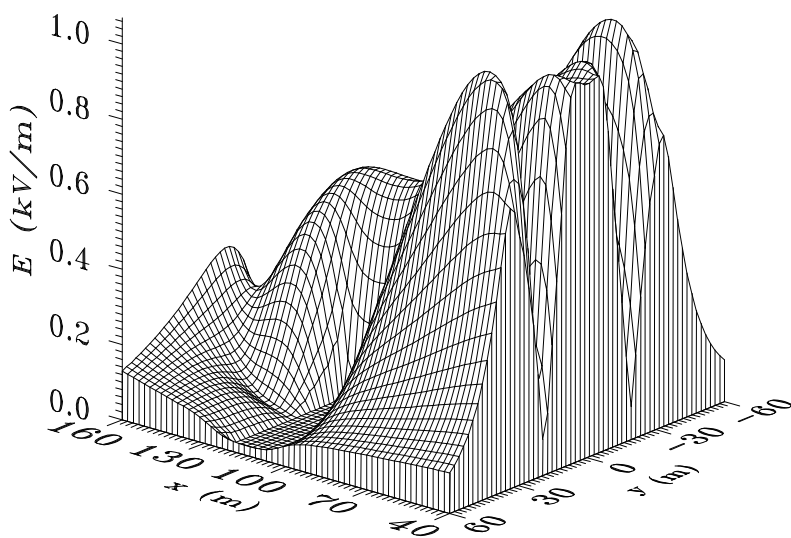


b.

Rys. 10.25. Fragment przedpola Elektrowni „Bełchatów”; a. – widok ogólny, b. – rzut poziomy (na rysunku pokazano sposób dyskretyzacji poszczególnych obiektów w procesie obliczeń numerycznych)



a.



b.

Rys. 10.26. Rozkład natężenia pola elektrycznego pomiędzy polem bramki a pierwszym słupem jednej z linii blokowych wychodzących z elektrowni, a. – widok od strony słupa linii WN, b. – widok od strony bramek liniowych

## 10.3. Analiza pól magnetycznych

### 10.3.1. Pole magnetyczne pod liniami WN

Przez wiele lat w polskich przepisach z zakresu ochrony środowiska nie występowało ograniczenie dla pola magnetycznego o częstotliwości 50 Hz. Ograniczenie to wprowadzono dopiero rozporządzeniem z 1998 r. [93], w którym to rozporządzeniu dopuszczalną wartość natężenia pola magnetycznego w miejscach dostępnych dla ludzi ustalono na 80 A/m. W rozporządzeniu Ministra Środowiska z 2003 r. [94] obniżono tę wartość do 60 A/m.

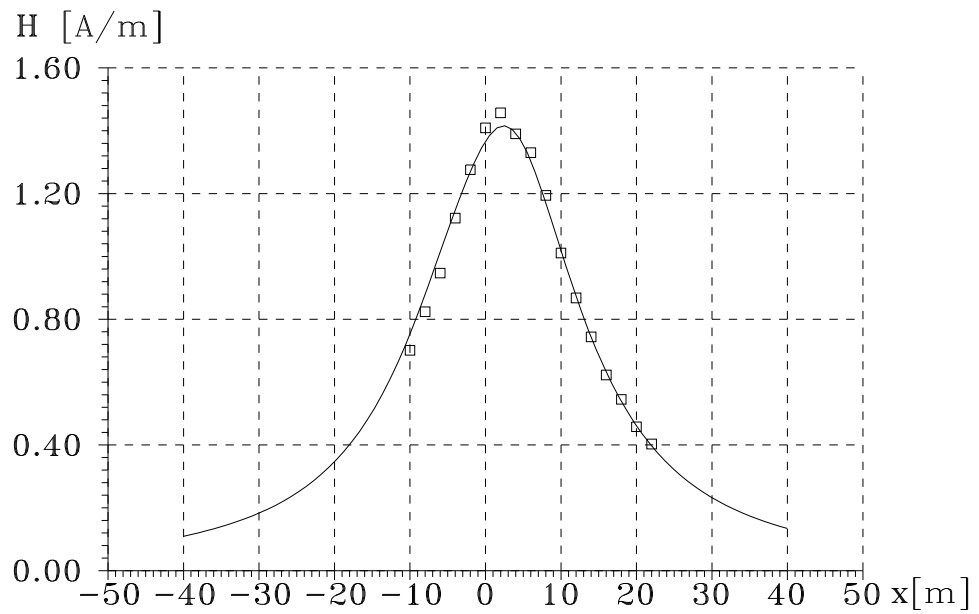
Natężenie pola magnetycznego wytwarzanego przy powierzchni ziemi przez eksploatowane w kraju linie WN jest zwykle mniejsze od dopuszczalnego [29,116] nawet przy najniekorzystniejszych warunkach ich obciążenia, to znaczy przy maksymalnym zwisie przewodów i maksymalnym prądzie roboczym. Mimo to obliczenia pola magnetycznego powinny być wykonywane na etapie projektowania nowych linii WN, szczególnie w przypadkach, gdy wprowadzane są nowe rozwiązania konstrukcyjne słupów [2].

Warto tutaj wspomnieć, że przekroczenie dopuszczalnej wartości natężenia pola magnetycznego pod liniami WN może wystąpić w stanach awaryjnych, np. podczas zwarć czy przy dużych asymetriach obciążenia. Takie sytuacje są jednak zwykle krótkotrwałe i nie wywierają istotnego wpływu na środowisko, chociaż mogą niekorzystnie oddziaływać na zlokalizowaną w sąsiedztwie linii infrastrukturę elektroniczną. Te przypadki jednak nie będą tutaj analizowane.

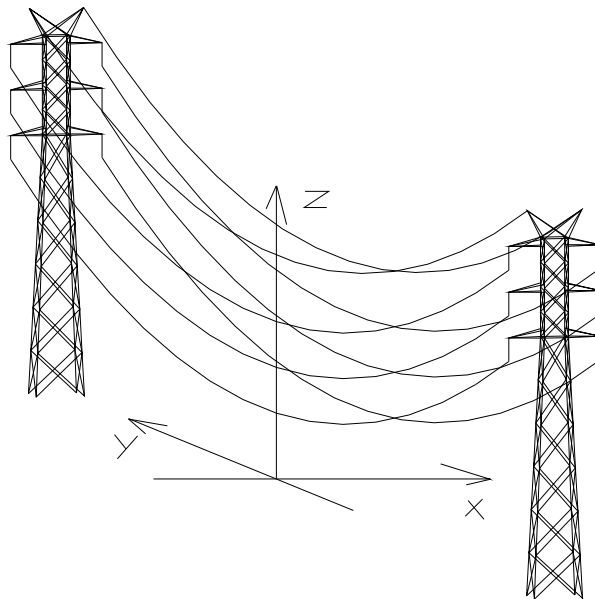
W chwili obecnej obliczanie pola magnetycznego pod liniami WN nie nastrocza istotnych problemów. Obiekty niemetalowe sąsiadujące z liniami (budynki, drzewa, krzewy, płoty) nie wpływają na jego rozkłady. Ażurowe konstrukcje stalowe, takie jak: kratownice słupów czy zbrojenia budynków odkształcają rozkłady pola magnetycznego jedynie w ich bezpośrednim sąsiedztwie powodując koncentrację pola w pobliżu prętów stalowych tworzących rozważaną konstrukcję. Wpływ ten jednak szybko zanika wraz z odległością, a zatem pole magnetyczne w sąsiedztwie linii WN może być wyznaczone bezpośrednio z prawa Biota-Savarta.

W niniejszym punkcie przedstawiono dwa przykłady obliczeniowe. Pierwszy z nich dotyczy przęsła linii 110 kV położonego przy ul. Kaczeńca w Warszawie, opisanego w punkcie 10.1.2 (rys. 10.4 i 10.5). Wykonano obliczenia i pomiary natężenia pola magnetycznego na wysokości 2 m npt, na odcinku leżącym na płaszczyźnie symetrii przęsła. Prąd w lewym torze wynosił 106 A, a w prawym 263 A. Minimalna odległość najniższych przewodów roboczych od ziemi wynosiła 11,5 m. Omawiana linia jest linią rozdzielczą i jej tory współpracują z różnymi obiektami (rozdzielniami). W czasie wykonywania pomiarów prądy w odpowiadających sobie przewodach obu torów były przesunięte względem siebie w fazie o  $\varphi = 90^\circ$ . Pomiary wykonano miernikiem Maschek EMS-100. Wyniki obliczeń i pomiarów przedstawiono na rys. 10.27. Pomiary i obliczenia wykonano przy stosunkowo niewielkim obciążeniu linii i dlatego otrzymano niskie wartości natężenia pola magnetycznego.

Drugi przykład dotyczy dwutorowej linii 220 kV zbudowanej na słupach serii ML52 typ P, przewody 6×525 AFL–8 (rys. 10.28). Wykonano obliczenia i pomiary natężenia pola magnetycznego na wysokości 1,8 m npt na odcinku leżącym na płaszczyźnie symetrii przęsła. Prąd w lewym torze wynosił 560 A, a w prawym 710 A.

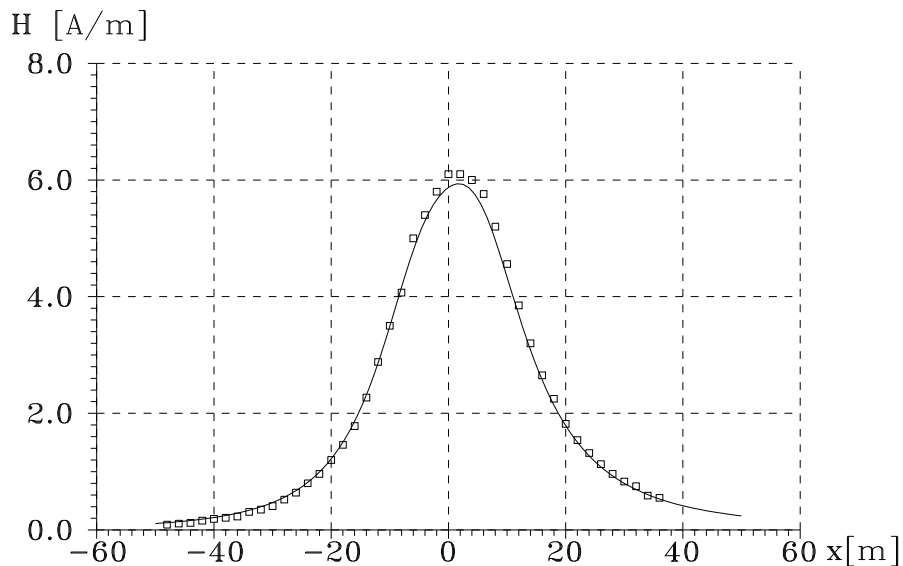


Rys. 10.27. Rozkład natężenia pola magnetycznego pod przęsłem linii rozdzielczej 110 kV przy ul. Kaczeńca w Warszawie (kwadracikami oznaczono wyniki pomiarów)



Rys. 10.28. Przęsło dwutorowej linii 220 kV zbudowane na słupach serii ML52 typu P





Rys. 10.29. Rozkład natężenia pola magnetycznego pod przesłem linii 220 kV (kwadracikami oznaczono wyniki pomiarów)

Minimalna odległość najniższych przewodów roboczych od ziemi wynosiła 11,4 m. W linii zastosowano transpozycję faz w sąsiednich torach. Lewy tor, licząc od górnego przewodu, ma konfigurację RST, a prawy TSR. Pomiary natężenia pola magnetycznego wykonał dr inż. Marek Szuba. Wyniki obliczeń i pomiarów przedstawiono na rysunku 10.29. W obu rozważonych przypadkach uzyskano zadawalającą zgodność obliczeń i pomiarów.

### 10.3.2. Pole magnetyczne na terenie wewnętrznej stacji 110/15 kV

Obliczeniowe wyznaczanie rozkładów pola magnetycznego na terenie stacji elektroenergetycznych jest zadaniem bardziej skomplikowanym niż w przypadku linii WN. Występują tam skomplikowane konfiguracje torów prądowych (układy szyn zbiorczych, oszynowanie aparatury), a także znajdują się duże masy metalowe (kadzie transformatorów). Mogą też występować układy ekranowania pól. Dlatego też analiza rozważanych tutaj zagadnień wymaga zastosowania zaawansowanego aparatu matematycznego.

W niniejszym punkcie przedstawiono wyniki obliczeń pola magnetycznego w komorze transformatora wewnętrznej stacji elektroenergetycznej 110/15 kV, opisanej w punkcie 10.2.2 i pokazanej na rysunkach 10.14 i 10.30. Rozważane pole wywołane jest prądami w przewodach doprowadzających górne napięcie oraz w przewodach wyprowadzających napięcie dolne. W obliczeniach założono, że pole magnetyczne wytwarzane przez uzwojenia transformatora jest całkowicie ekranowane przez jego kadz i nie wydostaje się z niej na zewnątrz. W rozważanym transformatorze o mocy 25 MVA zastosowano układ połączeń YNd11. W pierwszej kolejności wyznaczono rozkłady natężenia pola magnetycznego na wysokości 2 m nad poziomem podłoża. Dla

porównania wykonano obliczenia zarówno bez uwzględnienia (rys. 10.31) jak i z uwzględnieniem (rys. 10.32) wpływu kadzi transformatora na analizowane zewnętrzne pole magnetyczne. Można zauważyć, że w sąsiedztwie odłącznika dolnego napięcia natężenie pola magnetycznego nieznacznie przekracza 60 A/m. Na rysunkach 10.33 i 10.34 pokazano rozkłady pola magnetycznego, odpowiednio na powierzchni ściany komory transformatora graniczącej z pomieszczeniem RDR oraz w odległości 0,5 m od tej ściany od strony RDR. Przedstawione wyniki świadczą, że natężenie pola magnetycznego w pomieszczeniu RDR nie przekracza 60 A/m, to znaczy wartości dopuszczalnej w środowisku w miejscach dostępnych dla ludzi.

Jak już wcześniej wspomniano, obowiązujące w Polsce przepisy dopuszczają dla ekspozycji zawodowej wyższe poziomy natężeń pól elektrycznych i magnetycznych niż w przypadku ekspozycji środowiskowej. Poziomy te dla pola magnetycznego o częstotliwości 50 Hz, podobnie jak dla pola elektrycznego, określono w Rozporządzeniu Ministra Pracy i Polityki Społecznej [96]. Wyróżnia się tam trzy strefy ochronne:

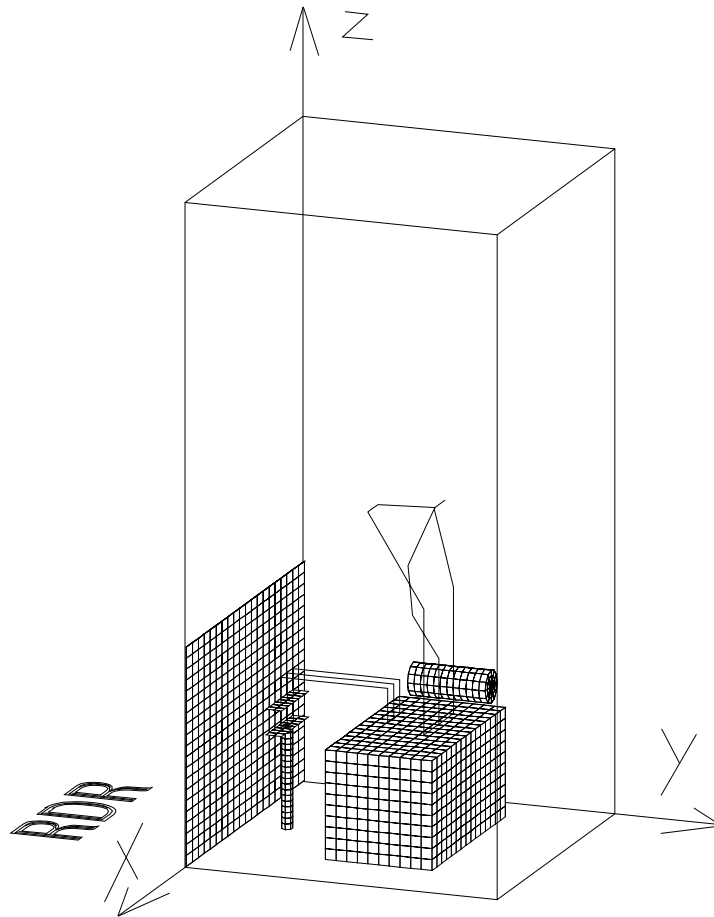
- strefa niebezpieczna, gdzie  $H > 2000$  A/m, w której to strefie przebywanie pracowników jest zabronione,
- strefa zagrożenia, w której  $200$  A/m  $< H < 2000$  A/m, przy czym dopuszczalne narażenie na wpływ pola magnetycznego określone jest wartością wyrażenia  $D_{dH} = H^2 \cdot t$ , gdzie  $H$  jest natężeniem pola magnetycznego, w którym przebywa pracownik w czasie  $t$ , przy czym  $t \leq 8$  h; dla pól tej strefy  $D_{dH}$  (doza) nie może przekraczać  $0.32$  (kA/m)<sup>2</sup>·h, przy czym, gdy ekspozycja o działaniu miejscowym dotyczy wyłącznie kończyn, dopuszcza się zwiększone ich narażenie na pola magnetycznego o natężeniach 5 razy większych od dopuszczalnych dla całego ciała, z jednoczesnym dopuszczeniem dozy dla kończyn 25 razy większej od dozy dla całego ciała,
- strefa pośrednia  $60$  A/m  $< H < 200$  A/m, w której przebywanie pracowników jest dozwolone w ciągu jednej zmiany roboczej.

Na uwagę zasługuje fakt, że we wspomnianym wyżej (obowiązującym od 2002 r.) rozporządzeniu obniżono dwukrotnie poziomy natężenia pola magnetycznego określające granice między strefami ochronnymi przy jednoczesnym czterokrotnym zmniejszeniu dopuszczalnej dozy w porównaniu z wartościami przyjętymi w przepisach obowiązujących poprzednio [95].

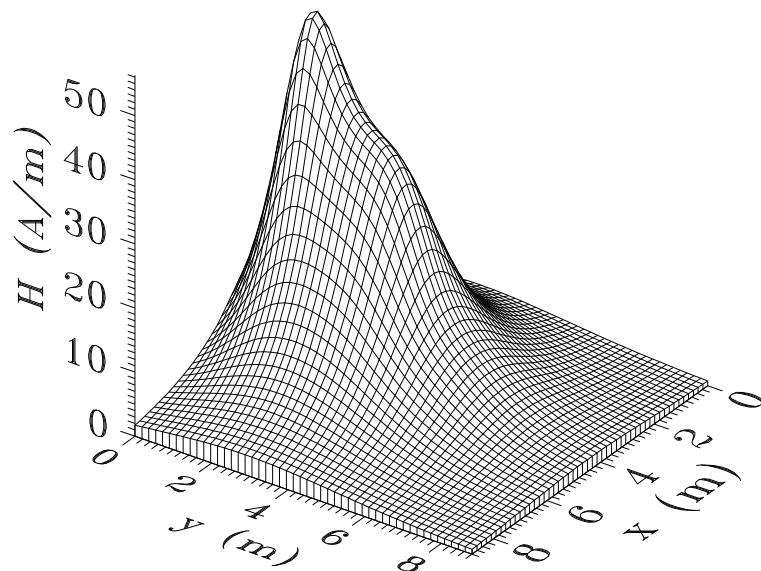
W rozważanej stacji przewiduje się docelowo zainstalowanie transformatorów o mocy 63 MVA, co spowoduje około 2,5-krotny wzrost natężenia pola magnetycznego, oczywiście przy pominięciu zmiany sposobu prowadzenia przewodów wyprowadzających napięcie z większych transformatorów oraz zmiany ich gabarytów i ustawienia. W komorach transformatorów oraz w pomieszczeniu RDR wystąpi pośrednia strefa ochronna, co jednak nie pociągnie za sobą konieczności zmiany trybu pracy personelu technicznego. Gdyby zaistniała konieczność ograniczenia poziomu natężenia pola magnetycznego ze względu na zlokalizowaną w pomieszczeniu RDR aparaturę elektroniczną i sprzęt komputerowy, można w tym celu zastosować ekran elektromagnetyczny.

Przeprowadzono obliczenia pola magnetycznego w pomieszczeniu RDR w odległości 0,5 m od ściany graniczącej z komorą transformatora z uwzględnieniem

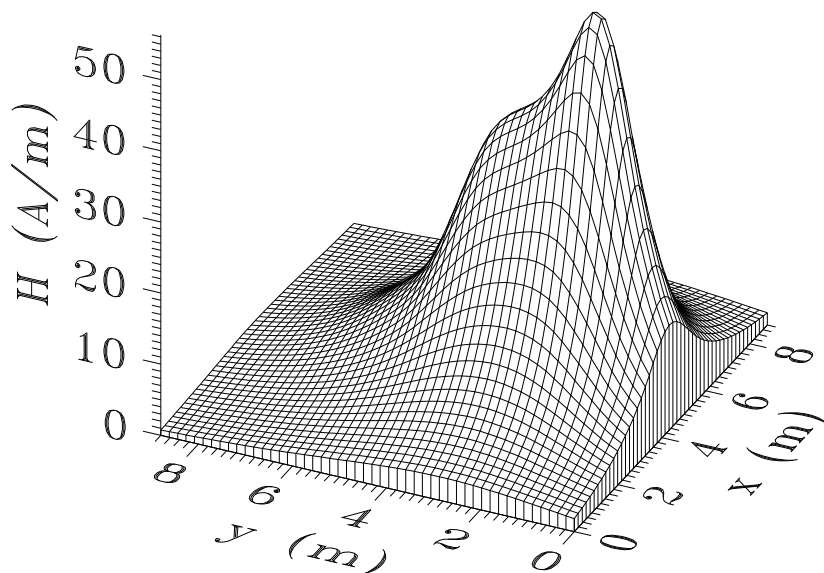
wpływu miedzianego ekranu o wymiarach  $8,8 \text{ m} \times 6 \text{ m} \times 0,025 \text{ m}$  umieszczonego na ścianie komory transformatora, tak jak to pokazano na rysunku 10.29. Przyjęto dane dla transformatora o mocy 25 MVA. Ekran podzielono na 1400 elementów brzegowych. Całkowity czas obliczeń omawianego zagadnienia na komputerze z procesorem Pentium IV/3,06 GHz wynosi ok. 3 h. Wyniki obliczeń przedstawiono na rysunku 10.35. Jak widać nastąpiło czterokrotne obniżenie poziomu natężenia pola magnetycznego na rozważanej powierzchni w stosunku do jego poziomu pod nieobecność ekranu. Można zauważyć, że zastosowanie ekranu spowodowało przesunięcie maksymalnej wartości natężenia pola magnetycznego ku górze (ponad górną krawędź ekranu). Jest to zgodne z fizyczną interpretacją zjawiska.



Rys. 10.30. Komora transformatora 25 MVA we wewnętrzej stacji 110/15 kV; na rysunku pokazano ekran elektromagnetyczny usytuowany między komorą transformatora a pomieszczeniem RDR

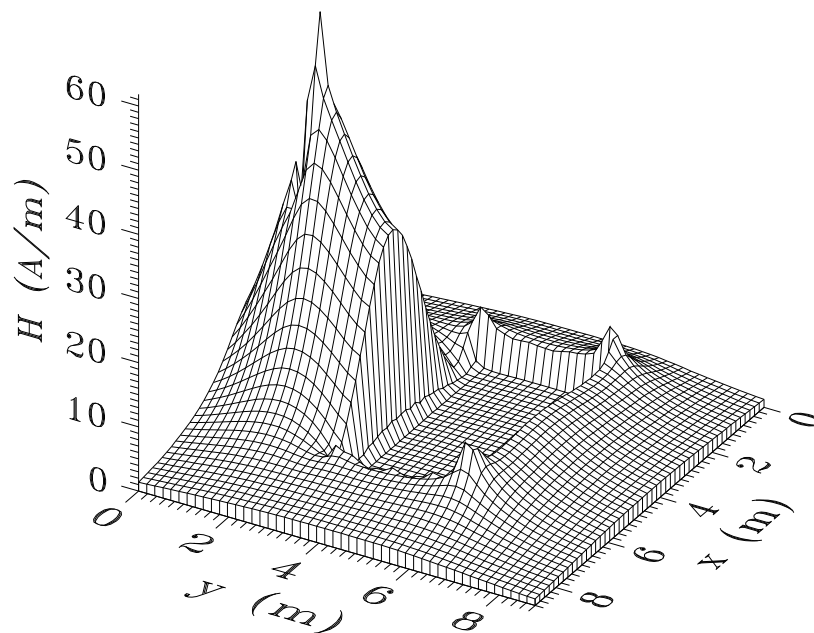


a.

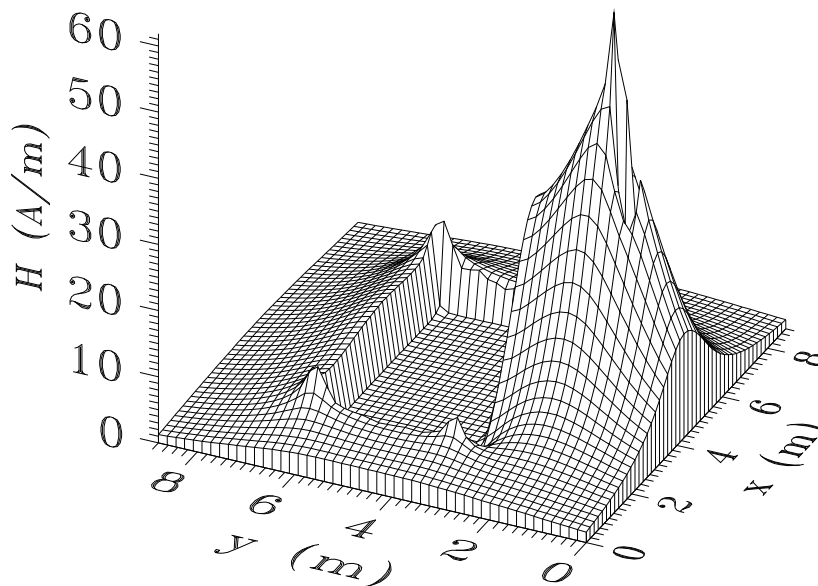


b.

Rys. 10.31. Rozkład natężenia pola magnetycznego w komorze transformatora na wysokości 2 m nad poziomem podłoża (w obliczeniach pominięto ekranujący wpływ kadzi)

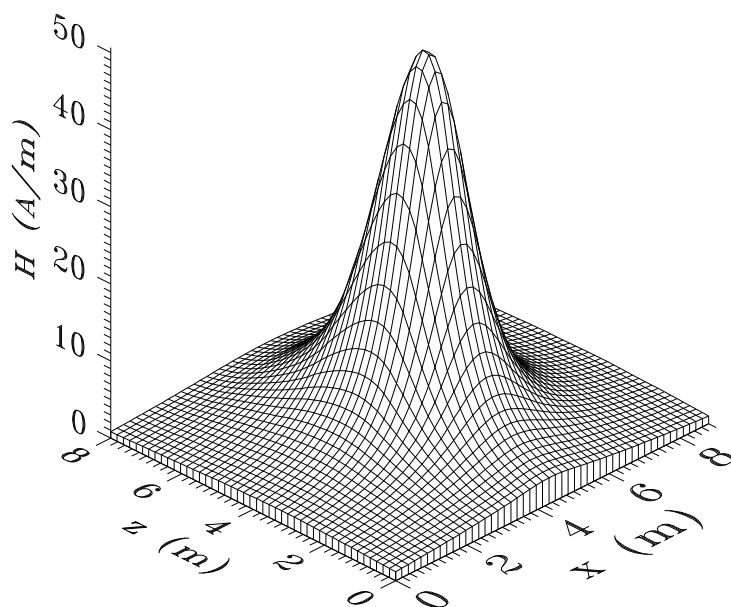


a.

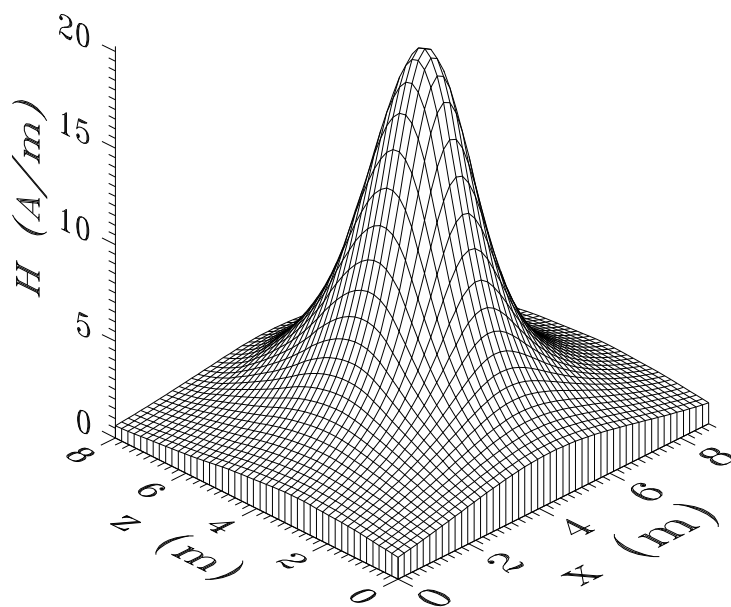


b.

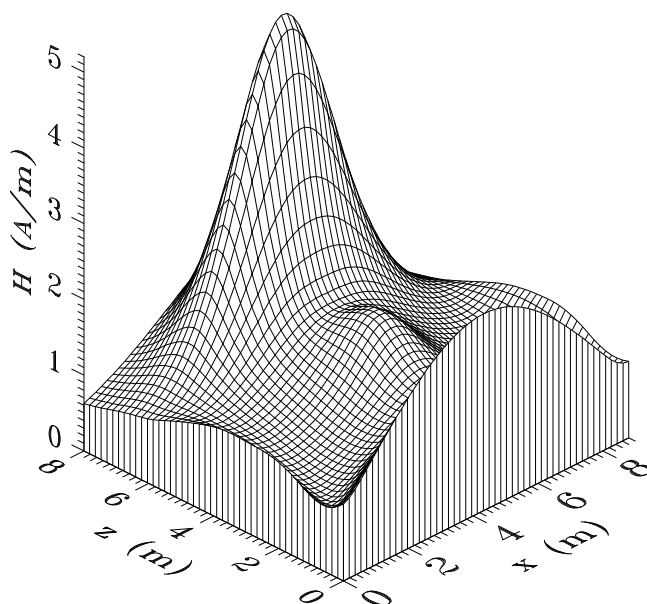
Rys. 10.32. Rozkład natężenia pola magnetycznego w komorze transformatora na wysokości 2 m nad poziomem podłoża (w obliczeniach uwzględniono ekranujący wpływ kadzi)



Rys. 10.33. Rozkład natężenia pola magnetycznego na powierzchni ściany komory transformatora graniczącej z pomieszczeniem RDR, pod nieobecność ekranu elektromagnetycznego



Rys. 10.34. Rozkład natężenia pola magnetycznego w pomieszczeniu RDR, w odległości 0,5 m od ściany graniczącej z komorą transformatora, pod nieobecność ekranu elektromagnetycznego



Rys. 10.35. Rozkład natężenia pola magnetycznego w pomieszczeniu RDR, w odległości 0,5 m od ściany graniczącej z komorą transformatora, przy uwzględnieniu oddziaływania ekranu elektromagnetycznego

## 11. PODSUMOWANIE I WNIOSKI

W pracy zaproponowano trójwymiarowe modele fizyczne oraz ukierunkowane na zastosowanie metod całkowo-brzegowych modele matematyczne pól elektrycznych i magnetycznych niskiej częstotliwości generowanych przez obiekty elektroenergetyczne. W modelach tych uwzględniono obecność wielu typowych obiektów zniekształcających rozkłady pól w sąsiedztwie linii WN i na terenie stacji elektroenergetycznych. Rozważono problemy związane z zastosowaniem ekranów, zarówno elektrycznych i magnetycznych, jak i elektromagnetycznych. Dokonano wyboru najbardziej odpowiedniej, zdaniem autora, metody numerycznej do analizy rozważanych w pracy zagadnień. Metoda ta polega na połączeniu pośredniego wariantu metody elementów brzegowych z wariantem metody ładunków symulowanych zwanym w pracy metodą elementów liniowych.

Przedstawiono odpowiednie wzory oraz sformułowano równania macierzowe właściwe dla zaproponowanej metody numerycznej.

Opracowano algorytmy oraz autorskie programy komputerowe bazujące na wyżej wspomnianej metodzie hybrydowej, które wyposażono we własne generatory siatek różnego rodzaju obiektów geometrycznych, w tym generatory kratownic słupów linii WN oraz bramek stacyjnych eksploatowanych w polskim systemie elektroenergetycznym.

Na szczególną uwagę zasługuje opracowany przez autora monografii program do analizy trójwymiarowych zagadnień wiroprowadowych wykorzystujący tak zwany

model  $\mathbf{H} - \psi$ . Warto tutaj wspomnieć, że numeryczne rozwiązywanie trójwymiarowych problemów wiropądowych jest jednym z bardziej skomplikowanych zagadnień obliczeniowych elektromagnetyzmu, zarówno ze względu na jego złożoność matematyczną, jak i na wymaganą dużą moc obliczeniową komputera.

Przeprowadzono eksperymentalną weryfikację metod obliczeniowych i programów komputerowych, zarówno w warunkach laboratoryjnych, jak i w terenie. W zdecydowanej większości przeanalizowanych przypadków uzyskano zadawalającą zgodność pomiarów i obliczeń. Jedynie uproszczony model pola magnetycznego w odniesieniu do konstrukcji ażurowych daje wyniki znacznie odbiegające od wyników pomiarów. Pomierzony wpływ tych konstrukcji na rozkłady pola magnetycznego jest niewielki, a zatem można je pominąć w obliczeniach.

Zaprezentowano wyniki przykładowych obliczeń dla różnych typowych konfiguracji obiektów elektroenergetycznych, gdzie konieczne było zastosowanie trójwymiarowych modeli pól.

Opracowane przez autora monografii procedury obliczeniowe sukcesywnie implementowane są w rozbudowywanym w Instytucie Elektrotechniki komercyjnym pakiecie oprogramowania EMFA do analizy pól elektrycznych i magnetycznych w sąsiedztwie obiektów elektroenergetycznych.

Według rozeznania autora pracy, tego typu oprogramowaniem zainteresowane są centralne i terenowe jednostki ochrony środowiska, które wykorzystywałyby program w postępowaniach sprawdzających dotrzymanie standardów jakości środowiska w odniesieniu do elektromagnetycznego promieniowania niejonizującego. Drugim bardzo istotnym potencjalnym odbiorcą programu jest elektroenergetyka, a w szczególności biura konstrukcyjne zajmujące się projektowaniem linii i stacji WN, a także eksploatujące je zakłady energetyczne. Opracowane oprogramowanie może także służyć jako pomoc naukowa w ramach zajęć dydaktycznych z zakresu EMC na wyższych uczelniach technicznych. Innym odbiorcą programu mogą stać się komercyjne firmy eksperckie wykonujące oceny z zakresu ochrony środowiska.

Coraz szersze upowszechnianie się na świecie, a ostatnio także i w Polsce, wykonywania w elektroenergetyce prac remontowych i konserwacyjnych pod napięciem, gdzie wartości natężeń pól znacznie przekraczają zarówno ekspozycje środowiskowe, jak i ekspozycje występujące na typowych stanowiskach pracy, stwarza dodatkowe zapotrzebowanie na numeryczne modelowanie pól elektromagnetycznych w sąsiedztwie człowieka, a także wewnątrz jego organizmu. Znajomość rozkładów omawianych pól pozwoli na możliwie precyzyjne określenie czasu jaki pracownik może spędzić przy wykonywaniu danej operacji, tak aby nie zostały przekroczone dopuszczalne dozy promieniowania określone w obowiązujących przepisach. Analiza rozkładów rozważanych pól (w połączeniu z badaniami biologicznymi i medycznymi) może stać się także pomocna w korygowaniu zasad ich dozymetrii [127]. Będzie to przedmiotem dalszych prac autora.

## LITERATURA

1. Albertz D., Henneberger G.: Calculation of 3D eddy current fields using both electric and magnetic vector potential in conducting regions. IEEE Trans. on Magnetics, Vol. 34, No. 5, 1998, s. 2644 – 2647



2. Argasińska H.: Możliwość ograniczania oddziaływania linii elektroenergetycznych najwyższych napięć na środowisko. IV Krajowa Konferencja Naukowo-Techniczna p.n.: Pola Elektromagnetyczne 50 Hz a Energetyka i Środowisko, Szczyrk, 1998, s. 29 – 41
3. Arciszewski J., Komorowska I., Kulikowski J.: Oddziaływanie stacji i linii elektroenergetycznych o napięciu do 110 kV włącznie na środowisko. Dokumentacja Instytutu Energetyki, Zakład Wysokich Napięć, 1993
4. Arciszewski J., Kołodziejcki E.: Natężenie pola elektrycznego w stacjach 400 kV. Energetyka, Nr 3, 1978, s. 105 – 108
5. Banerjee P. K., Butterfield R.: Boundary Element Methods in Engineering Science. McGraw-Hill Company, London, 1981
6. Banerjee P. K.: Boundary Element Method in Engineering. McGraw-Hill Company, London, 1994
7. Baron B.: Pole elektryczne linii przesyłowych trójfazowych najwyższych napięć. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Nr 666, 1980
8. Baron B.: Analiza pola elektrycznego pod skrzyżowaniem dwóch torów trójfazowych. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Elektryka, Nr 75, 1981
9. Bednarek K., Nawrowski R.: Pomiary indukcji magnetycznej w otoczeniu torów wieloprądowych oraz ocena oddziaływania torów wieloprądowych na pracę monitorów komputerowych. Krajowe Sympozjum Kompatybilność Elektromagnetyczna w Elektrotechnice i Elektronice, EMC'99, Łódź, 1999, s. 45 – 54
10. Bíró O., Bardi I., Preis K., Renhart W., Richter K. R.: Finite element techniques to HV problems. 9<sup>th</sup> International Symposium on High Voltage Engineering, Graz, August 1995, s. 8392/1 – 4
11. Bochenek K.: Metody analizy pól elektromagnetycznych. PWN, Warszawa – Wrocław, 1961
12. Brebbia C. A.: The Boundary Element Method for Engineers. Pentech Press, London, 1978
13. Brebbia C. A., Telles J. C. F., Wrobel L. C.: Boundary Element Techniques. Springer, Berlin Heidelberg New York, 1984
14. Caldecott R., English W. E., Sebo S. A., Addis G. I.: 'Scale modelling of the electromagnetic field in high voltage AC substations'. 7<sup>th</sup> International Symposium on High Voltage Engineering, Dresden, August 1991, s. 79 – 82
15. Carpenter J. C.: Theory of flux penetration into laminated iron and associated losses. IEE Proceedings, Vol. 124, No. 7, 1977, s. 659 – 664
16. Carpenter J. C.: Comparison of alternative formulations of 3-dimensional magnetic field and eddy current problems at power frequencies. IEE Proceedings, Vol. 124, No. 11, 1977, s. 1026 – 1034
17. Ciok Z.: Ochrona środowiska w elektrotechnice, PWN, Warszawa, 2001
18. Ciok Z.: Pola elektromagnetyczne i ich wpływ na środowisko. I Sympozjum na temat: Ochrona Środowiska w Dydaktyce Wydziałów Elektrycznych Szkół Wyższych, Warszawa, 1993, s. 24 – 38
19. Ciok Z.: Oddziaływanie biologiczne pól elektromagnetycznych. XXV Międzynarodowa Konferencja z Podstaw Elektrotechniki i Teorii Obwodów IC SPETO 2002, s. 3/a – h
20. Electromagnetic Software Solutions. [www.magsoft-flux.com](http://www.magsoft-flux.com)

21. Florkowska B., Furgał J., Nowak W., Włodek R.: Analiza stanu elektrycznego przestrzeni w otoczeniu linii przesyłowej wysokiego napięcia. *Archiwum Elektrotechniki*, T. XLII, z. 1, 1994, s. 87 – 99
22. Florkowska B., Furgał J., Nowak W., Włodek R.: Modelling of electric state in the space surrounding high voltage overhead lines. 9<sup>th</sup> International Symposium on High Voltage Engineering, Graz, August 1995, s. 8369/1 – 4
23. Furgał J., Włodek R.: Pola magnetyczne w otoczeniu linii napowietrznych wysokiego napięcia. IV Krajowa Konferencja Naukowo-Techniczna p.n.: Pola Elektromagnetyczne 50 Hz a Energetyka i Środowisko, Szczyrk, 1998, s. 83 – 93
24. Gajewski J., Groszko M.: Pomiary natężenia pola elektrycznego na modelu rozdzielni 400 kV. *Energetyka*, Nr 8, 1978, s. 333 – 336
25. Gochnio W., Mosiński F., Wira A.: Electric and magnetic field maximum values calculation and measurement for center region of Poland. 9<sup>th</sup> International Symposium on High Voltage Engineering, Graz, August 1995, s. 8367/1 – 3
26. Gutfleisch F., Singer H., Forger K., Gomollon J. A.: Calculation of high-voltage fields by means of the boundary element method. *IEEE Trans. on Power Delivery*, Vol. 9, No. 2, 1994, s. 743 – 749
27. Hameyer K., Belmans R., Hanitsch R.: Computation of the field quantities excited by high-voltage lines. *Conf. on the Computation of Electromagnetic Fields, Compumag'95*, Berlin, 1995, s. 460 – 461
28. Hameyer K., Belmans R.: Computation of the electric and magnetic field below high-voltage lines. 8<sup>th</sup> Int. Symp. on Theoretical Electrical Engineering, Thessaloniki Sept. 22–23, 1995, s. 278 – 281
29. Handke A.: Wyniki pomiarowej identyfikacji pól magnetycznych niskiej częstotliwości w otoczeniu wybranych urządzeń elektroenergetycznych. IV Krajowa Konferencja Naukowo-Techniczna p.n.: Pola Elektromagnetyczne 50 Hz a Energetyka i Środowisko, Szczyrk, 1998, s. 107 – 120
30. Huber C. J., Rieger W., Hass M., Rucker M.: A boundary element formulation using higher order curvilinear edge elements. *IEEE Trans. on Magnetics*. Vol. 34, No. 5, 1998, s. 2441-2444
31. Isaka K., Hayashi N., Yokoi Y., Okamoto M., Matsumoto T., Hammam S.: Characterisation of electric and magnetic field at ground level under EHV transmission lines. 7<sup>th</sup> International Symposium on High Voltage Engineering. Dresden, 1991, s. 51 – 54
32. Igarishi H., Mizuyama Y., Honma T.: A boundary element analysis of transmission line parameters using singular elements. *Conf. on the Computation of Electromagnetic Fields, Compumag'95*, Berlin, 1995, s. 458 – 459
33. Jackson J. D.: *Elektrodynamika klasyczna*. PWN, Warszawa, 1982
34. Kanayama H., Shioya R., Tagami D., Matsumoto S.: 3-D eddy current computation for transformer tank. *Compel*, Vol. 21, No 4, 2002, s. 554–562
35. Kasten D.G., Zang W., Addis G.I.: Calculation of the magnetic flux density in high voltage substations. 7<sup>th</sup> International Symposium on High Voltage Engineering, Dresden, August, 1991, s. 55 – 58
36. Kasten D.G., Sebo S.A., Caldecot R., Huang L., Campbell G.C.: Substation magnetic field measurements. 9<sup>th</sup> International Symposium on High Voltage Engineering, Graz, August, 1995, s. 8387/1 – 4

37. Katalog słupów i fundamentów linii 220 kV. Praca zbiorowa, BSiPE Energoprojekt Kraków S.A., Kraków, 1995
38. Katalog słupów i fundamentów linii 400 i 750 kV. Praca zbiorowa, BSiPE Energoprojekt Kraków S.A., Kraków, 1995
39. Knowlton A. E.: Standard Handbook for Electrical Engineers, McGraw-Hill B.C., New York, Toronto, London, 1949
40. Kost A.: Numerische Methoden in der Berechnung elektromagnetischer Felder, Springer-Verlag, Berlin, 1994
41. Kost A., Yuan J.: A three-component boundary element algorithm for three-dimensional eddy current calculation. IEEE Trans. on Magnetics, Vol. MAG-30, No. 5, 1994, s. 3028-3031
42. Krajewski W.: Analysis of electromagnetic shielding problems using the BEM. In: Electromagnetic Fields in Electrical Engineering. Plenum Press, New York, 1988
43. Krajewski W.: Application of the boundary element method to the analysis of electromagnetic shielding problems. Electrosoft, No. 1, 1990, s. 44 – 54
44. Krajewski W.: Computation of the turbogenerator end-region field using the BEM. Archiv für Elektrotechnik, No. 75, 1992, s. 173 – 178
45. Krajewski W., Salon S.J.: Comparison of the BEM and FEM approach for the electromagnetic field analysis in a zoned medium. Communications in Numerical Methods in Engineering, Vol 9, 1993, s. 847 – 856
46. Krajewski W., Różycki S., Sawicki D., Warynica J., Weselucha Z.: Pakiet oprogramowania LINIA do obliczania pola elektrycznego i magnetycznego w otoczeniu linii wysokiego napięcia. I Sympozjum Ochrona Środowiska w Dydaktyce Wydz. Elektrycznych Szkół Wyższych, Warszawa 8–9 grudnia 1993, s. 60 – 69
47. Krajewski W., Weselucha Z.: Zastosowanie metody elementów brzegowych do obliczania pola elektrycznego i magnetycznego w sąsiedztwie napowietrznych linii wysokiego napięcia. Prace Instytutu Elektrotechniki, z. 182, 1994, s. 111 – 132
48. Krajewski W.: Numeryczne modelowanie pola elektrycznego wytwarzanego przez linie wysokiego napięcia przebiegające przez obszary zabudowane. II Sympozjum Ochrona Środowiska w Dydaktyce Wydz. Elektrycznych Szkół Wyższych, Warszawa 6–8 grudnia 1995, s. 56 – 65
49. Krajewski W.: Boundary element approach to the electric and magnetic field analysis in the vicinity of HV transmission lines. Archiv für Elektrotechnik, Nr 6, 1995, s. 365 – 372
50. Krajewski W.: Zastosowanie MEB do analizy pola elektrycznego w otoczeniu napowietrznych linii wysokiego napięcia z uwzględnieniem wpływu obiektów fizycznych znajdujących się w ich sąsiedztwie. Prace Instytutu Elektrotechniki, z. 188, 1996, s. 19 – 35
51. Krajewski W.: Trójwymiarowa analiza pola elektrycznego w sąsiedztwie linii wysokiego napięcia. Przegląd Elektrotechniczny, Nr 1, 1997, s. 1 – 6
52. Krajewski W.: BEM analysis of electric field excited by overhead HV lines erected in built-up areas. IEE Proceedings – Science, Measurement & Technology, Vol. 144, Nr 2, 1997, s. 81 – 86
53. Krajewski W.: 3-D model of the electric field excited by overhead HV lines. Archiv für Elektrotechnik, Nr 1, 1998, s. 55 – 63

54. Krajewski W.: Numeryczne modelowanie pól elektrycznych i magnetycznych w sąsiedztwie obiektów elektroenergetycznych. Działalność Naukowa PAN – Wybrane Zagadnienia, Nr 6, 1998, s. 118 – 119
55. Krajewski W.: Obliczeniowe metody oceny natężeń pola elektromagnetycznego w otoczeniu urządzeń elektroenergetycznych. Wykład na Ogólnopolskim Kursie Techniczno-Szkoleniowym nt.: Wpływ pól elektromagnetycznych na organizmy żywe i elementy techniczne, Poznań – Kiekrz, 1998
56. Krajewski W. (współautor): Ocena oddziaływania na środowisko Elektrowni Bełchatów. Opracowanie PROEKO, Warszawa, 1998
57. Krajewski W., Weselucha Z.: Modelowanie pól: elektrycznego i magnetycznego w sąsiedztwie obiektów elektroenergetycznych. Prace Instytutu Elektrotechniki, z. 199, 1998, s. 86 – 107
58. Krajewski W.: Modelling of the electric field in the proximity of power engineering objects. Prace Instytutu Elektrotechniki, z. 206, 2000, s. 39 – 56
59. Krajewski W., Fotyma M.: Numeryczne modelowanie pola magnetycznego w sąsiedztwie obiektów elektroenergetycznych. II Krajowe Sympozjum Kompatybilność Elektromagnetyczna w Elektrotechnice i Elektronice, EMC'01, Łódź 2001, Zeszyty Naukowe Politechniki Łódzkiej, Nr 880, Elektryka, Zeszyt 96, 2001, s. 231 – 240
60. Krajewski W., Fotyma M.: Pomiarowa weryfikacja numerycznej analizy wybranego zagadnienia EMC niskiej częstotliwości. Prace Instytutu Elektrotechniki, z. 211, 2002, s. 111 – 125
61. Krajewski W., Weselucha Z.: Pakiet oprogramowania EMFA\_2003 do analizy pól elektrycznych i magnetycznych w sąsiedztwie obiektów elektroenergetycznych. III Krajowe Sympozjum Kompatybilność Elektromagnetyczna w Elektrotechnice i Elektronice EMC'03, Łódź 2003, Zeszyty Naukowe Politechniki Łódzkiej, Nr 927, Elektryka, Zeszyt 100, 2003, s. 87 – 96
62. Krajewski W., Weselucha Z.: Program EMFA\_2003 do analizy pól elektrycznych i magnetycznych w sąsiedztwie obiektów elektroenergetycznych. Elektro-Info, Nr 6, 2004, s. 75 – 76
63. Krajewski W.: Numerical modelling of the electric field in HV substations. IEE Proceedings – Science, Measurement & Technology, Vol. 151, No 4, 2004, s. 267 – 272
64. Krajewski W., Błażejczyk T.: Ocena oddziaływania pól: elektrycznego i magnetycznego od linii 110 kV na działce położonej przy ul. Kaczeńca 2/4 w Warszawie, Dokumentacja IEL, Warszawa 2004
65. Kurgan E.: Analiza pola magnetostatycznego w środowiskach niejednorodnych metodą elementów brzegowych. Uczelniane wydawnictwo Naukowo-Dydaktyczne AGH, Kraków, 1999
66. Laudyn D., Pawlik M., Strzelczyk F.: Elektrownie. WNT, Warszawa 1995
67. Leśniewska E.: Wpływ pola magnetycznego i elektrycznego pochodzącego od linii 110 kV na pracę sprzętu komputerowego w nastawni EC II. III Krajowe Sympozjum Kompatybilność Elektromagnetyczna w Elektrotechnice i Elektronice EMC'03, Łódź 2003, Zeszyty Naukowe Politechniki Łódzkiej, Nr 927, Elektryka, Zeszyt 100, 2003, s. 77 – 86
68. Liu Y., Bondeson A., Bergström R., Johnson C., Larson G., Samuelsson K.: Eddy-current computations using adaptive grids and edge elements. IEEE Trans. on Magnetics, Vol. 38, No 2, 2002, s. 449 – 452
69. Machado V. M.: Axisymmetric eddy current problems using a special hybrid FE/BE method. IEEE Trans. on Magnetics, Vol. 39, No. 3, 2003, s. 1432 – 1446

70. Mahdi A.B., Anis H.I.: Field exposure modelling using charge simulation. 5<sup>th</sup> International Symposium on High Voltage Engineering, Braunschweig, August, 1987, 3320/1 – 4
71. Maruti R., Srinivasa K. M., Kanyakumari M., Kumar E. M., Channakeshava D. R.: Electric and magnetic field around AC transmission lines and substations. Ninth International Symposium on High Voltage Engineering, Graz, 1995, 8350/1 – 4
72. Mayergoytz I. D.: Boundary integral equations of minimum order for the calculation of three dimensional eddy current problems. IEEE Trans on Magnetics, Vol. 17, No. 2, 1982, s. 536 – 539
73. Mayergoytz I. D.: 3-d eddy current problem and the boundary integral equation method. IMACS – Computational Electromagnetics, 1986, s. 161 – 171
74. Medina D. E., Lean M. H., Liggett J. A.: Boundary elements in zoned media: Direct and indirect methods. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 29, 1990, s. 1727 – 1735
75. Michelsson O., Uhlmann F. H.: On the use of the 3D  $\mathbf{H}\text{-}\varphi$  formulation for the forward solution for eddy current nondestructive testing. IEEE Trans. on Magnetics, Vol. 34, No 5, 1998, s. 2672 – 2675
76. Michelsson O., Uhlmann F. H.: A boundary–integral based forward solution for eddy current nondestructive testing. IEEE Trans. on Magnetics, Vol. 36, No 4, 2000, s. 756 – 759
77. Mosiński F., Wira A.: Ekologiczne problemy przesyłu i użytkowania energii elektrycznej. Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź, 1999
78. Myung H. S., Lee B. Y., Park J. K.: Three dimensional electric field analysis of substation using nonuniform optimal charge simulation. Ninth International Symposium on High Voltage Engineering, Graz, 1995, s. 8368/1 – 4
79. Nakata T., Takahashi N., Fujiwara K., Okada Y.: Improvements of the  $\mathbf{T}\text{-}\Omega$  method for 3-D eddy current analysis, IEEE Trans. on Magnetics, Vol. 24, No. 1, 1988, s. 94 – 97
80. Nartowski Z.: Stacje elektroenergetyczne. WNT, Warszawa 1984
81. Nowicz R.: Wpływ pola elektromagnetycznego na przekładnik prądowy. Krajowe Sympozjum Kompatybilność Elektromagnetyczna w Elektrotechnice i Elektronice, EMC'99, Łódź, 1999, Zeszyty Naukowe Politechniki Łódzkiej, Nr 818, Elektryka, Zeszyt 93, 1999, s. 129 – 138
82. Pawluk K.: Skalarny model całkowicie-brzegowy 3-wymiarowego pola magnetycznego. Prace IEL, z. 158, 1990, s. 5 – 41
83. Pawluk K., Kucharska M.: Boundary–integral methods of quasi–stationary field computation in electromagnetic screens. IEEE Trans. on Magnetics, Vol. 32, No. 3, 1996, s. 840 – 843
84. PN-E-05100-1. Elektroenergetyczne linie napowietrzne. Projektowanie i budowa. Wydanie marzec 1998
85. PN-EN 50082-1 Kompatybilność elektromagnetyczna. Wymagania ogólne dotyczące odporności na zakłócenia. Środowisko mieszkalne, handlowe i lekko przemysłowe. Wydanie grudzień, 1996
86. PN-EN 50082-2 Kompatybilność elektromagnetyczna. Wymagania ogólne dotyczące odporności na zaburzenia. Środowisko przemysłowe. Wydanie grudzień, 1997
87. Pogorzelski W.: Równania całkowite i ich zastosowanie T.1, PWN, Warszawa, 1953

88. Preis K., Bíró O., Tícar I.: Gauged current vector potential and reentrant corners in the FEM analysis of 3D eddy currents. *IEEE Trans. on Magnetics*, Vol. 36, No. 4, 2000, s. 840 – 843
89. Pre and post processor for 3D electromagnetic analysis. [www.vectorfields.com](http://www.vectorfields.com)
90. Rajchert R.: Wpływ obcych pól magnetycznych w układach silnoprądowych. II Krajowe Sympozjum Kompatybilność Elektromagnetyczna w Elektrotechnice i Elektronice, EMC'01, Łódź 2001, Zeszyty Naukowe Politechniki Łódzkiej, Nr 880, Elektryka, Zeszyt 96, 2001, s. 149 – 158
91. Ren Z., Razek A.: Comparison of some 3D eddy current formulations in dual systems. *IEEE Trans. on Magnetics*, Vol. 61, 2000, s. 751 – 755
92. Ren Z.:  $T$ - $\Omega$  formulation for eddy-current problems in multiply connected regions. *IEEE Trans. on Magnetics*, Vol. 38, No. 2, 2002, s. 557 – 560
93. Rozporządzenie Ministra Ochrony Środowiska, Zasobów Naturalnych i Leśnictwa z dnia 11 sierpnia 1998 r. w sprawie szczegółowych zasad ochrony przed promieniowaniem szkodliwym dla ludzi i środowiska, dopuszczalnych poziomów promieniowania, jakie mogą występować w środowisku oraz wymagań obowiązujących przy wykonywaniu pomiarów kontrolnych promieniowania. *Dz. U.*, Nr 107, poz. 676
94. Rozporządzenie Ministra Środowiska z dnia 30 października 2003 r. w sprawie dopuszczalnych poziomów pól elektromagnetycznych w środowisku oraz sposobów sprawdzania dotrzymania tych poziomów. *Dz. U.* 2003, Nr 192, poz. 1883
95. Rozporządzenie Ministra Pracy i Polityki Socjalnej z dnia 23 grudnia 1994 r. zmieniające rozporządzenie w sprawie najwyższych dopuszczalnych stężeń i natężeń czynników szkodliwych w środowisku pracy. *Dz. U.* 1995, Nr 3, poz. 16
96. Rozporządzenie Ministra Pracy i Polityki Społecznej z dnia 29 listopada 2002 r. w sprawie najwyższych dopuszczalnych natężeń czynników szkodliwych dla zdrowia w środowisku pracy. *Dz. U.* 2002, Nr 217, poz. 1833
97. Rozporządzenie Rady Ministrów z dnia 24 września 2002 r. w sprawie określenia rodzajów przedsięwzięć mogących znacząco oddziaływać na środowisko oraz szczegółowych kryteriów związanych z kwalifikowaniem przedsięwzięć do sporządzenia raportu o oddziaływaniu na środowisko. *Dz. U.* 2002, Nr 179, poz. 1490
98. Rozporządzenie Ministra Zdrowia z dnia 20 grudnia 2002 r. zmieniające rozporządzenia w sprawie badań i pomiarów czynników szkodliwych dla zdrowia w środowisku pracy. *Dz. U.* 2003, Nr 21, poz. 180
99. Rucker W. M., Richter K. R.: Calculation of two-dimensional eddy current problems with the boundary element method. *IEEE Trans. on Magnetics*, Vol. 19, No. 6, 1983, s. 2429 – 2432
100. Salon S. J., Schneider J. M.: A comparison of integral and finite element formulation of eddy-current problems. *IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems*, Vol. 100, No. 4, 1981, s. 1473-1479
101. Salon S.: The hybrid finite element – boundary element method in electromagnetics. *IEEE Trans on Magnetics*, Vol. 22, 1985, s. 1829 – 1834
102. Schneider J. M., Salon S. J.: A boundary integral formulation of eddy-current problem. *IEEE Trans. on Magnetics*, Vol. 16, No. 5, 1981, s. 1085 – 1088
103. Sebestyén I.: 'Electric-field calculation for HV insulators using domain decomposition method'. *IEEE Trans. on Magnetics*, Vol 38, No. 2, 2002, s. 1213 – 1216

104. Shen J., Andjelic Z., Schaub B.: A hybrid single and dual simple layer boundary integral equation formulation for 3-D eddy currents. *IEEE Trans. on Magnetics*, Vol. 34, No. 5, 1998, s. 2636 – 2639
105. Simulation software for calculating fields caused by power lines (EFC-400) and on transformer stations (EFC-400ST). [www.narda-sts.de](http://www.narda-sts.de)
106. Singer H., Steinbigler H., Weiss P.: A charge simulation method for the calculation of high voltage fields. *IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems*, Vol. 93, 1973, s. 1660 – 1668
107. Smirnow W. I.: *Matematyka wyższa*. PWN, Warszawa, 1967
108. Starzyński J., Wincenciak S., Korytkowski J.: Method of handling disconnected regions in FEM model of eddy current. *IEEE Trans. on Magnetics*, Vol. 34, No. 5, 1998, s. 2676 – 2679
109. Stoer J., Bulirsch T. R.: *Wstęp do analizy numerycznej*. PWN, Warszawa, 1987
110. Stratton A.: *Electromagnetic Theory*. International Series in Pure and Applied Physics. McGraw-Hill, New York London, 1941
111. Suffczyński M.: *Elektrodynamika*, PWN, Warszawa, 1980
112. Szuba M.: Ocena wpływu pól magnetycznych na modelowe struktury biologiczne. *Przegląd Elektrotechniczny*, Nr 9, 1992, s. 193 – 195
113. Szuba M.: Ograniczenia ekspozycji polami magnetycznymi wytwarzanymi przez linie przesyłowe wysokiego napięcia. *Przegląd Elektrotechniczny*, Nr 2, 1993, s. 25 – 28
114. Szuba M., Wandzel B.: Porównanie metod obliczania pola magnetycznego wokół linii wysokiego napięcia. IV Krajowa Konferencja Naukowo-Techniczna p.n.: Pola Elektromagnetyczne 50 Hz a Energetyka i Środowisko, Szczyrk, 1998, s. 225 – 234
115. Szuba M.: Oddziaływanie pól elektromagnetycznych na organizmy żywe. *Elektro-Info*, Nr 1/2, 2004, s. 60 – 65
116. Szuba M.: Ochrona środowiska przed oddziaływaniem pól elektromagnetycznych w procesie projektowania, budowy i eksploatacji elektroenergetycznych obiektów liniowych. *Elektro-Info*, Nr 10, 2004, s. 60 – 64
117. Szuba M.: Oddziaływanie na środowisko stacji elektroenergetycznych WN/ŚN i ŚN/nN. *Wiadomości Elektrotechniczne*, Nr 11, 2004, s. 27 – 35
118. Szpor S.: *Ochrona odgromowa*. WNT, Warszawa, 1973
119. Tang R., Hu Y., Liang Z., Xie D.: Computation of 3-D open boundary eddy-current fields in large transformers using  $T, \psi - \varphi_m$  method coupled with GTM. *IEEE Trans. on Magnetics*, Vol. 38, No. 2, 2002, s. 1257–1260
120. The Industry-Leading Three-Dimensional Simulation Software for Electromagnetic and Electromechanical Analysis. [www.ansoft.co.uk](http://www.ansoft.co.uk)
121. Turowski J.: *Elektrodynamika techniczna*. WNT, Warszawa 1968
122. Ustawa z dnia 27 kwietnia 2001 r. Prawo ochrony środowiska. *Dz. U.* 2001, Nr 62, poz. 627
123. Yuan J., Kost A.: A three-component boundary element algorithm for three-dimensional eddy current calculation. *IEEE Trans. on Magnetics*, Vol. 30, No. 5, 1994, s. 3028 – 3031

124. Wira A.: Program RPLN w dydaktyce i praktyce. I Symposium Ochrona Środowiska w Dydaktyce Wydz. Elektrycznych Szkół Wyższych, Warszawa, 8–9 grudnia 1993, s. 230 – 238
125. Wołkowiński K.: Uziemienia urządzeń elektroenergetycznych, WNT, Warszawa, 1967
126. Zarządzenie Ministra Górnictwa i Energetyki z dnia 28 stycznia 1985 r. w sprawie szczegółowych wytycznych projektowania i eksploatacji urządzeń elektroenergetycznych w zakresie ochrony ludzi i środowiska przed oddziaływaniem pola elektromagnetycznego. M.P. 1985, Nr 3, poz. 24
127. Zeńczak Z.: Analiza technicznych problemów związanych z dozymetrią pól elektromagnetycznych o częstotliwości przemysłowej. Prace Naukowe Politechniki Szczecińskiej. Nr 543, Instytut Elektrotechniki Nr 26, Szczecin 1998
128. Zienkiewicz O. C.: The Finite Element in Engineering Science. McGraw-Hill, New York, 1971
129. Zimny P. Application of the finite element method to calculation of electromagnetic field in a system of conductors. IEEE Trans. on Magnetics, Vol. 18, No. 2, 1982, s. 498 – 503
130. Zimny P, Jakubiuk K, Skiba A.: Calculation of the current density distributions in busbars. Prace Instytutu Elektrotechniki, z. 132, 1984, s. 53 – 69

*Rękopis dostarczono, dnia 21.12.2004 r.*

***Opiniowali: prof. dr hab. inż. Eugeniusz Kurgan  
prof. dr hab. inż. Jan Sikora***



BOUNDARY AND LINE ELEMENTS IN THE ANALYSIS OF  
SELECTED EMC PROBLEMS OF LOW FREQUENCY

Wojciech KRAJEWSKI

**ABSTRACT** *Power objects such as HV transmission lines, substations, power plants, and thermal-electric power stations generate in their surroundings electromagnetic fields of low frequency. These fields influence on living organisms and technical equipment. The strengths of the mentioned fields cannot exceed levels that are determined by ecological regulations and EMC standards. According to the above regulations these fields have to be estimated at the stage of object design. Appropriate computer programs are indispensable tools for this purpose.*

*In the monograph 3D physical models and corresponding boundary-integral formulations of the electric and magnetic fields of power frequency generated by power objects have been proposed. In these models the presence of typical objects that disturb the field distribution are taken into account. Among others the electric, magnetic, and electromagnetic shields are considered. The most appropriate, in author's opinion, numerical technique for the solution of considered problems has been here proposed. This technique combines the indirect version of the boundary element method and a certain variant of the charge simulation method that is here named the line element method.*

*The numerical algorithms and own computer programs based on the above-mentioned hybrid technique have been worked out. These programs are equipped with mesh generators of many objects such as HV tower trusses, transformer tanks, buildings, trees, etc.*

*Particularly worth to mention is the author's own program for 3D analysis of eddy-current problems. It is well known that the numerical evaluation of 3D eddy-current fields is the complex task requiring the large computer memory and great CPU efficiency. The above program based on so called  $\mathbf{H} - \psi$  field model enables to solve the electromagnetic shielding problems of complicated geometry.*

*The correctness of the both applied numerical algorithms and worked out computer programs has been experimentally corroborated in the laboratory as well as in and around real power objects.*

*The reported numerical procedures are successively implemented in the developed commercial software package EMFA for the assessment of electric and magnetic fields generated by power objects.*



**Dr inż. Wojciech Krajewski** w 1977 r. ukończył studia na Wydziale Elektrycznym Politechniki Warszawskiej w specjalności budowa maszyn i urządzeń. W roku 1984 na tym samym wydziale obronił z wyróżnieniem pracę doktorską pt.: „Analiza pola elektromagnetycznego i naprężeń w elementach metalowych kształtowanych impulsem magnetycznym”. Od 1981 r. pracuje w Instytucie Elektrotechniki (obecnie na stanowisku adiunkta), zajmując się zagadnieniami numerycznego modelowania pól elektromagnetycznych w maszynach i urządzeniach elektrycznych, a także od pewnego czasu problematyką pól w środowisku człowieka. W 1991 r. odbył dwumiesięczny staż naukowy w charakterze visiting scholar w Rensselaer Polytechnic Institute w Troy (USA). W tym samym roku powierzono mu organizację i przewodnictwo sesji na temat obliczania pól w elektrotechnice na Światowym Kongresie IMACS'91 (International Association for Mathematics and Computers in Simulation), który odbył się w Dublinie. Bierze udział w pracach International Electrotechnical Commission w charakterze eksperta z zakresu pól elektromagnetycznych (komisja TC 106). Jest autorem i współautorem programów komputerowych wdrożonych w przemyśle i ochronie środowiska. Jest również autorem i współautorem blisko czterdziestu publikacji w krajowych i zagranicznych czasopismach naukowych. Wymieniany jest w amerykańskich i brytyjskich wydawnictwach „Who is Who”. Należy do Stowarzyszenia Elektryków Polskich.