

Jan IWASZKIEWICZ

## MODEL MATEMATYCZNY PRZEKSZTAŁTNIKA TRÓJFAZOWEGO DLA PRZEBIEGÓW DYSKRETNYCH

**STRESZCZENIE** *Prezentowany model matematyczny przekształtnika został opracowany w celu przyśpieszenia badań symulacyjnych. Pozwala on określić zasadnicze właściwości falowników dwupoziomowych. Opisuje przekształtnik trójfazowy w dziedzinie czasu poprzez podanie postaci analitycznej przebiegów napięcia i prądu w układzie przekształtnik-obciążenie. Model jest przydatny do analizy stanów ustalonych oraz przejściowych przekształtników sterowanych cyfrowo, z wyłączeniem procesów komutacyjnych, a także do badań algorytmów sterujących pracujących w czasie rzeczywistym. Może być również stosowany do badania właściwości złożonych układów przekształtnikowych, składających się z dwu- i wielopoziomowych falowników napięcia lub prądu.*

### 1. WSTĘP

---

Uruchamianie nowych cyfrowych algorytmów sterowania przekształtników prądu przemiennego jest procesem wieloetapowym. Zwykle pierwszy etap polega na przeprowadzeniu badań symulacyjnych pracy przekształtnika sterowanego według opracowywanego algorytmu.

---

**dr inż. Jan IWASZKIEWICZ**  
e-mail: jan.iwaszkiewicz@iel.gda.pl  
Instytut Elektrotechniki Oddział w Gdańsku

Do tych badań wykorzystuje się znane programy symulacyjne takie jak *TCAD*, *MATLAB*, *PSPICE*. Rzeczywisty obiekt sterowany wraz z przekształtnikiem i układem sterującym jest przedstawiony w trakcie badań symulacyjnych jako obiekt wirtualny, opisany za pomocą zestawu równań matematycznych – modelu matematycznego.

Algorytm sterujący uzyskany w wyniku badań symulacyjnych zazwyczaj nie nadaje się do bezpośredniego przeniesienia do układu sterującego. Implementacja opracowanego algorytmu w sterowniku albo nie jest możliwa albo też algorytm przeniesiony do układu sterowania nie może pracować w czasie rzeczywistym i jest nieprzydatny do sterowania przekształtnika [1]. Przyczyna leży przeważnie w złożoności algorytmu. Użyteczny algorytm sterowania powstaje jako program napisany oddzielnie na podstawie analizy wyników badań symulacyjnych. Badania poprawności działania algorytmu prowadzone są już na obiekcie rzeczywistym, a na tym etapie wszelkie braki i błędy kodu sterującego mogą prowadzić do uszkodzenia przekształtnika.

Zaproponowany w pracy model matematyczny przekształtnika ułatwia szybkie przeprowadzenie badań symulacyjnych i uzyskanie efektywnego algorytmu, nadającego się do bezpośredniej implementacji.

Opisuje dwupoziomowe falowniki napięcia i prądu pracujące w układach bez przewodu zerowego, z obciążeniem połączonym w trójkąt lub w gwiazdę.

Umożliwia budowanie modeli przekształtników złożonych, składających się z dwóch lub więcej falowników dwupoziomowych takich jak np. przekształtnik *AC-DC-AC*. Może być wykorzystany do opisu falowników wielopoziomowych.

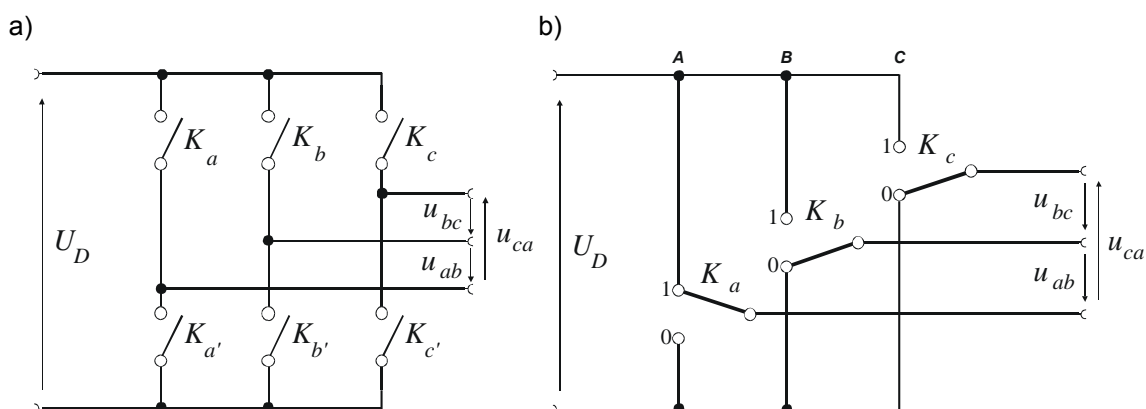
## 2. UKŁAD ZASTĘPCZY PRZEKSZTAŁTNIKA TRÓJFAZOWEGO

---

Trójfazowy przekształtnik stanowi strukturę złożoną z idealnych dwustanowych łączników półprzewodnikowych. Schemat zastępczy przekształtnika trójfazowego został przedstawiony na rys. 1. Składa się on z trzech gałęzi *A*, *B*, *C*, przypisanych poszczególnym fazom. Odpowiadające im wielkości i zmienne przyjmują oznaczenia: *a*, *b*, *c*. Zaprezentowano dwie wersje układu najczęściej spotykane w literaturze przedmiotu. Rysunek 1a) przedstawia układ złożony z sześciu łączników półprzewodnikowych:  $K_a, K_a', K_b, K_b', K_c, K_c'$ , a rys. 1b) – układ trzech łączników  $K_a, K_b, K_c$ . Obciążenie dołączone jest do trzech wyjść przekształtnika:  $W_{y_a}, W_{y_b}, W_{y_c}$ .

Struktura z sześcioma łącznikami odwzorowuje „fizykę” dwupoziomowego przekształtnika trójfazowego. Należy podkreślić, że tylko taka struktura pozwala określić wszystkie stany przekształtnika trójfazowego. Jednoczesne przewodzenie obu łączników w jednej gałęzi można określić jedynie za pomocą modelu z rys. 1a), jednakże prostszy w opisie model przedstawiony na rys. 1b) okazał się przydatny do analizy falowników napięcia i dzięki temu znalazł powszechne zastosowanie.

W pracy przyjęto, że stany łączników opisane są za pomocą liczb 0 lub 1. Zero oznacza stan wyłączenia, a „jedynek” stan załączenia (przewodzenia) łącznika. Jeżeli przyjmie się, że symbole wyróżniające poszczególne łączniki:  $a$ ,  $a'$ ,  $b$ ,  $b'$ ,  $c$ ,  $c'$  mogą przyjmować wartości 0 albo 1, to stan całego przekształtnika można opisać, w zależności od modelu, za pomocą liczb binarnych  $aa'bb'cc'$  lub  $abc$ . Model 1a) opisuje liczbą sześciobitową podczas gdy do opisu stanu przekształtnika według modelu 1b) wystarcza liczba zawierająca trzy bity. Teoretycznie za pomocą liczby  $aa'bb'cc'$  można opisać 64 stany, ale w praktyce wiele z nich odpowiadałoby stanom awaryjnym lub takim, których zastosowanie nie byłoby racjonalne. Tym niemniej stan opisany np. liczbą  $(111111)_{63}^{1)}$  oznaczałby albo zwarcie wszystkich gałęzi falownika napięcia, co w praktyce inżynierskiej się zdarza, albo też załączenie wszystkich łączników w falowniku prądu, co oznaczałoby załączenie wektora zerowego. W tym ostatnim wypadku stosuje się załączenie obu łączników w jednej tylko gałęzi falownika. Możliwe są tu trzy stany przekształtnika opisane liczbami:  $(110000)_{48}$ ,  $(001100)_{12}$  i  $(000011)_{3}$ . Również stan  $(000000)_0$ , ma konkretne odniesienie i oznacza przekształtnik, którego wszystkie łączniki nie zostały jeszcze wysterowane lub zostały wyłączone, mimo że obwód pośredniczący znajduje się pod napięciem.



**Rys. 1. Najbardziej rozpowszechnione schematy zastępcze przekształtnika:**  
a) model z sześcioma łącznikami dwustanowymi, b) model z trzema łącznikami.

<sup>1)</sup> W indeksie podano wartość liczby w systemie dziesiętnym.

Model 1b), jak już powiedziano, nie nadaje się do analizy falowników prądu. Jego ogromną zaletą jest fakt, że do opisu stanu przekształtnika wystarcza liczba  $abc$ , zawierająca trzy bity i pozwalająca opisać osiem stanów przekształtnika: sześć stanów opisanych liczbami od  $(001)_1$  do  $(110)_6$  – noszących nazwę wektorów aktywnych oraz dwa  $(111)_7$  i  $(000)_0$ , określane jako wektory zerowe. Zgodnie z przyjętymi oznaczeniami wektory zerowe odpowiadają połączeniu wszystkich trzech faz do jednej szyny obwodu pośredniczącego.

W rozdziałach 3...8 opisano kolejno modele matematyczne falowników napięcia i prądu. Dla wszystkich rozpatrywanych modeli obowiązują następujące założenia: kierunki prądów i napięć zaznaczone na rysunkach przyjmuje się jako dodatnie, a łączniki półprzewodnikowe przedstawione są jako dwustanowe bezstratne łączniki, o zerowym czasie załączania i wyłączania.

### 3. OPIS FALOWNIKA NAPIĘCIA W DZIEDZINIE CZASU

Do opisu modeli matematycznych falowników napięcia wykorzystano model przekształtnika według rys. 1b). Liczbie binarnej  $abc$ , określającej stany poszczególnych łączników przekształtnika, przypisuje się liczbę dziesiętną  $k = (abc)$ . Przyjmuje ona wartości od 0 do 7 i wyróżnia kolejne stany napięciowe zacisków wyjściowych falownika. Stan napięciowy  $k$  na wyjściu falownika jest określony przez parę napięć międzyfazowych ( $u_{abk}$ ,  $u_{bck}$ ) i nazwany wektorem napięcia wyjściowego falownika  $\vec{V}_k^t$ . W związku z tym wektor napięcia falownika jest określony z definicji

$$\vec{V}_k^t = \{u_{abk}, u_{bck}\} \quad \text{dla} \quad k = 0, 1, \dots, 7 \quad (1)$$

w której napięcia międzyfazowe  $u_{abk}$ ,  $u_{bck}$  przyjmują wartości podane w tab.1. Definicja ma zastosowanie w dziedzinie czasu<sup>1)</sup>.

**TABELA 1**

Napięcie międzyfazowe  $u_{abk}$  i  $u_{bck}$  dla poszczególnych wektorów falownika.

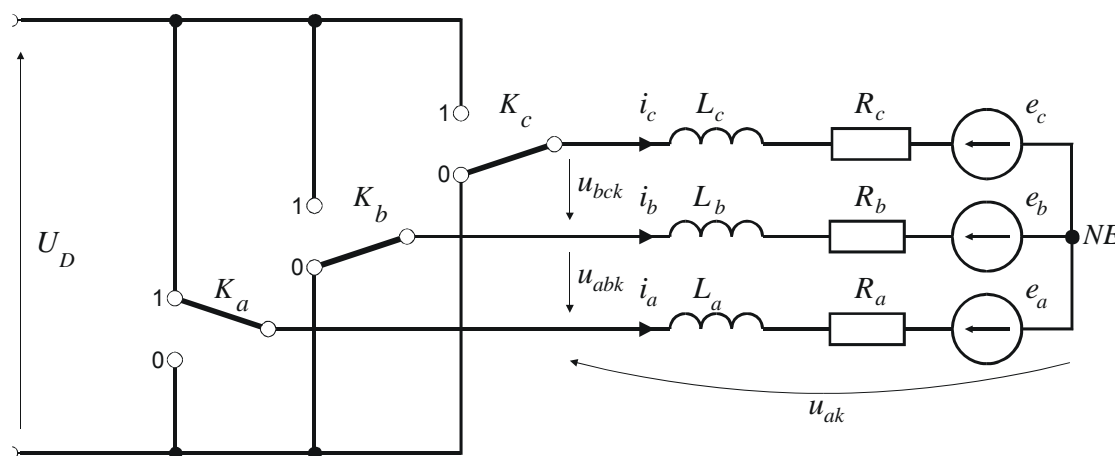
$\vec{V}_k^t$	$\vec{V}_0^t$	$\vec{V}_1^t$	$\vec{V}_2^t$	$\vec{V}_3^t$	$\vec{V}_4^t$	$\vec{V}_5^t$	$\vec{V}_6^t$	$\vec{V}_7^t$
$u_{abk}$	0	0	$-U_D$	$-U_D$	$U_D$	$U_D$	0	0
$u_{bck}$	0	$-U_D$	$U_D$	0	0	$-U_D$	$U_D$	0
$u_{cak}$	0	$U_D$	0	$U_D$	$-U_D$	0	$-U_D$	0

<sup>1)</sup> Zdefiniowany wektor napięcia służy do analizy w dziedzinie czasu i nie może być utożsamiany z wektorem przestrzennym napięcia określonym na płaszczyźnie zespolonej ( $\alpha$ ,  $\beta$ ). Dla podkreślenia tego faktu wprowadzono do oznaczenia górny indeks  $t$ .

## 4. FALOWNIK NAPIĘCIA Z OBCIĄŻENIEM POŁĄCZONYM W GWIAZDĘ

### 4.1. Układ zastępczy

Układ zastępczy przekształtnika trójfazowego wraz z obciążeniem przedstawiono na rys. 2. Trzy dwustanowe łączniki  $K_a$ ,  $K_b$ ,  $K_c$  przełączają napięcie obwodu pośredniczącego  $U_D$  do obciążenia, które składa się z trzech dwójników fazowych połączonych w gwiazdę. Każdy dwójnik stanowi obwód  $R_f$ ,  $L_f$ ,  $e_f$ . Przyjęto założenie, że w obwodzie pośredniczącym znajduje się idealne źródło napięcia stałego  $U_D$ , a obciążenia fazowe są symetryczne<sup>1)</sup>. Taki przekształtnik nosi nazwę falownika napięcia (trójfazowego przekształtnika mostkowego).



Rys. 2. Układ zastępczy falownika napięcia z obciążeniem  $R$ ,  $L$ ,  $e_f$  połączonym w gwiazdę<sup>2)</sup>

Dla dowolnego wektora  $\vec{V}_k^t$ , załączonego w chwili  $t = T_n$ , rozpatrywany model przekształtnika trójfazowego sprowadza się do zastępczego obwodu dwuoczkowego, opisanego przez układ równań:

- 1) Rezystancje i indukcyjności są równe, a siły elektromotoryczne  $e_f$  przyjmują w poszczególnych fazach wartości podane we wzorach (5).
- 2) W dalszej części pracy układ zastępczy przekształtnika wraz z obciążeniem  $R$ ,  $L$ ,  $e_f$  będzie nazywany w skrócie modelem przekształtnika.

$$\left. \begin{aligned} u_{ab_k} &= R_a \cdot i_1(t) + L_a \frac{di_1(t)}{dt} + e_a(t) - e_b(t) + L_b \frac{d[i_1(t) - i_2(t)]}{dt} + R_b [i_1(t) - i_2(t)] \\ u_{bc_k} &= R_b [i_2(t) - i_1(t)] + L_b \frac{d[i_2(t) - i_1(t)]}{dt} + e_b(t) - e_c(t) + L_c \frac{di_2(t)}{dt} + R_c i_2(t) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Jeżeli rozpatrzy się przedział czasowy  $T_n \leq t \leq T_{n+1}$  między kolejnymi załączeniami wektorów  $\vec{V}_{k(n)}^t$  i  $\vec{V}_{k(n+1)}^t$ , oraz założy, że w czasie działania wybranego wektora  $\vec{V}_k^t$  siły elektromotoryczne  $e_a$ ,  $e_b$  i  $e_c$  mają wartość stałą i są równe odpowiednio  $E_a$ ,  $E_b$  i  $E_c$ , to rozwiązując układ równań (2) otrzymuje się wyrażenia na przebiegi czasowe prądów fazowych:

$$\begin{bmatrix} i_a(t) \\ i_b(t) \\ i_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{ak} - E_a \\ U_{bk} - E_b \\ U_{ck} - E_c \end{bmatrix} \frac{(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})}{R} + \begin{bmatrix} I_{0a} \\ I_{0b} \\ I_{0c} \end{bmatrix} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad T_n \leq t \leq T_{n+1} \quad (3)$$

Jeżeli falownik napięcia jest sterowany prądowo, to przedział czasowy  $T_n \leq t \leq T_{n+1}$  nie jest stały, a zakres jego zmienności zależy od parametrów badanego algorytmu – na przykład od szerokości histerezy w tzw. algorytmach histerezowych. Algorytmy napięciowe, w których parametry modulacji szerokości impulsów (*PWM*) są określone przez przebieg fali nośnej, charakteryzują się przeważnie stałym czasem załączania poszczególnych wektorów  $T = T_{n+1} - T_n$ <sup>1)</sup>.

Fazowe napięcia wyjściowe przekształtnika dla poszczególnych wektorów  $\vec{V}_k^t$  podano w tab.2.

**TABELA 2**

Napięcia wyjściowe przekształtnika dla poszczególnych wektorów  $\vec{V}_k^t$ .

$\vec{V}_k^t$	$\vec{V}_0^t$	$\vec{V}_1^t$	$\vec{V}_2^t$	$\vec{V}_3^t$	$\vec{V}_4^t$	$\vec{V}_5^t$	$\vec{V}_6^t$	$\vec{V}_7^t$
$U_{ak}$	0	$-\frac{1}{3}U_D$	$-\frac{1}{3}U_D$	$-\frac{2}{3}U_D$	$\frac{2}{3}U_D$	$\frac{1}{3}U_D$	$\frac{1}{3}U_D$	0
$U_{bk}$	0	$-\frac{1}{3}U_D$	$\frac{2}{3}U_D$	$\frac{1}{3}U_D$	$-\frac{1}{3}U_D$	$-\frac{2}{3}U_D$	$\frac{1}{3}U_D$	0
$U_{ck}$	0	$\frac{2}{3}U_D$	$-\frac{1}{3}U_D$	$\frac{1}{3}U_D$	$-\frac{1}{3}U_D$	$\frac{1}{3}U_D$	$-\frac{2}{3}U_D$	0

<sup>1)</sup> W algorytmach napięciowych PWM spotyka się rozwiązania, w których zmienia się parametry fali nośnej w celu wyeliminowania uciążliwego dźwięczenia.

Prądy początkowe  $I_{0a}, I_{0b}, I_{0c}$  są to prądy fazowe w chwili  $t = T_n$ :

$$I_{0a} = i_a(T_n), \quad I_{0b} = i_b(T_n), \quad I_{0c} = i_c(T_n) \quad (4)$$

a siły elektromotoryczne mają wartość (patrz odsyłacz 5):

$$E_a = E_m \sin(\omega T_n + \phi_0), \quad E_b = E_m \sin(\omega T_n - \frac{2\pi}{3} + \phi_0), \quad E_c = E_m \sin(\omega T_n + \frac{2\pi}{3} + \phi_0) \quad (5)$$

Kąt  $\phi_0$  oznacza kąt przesunięcia fazowego między prądem a siłą elektromotoryczną w danej fazie,  $E_m$  – amplitudę przebiegu fazowej siły elektromotorycznej.

Wyrażenia opisujące prądy fazowe stanowią podstawę, właściwej dla cyfrowych systemów sterowania, rekurencyjnej procedury wyznaczania przebiegów prądów fazowych modelu przekształtnika. Zostały one wykorzystane w programie SYMUL do przeprowadzania badań właściwości przekształtników.

## 4.2. Prąd obwodu pośredniczącego

Prąd  $i_D$  płynący w obwodzie pośredniczącym przekształtnika równy jest prądowi obciążenia fazowego, na którym występuje napięcie  $\left| \frac{2}{3} U_D \right|$ . Wartość prądu  $i_D$  dla poszczególnych wektorów napięcia falownika podano w tab.3.

**TABELA 3**

Prąd obwodu pośredniczącego dla poszczególnych wektorów napięć.

$\vec{V}_k^t$	$\vec{V}_0^t$	$\vec{V}_1^t$	$\vec{V}_2^t$	$\vec{V}_3^t$	$\vec{V}_4^t$	$\vec{V}_5^t$	$\vec{V}_6^t$	$\vec{V}_7^t$
$i_D$	0	$i_c$	$i_b$	$-i_a$	$i_a$	$-i_b$	$-i_c$	0

## 4.3. Zunifikowany model falownika napięcia z obciążeniem połączonym w gwiazdę (MFNG)

Do opisu modelu *MFNG* potrzebna jest znajomość napięcia obwodu pośredniczącego, wybranego wektora napięcia, czasu i chwili jego załączenia oraz parametrów obciążenia. W nawiasie klamrowym zawarto wszystkie niez-

będne zmienne niezależne. Wprowadzono oznaczenie  $Z_f$  dla szeregowego połączenia rezystancji i indukcyjności fazowej.

$$MFNG \left\{ U_D, \vec{V}_k^t, Z_f, E_f, T_n \leq t \leq T_{n+1} \right\} \quad (6)$$

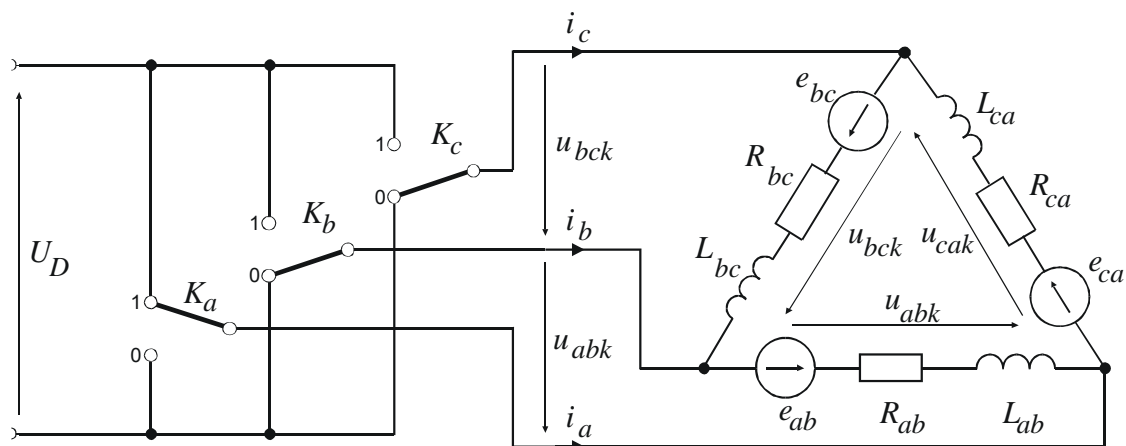
Pozostałe ważne dla opisu wielkości fizyczne wyznacza się w następujący sposób:

- prądy fazowe  $i_a(t), i_b(t), i_c(t)$  z równania (3),
- prądy początkowe  $I_{0a}, I_{0b}, I_{0c}$  z równań (4),
- napięcia międzyfazowe z tab.1,
- napięcia fazowe z tab.2,
- prąd obwodu pośredniczącego z tab.3.

## 5. FALOWNIK NAPIĘCIA Z OBCIĄŻENIEM POŁĄCZONYM W TRÓJKĄT

### 5.1. Układ zastępczy

Jeżeli obciążenie falownika napięcia stanowią trzy dwójniki  $Z_f, e_f$ , połączone w trójkąt, to model przekształtnika można sprowadzić do układu zastępczego przedstawionego na rys. 3.



Rys. 3. Schemat połączeń obciążeń fazowych do napięć wyjściowych  $u_{abk}$ ,  $u_{bck}$ ,  $u_{cak}$  przekształtnika – połączenie w trójkąt



Dla dowolnego wektora  $\vec{V}_k^t$ , załączonego w chwili  $t = T_n$ , model przekształtnika trójfazowego sprowadza się do obwodu zastępczego, opisanego przez układ równań:

$$\left. \begin{aligned} u_{ab_k} &= R_{ab} \cdot i_{ab}(t) + L_{ab} \frac{di_{ab}(t)}{dt} + e_{ab}(t) \\ u_{bc_k} &= R_{bc} \cdot i_{bc}(t) + L_{bc} \frac{di_{bc}(t)}{dt} + e_{bc}(t) \\ u_{ca_k} &= R_{ca} \cdot i_{ca}(t) + L_{ca} \frac{di_{ca}(t)}{dt} + e_{ca}(t) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Przy założeniu, że w czasie działania wybranego wektora  $\vec{V}_k^t$  siły elektromotoryczne  $e_{ab}$ ,  $e_{bc}$  i  $e_{ca}$  mają wartość stałą i są równe odpowiednio  $E_{ab}$ ,  $E_{bc}$  i  $E_{ca}$ , to po rozwiązaniu równań (7) otrzymuje się wyrażenia na przebiegi czasowe prądów płynących przez obciążenia międzyfazowe. Przyjmują one postać:

$$\begin{bmatrix} i_{ab}(t) \\ i_{bc}(t) \\ i_{ca}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{abk} - E_{ab} \\ U_{bck} - E_{bc} \\ U_{cak} - E_{ca} \end{bmatrix} \frac{(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})}{R} + \begin{bmatrix} I_{0ab} \\ I_{0bc} \\ I_{0ca} \end{bmatrix} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{dla } T_n \leq t \leq T_{n+1} \quad (8)$$

i obowiązują w podanym przedziale czasowym, pomiędzy kolejnymi załączeniami wektorów  $\vec{V}_{k(n)}^t$  i  $\vec{V}_{k(n+1)}^t$ . Napięcia międzyfazowe przekształtnika, dla poszczególnych wektorów  $\vec{V}_k^t$ , podano w tab.1. Prądy początkowe  $I_{0ab}$ ,  $I_{0bc}$ ,  $I_{0ca}$  odpowiadają wartościom prądów płynących przez obciążenia w chwili  $t = T_n$ , a siły elektromotoryczne w rozważanym przedziale czasowym mają wartość określoną przez wyrażenia:

$$E_{ab} = E_m \sin(\omega T_n + \phi_1), E_{bc} = E_m \sin(\omega T_n - \frac{2\pi}{3} + \phi_1), E_{ca} = E_m \sin(\omega T_n + \frac{2\pi}{3} + \phi_1) \quad (9)$$

przy czym kąt  $\phi_1$  określa przesunięcie fazowe między prądem, a siłą elektromotoryczną w dowolnej gałęzi obciążenia, a  $E_m$  – amplitudę przebiegu międzyfazowej siły elektromotorycznej.

Prądy fazowe oblicza się z zależności

$$\begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{ab} - i_{ca} \\ i_{bc} - i_{ab} \\ i_{ca} - i_{bc} \end{bmatrix} \quad (10)$$

## 5.2. Prąd obwodu pośredniczącego

Wartości prądu obwodu pośredniczącego  $i_D$  dla poszczególnych wektorów napięcia falownika została podana w tab.4.

**TABELA 4**

Prąd obwodu pośredniczącego dla poszczególnych wektorów napięć.

$\vec{V}_k^t$	$\vec{V}_0^t$	$\vec{V}_1^t$	$\vec{V}_2^t$	$\vec{V}_3^t$	$\vec{V}_4^t$	$\vec{V}_5^t$	$\vec{V}_6^t$	$\vec{V}_7^t$
$i_D$	0	$i_{ca} - i_{bc}$	$i_{bc} - i_{ab}$	$i_{ca} - i_{ab}$	$i_{ab} - i_{ca}$	$i_{ab} - i_{bc}$	$i_{bc} - i_{ca}$	0

## 5.3. Zunifikowany model falownika napięcia z obciążeniem połączonym w trójkąt (*MFNT*)

Do opisu modelu *MFNT* potrzebna jest znajomość napięcia obwodu pośredniczącego, wybranego wektora napięcia, czasu i chwili jego załączenia oraz parametrów obciążenia. W nawiasie klamrowym zawarto wszystkie niezbędne zmienne niezależne. Wprowadzono oznaczenie  $Z_{ff}$  i  $E_{ff}$  dla podkreślenia faktu, że dwójnik  $Z_{ff} - E_{ff}$  włączony jest pomiędzy fazami.

$$MFNT \left\{ U_D, \vec{V}_k^t, Z_{ff}, E_{ff}, T_n \leq t \leq T_{n+1} \right\} \quad (11)$$

Pozostałe ważne dla opisu parametry wyznacza się w następujący sposób:

- prądy międzyfazowe  $i_{ab}(t), i_{bc}(t), i_{ca}(t)$  z równań (8),
- prądy początkowe  $I_{0ab}, I_{0bc}, I_{0ca}$  są odpowiednio równe:  
 $i_{ab}(T_n), i_{bc}(T_n), i_{ca}(T_n),$
- prądy fazowe  $i_a(t), i_b(t), i_c(t)$  z równania (10),
- napięcia międzyfazowe z tab.1,
- prąd obwodu pośredniczącego z tab.4.

## 6. OPIS FALOWNIKA PRĄDU W DZIEDZINIE CZASU

Do opisu modeli matematycznych falowników prądu zastosowano model przekształtnika zgodnie z rys. 1a). Stan pracy przekształtnika, jak powiedziano w rozdz.2, opisany jest za pomocą sześciobitowej liczby binarnej  $aa'bb'cc'$ .

Liczbom binarnym  $aa'bb'cc'$  odpowiadają liczby dziesiętne  $k = (aa'bb'cc')$  (0 do 63). Wyróżniają one kolejne stany prądowe w poszczególnych fazach falownika prądu, nazywane wektorami prądu wyjściowego falownika i oznaczone symbolem  $\vec{I}_k^t$ . Wektor prądu falownika określony jest z definicji:

$$\vec{I}_k^t = \{i_{ak}, i_{bk}, i_{ck}\} \quad \text{dla} \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, 63 \quad (12)$$

w której prądy fazowe  $i_{fk}$  przyjmują wartości podane w tab.5.

**TABELA 5**

Prądy fazowe  $i_{ak}, i_{bk}, i_{ck}$  dla poszczególnych wektorów falownika prądu.

$\vec{I}_k^t$	$\vec{I}_3^t$	$\vec{I}_{12}^t$	$\vec{I}_{48}^t$	$\vec{I}_6^t$	$\vec{I}_9^t$	$\vec{I}_{18}^t$	$\vec{I}_{24}^t$	$\vec{I}_{33}^t$	$\vec{I}_{36}^t$
$i_{ak}$	0	0	0	0	0	$-I_D$	$-I_D$	$I_D$	$I_D$
$i_{bk}$	0	0	0	$-I_D$	$I_D$	0	$I_D$	0	$-I_D$
$i_{ck}$	0	0	0	$I_D$	$-I_D$	$I_D$	0	$-I_D$	0

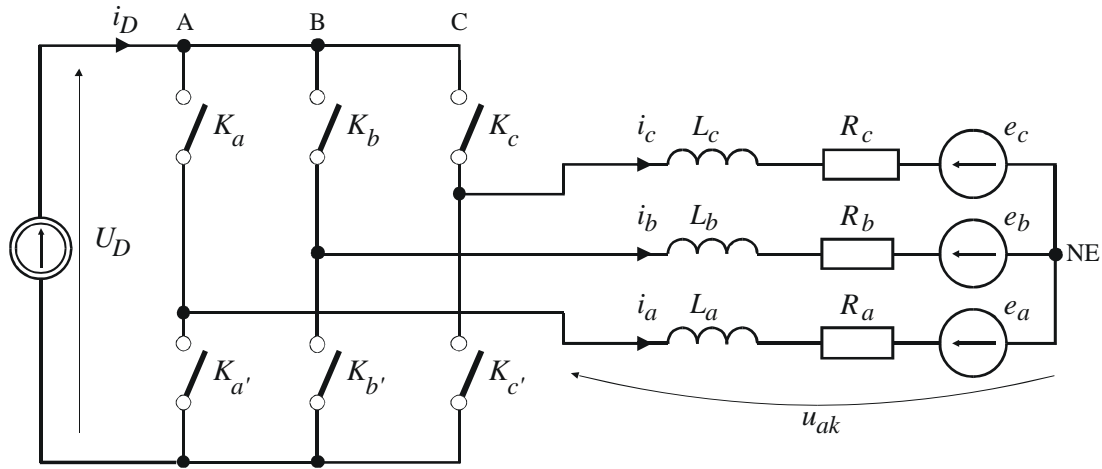
W tabeli 5 podano tylko takie wektory aktywne i zerowe ( $k = 3, 6, 9, 12, 18, 24, 33, 36, 48$ ) które występują w stanach normalnej, bezawaryjnej pracy przekształtnika prądu.

Analogicznie do definicji wektora napięcia, wprowadzona definicja wektora prądu ma zastosowanie w dziedzinie czasu.

## 7. FALOWNIK PRĄDU Z OBCIĄŻENIEM POŁĄCZONYM W GWIAZDĘ

### 7.1. Układ zastępczy

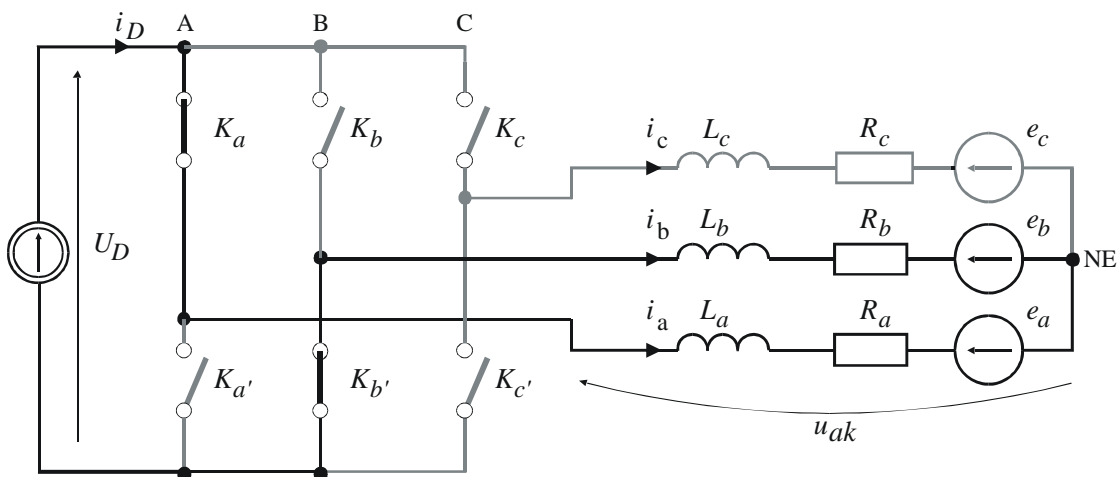
Układ zastępczy przekształtnika trójfazowego przedstawiono na rys. 4. Parametrem wyróżniającym przekształtnik jest stała wartość prądu obwodu pośredniczącego. Nosi on nazwę falownika prądu. Rozpatrywany jest falownik, którego obciążenie połączono w gwiazdę.



Rys. 4. Model falownika prądu wraz z obciążeniem  $R, L, SEM$

Łączniki  $K_a, K_{a'}, K_b, K_{b'}, K_c, K_{c'}$ , w zależności od wybranego wektora prądu, przełączają prąd obwodu pośredniczącego  $I_D$  do wybranych gałęzi obciążenia. Przyjęto założenie, że w obwodzie pośredniczącym znajduje się idealne źródło prądu stałego  $I_D$ , a obciążenia fazowe są symetryczne<sup>1)</sup>.

Dla dowolnego wektora prądu  $\vec{I}_k^t$ , załączonego w chwili  $t = T_n$ , model przekształtnika trójfazowego sprowadza się do jednooczkowego obwodu zastępczego. Na rysunku 5 przedstawiono przykład obwodu powstającego po załączeniu wektora  $\vec{I}_{36}^t$ .



Rys. 5. Obwód zastępczy falownika prądu po załączeniu wektora  $\vec{I}_{36}^t$

<sup>1)</sup> Impedancje fazowe są równe, a siły elektromotoryczne określa wzór (5).

Napięcia fazowe dane są równaniami:

$$\left. \begin{aligned} u_{a_k} &= R_a \cdot I_D + L_a \frac{dI_D}{dt} + e_a(t) \quad \text{dla } k = 33,36 \\ u_{a_k} &= -R_a \cdot I_D - L_a \frac{dI_D}{dt} + e_a(t) \quad \text{dla } k = 18,24 \\ u_{a_k} &= e_a(t) \quad \text{dla } k = 6,9 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} u_{b_k} &= R_b \cdot I_D + L_b \frac{dI_D}{dt} + e_b(t) \quad \text{dla } k = 9,24 \\ u_{b_k} &= -R_b \cdot I_D - L_b \frac{dI_D}{dt} + e_b(t) \quad \text{dla } k = 6,36 \\ u_{b_k} &= e_b(t) \quad \text{dla } k = 18,33 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} u_{c_k} &= R_c \cdot I_D + L_c \frac{dI_D}{dt} + e_c(t) \quad \text{dla } k = 6,18 \\ u_{c_k} &= -R_c \cdot I_D - L_c \frac{dI_D}{dt} + e_c(t) \quad \text{dla } k = 9,33 \\ u_{c_k} &= e_c(t) \quad \text{dla } k = 24,36 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

W modelu idealnym czasy załączania i wyłączenia są równe  $t_{on} = 0$  i  $t_{off} = 0$ . Oznacza to, że w rozwiązaniach równań (13, 14, 15) pojawia się funkcja  $\delta(t)$ <sup>1)</sup>, a wyrażenia określające napięcia fazowe przyjmują postać:

Faza *a*:

$$\left. \begin{aligned} u_{a_k}(t) &= R_a \cdot I_D + \eta \cdot \delta(t - T_n) + e_a(T_n) \quad \text{dla } k = 33,36 \\ u_{a_k} &= -R_a \cdot I_D - \eta \cdot \delta(t - T_n) + e_a(T_n) \quad \text{dla } k = 18,24 \\ u_{a_k} &= e_a(T_n) \quad \text{dla } k = 6,9 \end{aligned} \right\} \quad t = T_n \quad (16)$$

<sup>1)</sup>  $\delta(t)$  – funkcja delta Diraca.

$$\left. \begin{aligned} u_{a_k}(t) &= R_a \cdot I_D + e_a(t) \quad \text{dla } k = 33,36 \\ u_{a_k} &= -R_a \cdot I_D + e_a(t) \quad \text{dla } k = 18,24 \\ u_{a_k} &= e_a(t) \quad \text{dla } k = 6,9 \end{aligned} \right\} T_n < t < T_{n+1} \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} u_{a_k}(t) &= R_a \cdot I_D - \eta \cdot \delta(t - T_{n+1}) + e_a(T_{n+1}) \quad \text{dla } k = 33,36 \\ u_{a_k} &= -R_a \cdot I_D + \eta \cdot \delta(t - T_{n+1}) + e_a(T_{n+1}) \quad \text{dla } k = 18,24 \\ u_{a_k} &= e_a(T_{n+1}) \quad \text{dla } k = 6,9 \end{aligned} \right\} t = T_{n+1} \quad (18)$$

Faza b:

$$\left. \begin{aligned} u_{b_k}(t) &= R_b \cdot I_D + \eta \cdot \delta(t - T_n) + e_b(T_n) \quad \text{dla } k = 9,24 \\ u_{b_k} &= -R_b \cdot I_D - \eta \cdot \delta(t - T_n) + e_b(T_n) \quad \text{dla } k = 6,36 \\ u_{b_k} &= e_b(T_n) \quad \text{dla } k = 18,33 \end{aligned} \right\} t = T_n \quad (19)$$

$$\left. \begin{aligned} u_{b_k}(t) &= R_b \cdot I_D + e_b(T_n) \quad \text{dla } k = 9,24 \\ u_{b_k} &= -R_b \cdot I_D + e_b(T_n) \quad \text{dla } k = 6,36 \\ u_{b_k} &= e_b(T_n) \quad \text{dla } k = 18,33 \end{aligned} \right\} T_n < t < T_{n+1} \quad (20)$$

$$\left. \begin{aligned} u_{b_k}(t) &= R_b \cdot I_D - \eta \cdot \delta(t - T_{n+1}) + e_b(T_{n+1}) \quad \text{dla } k = 9,24 \\ u_{b_k} &= -R_b \cdot I_D + \eta \cdot \delta(t - T_{n+1}) + e_b(T_{n+1}) \quad \text{dla } k = 6,36 \\ u_{b_k} &= e_b(T_{n+1}) \quad \text{dla } k = 18,33 \end{aligned} \right\} t = T_{n+1} \quad (21)$$

Faza c:

$$\left. \begin{aligned} u_{c_k}(t) &= R_c \cdot I_D + \eta \cdot \delta(t - T_n) + e_c(T_n) \quad \text{dla } k = 6,18 \\ u_{c_k} &= -R_c \cdot I_D - \eta \cdot \delta(t - T_n) + e_c(T_n) \quad \text{dla } k = 9,33 \\ u_{c_k} &= e_c(T_n) \quad \text{dla } k = 24,36 \end{aligned} \right\} t = T_n \quad (22)$$

$$\left. \begin{aligned} u_{c_k}(t) &= R_c \cdot I_D + e_c(T_n) \quad \text{dla } k = 6,18 \\ u_{c_k} &= -R_c \cdot I_D + e_c(T_n) \quad \text{dla } k = 9,33 \\ u_{c_k} &= e_c(T_n) \quad \text{dla } k = 24,36 \end{aligned} \right\} T_n < t < T_{n+1} \quad (23)$$

$$\left. \begin{aligned} u_{c_k}(t) &= R_c \cdot I_D - \eta \cdot \delta(t - T_{n+1}) + e_c(T_{n+1}) \quad \text{dla } k = 6,18 \\ u_{c_k} &= -R_c \cdot I_D + \eta \cdot \delta(t - T_{n+1}) + e_c(T_{n+1}) \quad \text{dla } k = 9,33 \\ u_{c_k} &= e_c(T_{n+1}) \quad \text{dla } k = 24,36 \end{aligned} \right\} \quad t = T_{n+1} \quad (24)$$

Występujący w wyrażeniach 16...24 współczynnik  $\eta$  ma wartość iloczynu  $L_{a,b,c}$  oraz  $I_D$  i wymiar  $[V]$ . Funkcja  $\delta(t)$  odwzorowuje przepięcie, o nieskończonej wartości, powstające przy załączaniu źródła prądowego na obciążenie o charakterze indukcyjnym.

W rzeczywistym układzie falownika prądu, proces załączania i wyłączania prądu  $I_D$  płynącego przez obciążenie  $R, L, SEM$  odbywa się w skończonym czasie. Proces można opisać przyjmując następujące założenia:

- rozpatrywany jest przedział czasu  $T_n < t < T_{n+1}$  między kolejnymi załączeniami wektorów  $\bar{I}_{k(n)}^t$ , w którym prąd płynie przez obciążenie  $R, L, e_f$ ,
- proces załączania rozpoczyna się w chwili  $t = T_n$  i odbywa się w czasie  $t = t_{on}$  zwanym czasem załączania,
- prąd narasta liniowo od wartości  $i(T_n) = 0$  do wartości  $i(T_n + t_{on}) = I_D$ ,
- w przedziale czasu  $T_n + t_{on} \leq t \leq T_{n+1} - t_{off}$  utrzymywana jest wartość prądu  $i(t) = I_D$ ,
- proces wyłączania rozpoczyna się w chwili  $t = T_{n+1} - t_{off}$  i odbywa się w czasie  $t = t_{off}$  zwanym czasem wyłączania,
- prąd maleje liniowo od wartości  $i(T_{n+1} - t_{off}) = I_D$  do wartości  $i(T_{n+1}) = 0$ .

Po uwzględnieniu wymienionych założeń, rozwiązania równań napięć fazowych opisują przebiegi w kolejnych przedziałach okresu  $T$ :  $< T_n, T_n + t_{on} >$ ,  $< T_n + t_{on}, T_{n+1} - t_{off} >$  oraz  $< T_{n+1} - t_{off}, T_{n+1} >$ . Na przykład rozwiązania równania (16) dla fazy  $a$  i kolejnych wektorów przyjmują postać wyrażień:

$$\left. \begin{aligned} u_{a_k}(t) &= R_a \cdot I_D + \frac{L_a \cdot I_D}{t_{on}} + e_a(t) \quad \text{dla } k = 33,36 \\ u_{a_k} &= -R_a \cdot I_D - \frac{L_a \cdot I_D}{t_{on}} + e_a(t) \quad \text{dla } k = 18,24 \\ u_{a_k} &= e_a(t) \quad \text{dla } k = 6,9 \end{aligned} \right\} \quad T_n \leq t \leq T_n + t_{on} \quad (25)$$

$$\left. \begin{aligned} u_{a_k}(t) &= R_a \cdot I_D + e_a(t) \quad \text{dla } k = 33,36 \\ u_{a_k} &= -R_a \cdot I_D + e_a(t) \quad \text{dla } k = 18,24 \\ u_{a_k} &= e_a(t) \quad \text{dla } k = 6,9 \end{aligned} \right\} T_n + t_{on} \leq t \leq T_{n+1} - t_{off} \quad (26)$$

$$\left. \begin{aligned} u_{a_k}(t) &= R_a \cdot I_D - \frac{L_a \cdot I_D}{t_{off}} + e_a(t) \quad \text{dla } k = 33,36 \\ u_{a_k} &= -R_a \cdot I_D + \frac{L_a \cdot I_D}{t_{off}} + e_a(t) \quad \text{dla } k = 18,24 \\ u_{a_k} &= e_a(t) \quad \text{dla } k = 6,9 \end{aligned} \right\} T_{n+1} - t_{off} \leq t \leq T_{n+1} \quad (27)$$

Postępując analogicznie jak w rozwiązaniu dla fazy *a* można określić wyrażenia na napięcia fazowe  $u_{b_k}$  i  $u_{c_k}$ . Czynniki  $\frac{L_a I_D}{t_{on}}$  i  $\frac{L_a I_D}{t_{off}}$  występujące w powyższych wyrażeniach określają w przybliżeniu wartość przepięć pojawiających się w rzeczywistych przebiegach napięcia fazowego. Przykład przebiegu napięcia fazowego  $u_{a_k}$ , w całym przedziale  $\langle T_n, T_{n+1} \rangle$ , ilustrujący procesy przejściowe po załączeniu i wyłączeniu wektora  $\vec{I}_{33}^t$  (100001) lub wektora  $\vec{I}_{36}^t$  (100100) podano na rys. 6.

Równania napięć międzyfazowych, dla wybranego wektora  $\vec{I}_k^t$ , wyznacza się z odpowiednich równań fazowych. Dla wektora  $\vec{I}_{36}^t$  napięcie  $u_{ab36}$  wyznacza się z równania:

$$u_{ab36} = u_{a36} - u_{b36} = (R_a + R_b) \cdot I_D + (L_a + L_b) \frac{dI_D}{dt} + e_a(t) - e_b(t) \quad (28)$$

Rozwiązanie tego równania otrzymuje się wykorzystując odpowiednie wyrażenia z (16, 17, 18, 19, 20, 21):

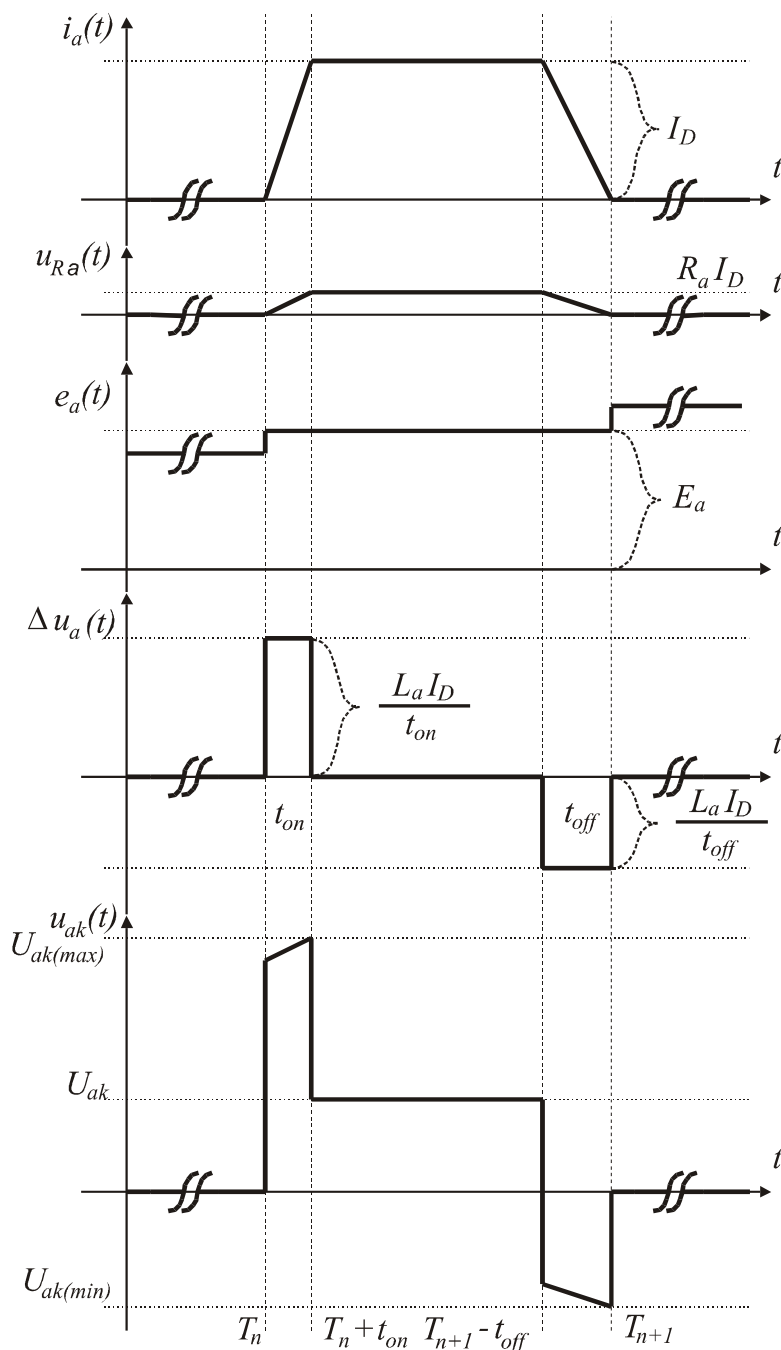
$$u_{ab36}(t) = (R_a + R_b) I_D + 2\eta \cdot \delta(t - T_n) + e_a(T_n) - e_b(T_n) \quad t = T_n \quad (29)$$

$$u_{ab36}(t) = (R_a + R_b) I_D + e_a(T_n) - e_b(T_n) \quad T_n < t < T_{n+1} \quad (30)$$

$$u_{ab36}(t) = (R_a + R_b) I_D - 2\eta \cdot \delta(t - T_n) + e_a(T_n) - e_b(T_n) \quad t = T_{n+1} \quad (31)$$



Analogicznie wyznacza się napięcie międzyfazowe  $u_{ab}$  dla kolejnych wektorów prądu oraz napięcia  $u_{bc}$  i  $u_{ca}$ .



Rys. 6. Przebieg napięcia fazowego  $u_{a_k}$  po załączeniu i wyłączeniu wektora  $\vec{I}_{33}^t$  albo  $\vec{I}_{36}^t$

## 7.2. Napięcie obwodu pośredniczącego

Napięcie obwodu pośredniczącego  $U_D$  daje się łatwo wyznaczyć za pomocą napięć międzyfazowych, albowiem w falowniku prądu, niezależnie od konfiguracji obciążenia, napięcie  $U_D$  odpowiada zawsze jednemu z napięć międzyfazowych. Dla kolejnych wektorów prądu napięcie  $U_D$  wylicza się z napięć międzyfazowych zamieszczonych w tab.6.

**TABELA 6**

Napięcie obwodu pośredniczącego  $U_D$  dla poszczególnych wektorów prądu.

$\vec{I}_k^t$	$\vec{I}_3^t$	$\vec{I}_{12}^t$	$\vec{I}_{48}^t$	$\vec{I}_6^t$	$\vec{I}_9^t$	$\vec{I}_{18}^t$	$\vec{I}_{24}^t$	$\vec{I}_{33}^t$	$\vec{I}_{36}^t$
$U_D$	0	0	0	$-U_{bc}$	$U_{bc}$	$U_{ca}$	$-U_{ab}$	$-U_{ca}$	$U_{ab}$

## 7.3. Zunifikowany model falownika prądu z obciążeniem połączonym w gwiazdę (*MFPG*)

Do opisu modelu *MFPG* potrzebna jest znajomość prądu obwodu pośredniczącego, wybranego wektora prądu, czasu i chwili jego załączenia oraz parametrów obciążenia. W nawiasie klamrowym zawarto wszystkie niezbędne zmienne niezależne.

$$MFPG \left\{ I_D, \vec{I}_k^t, Z_f, E_f, T_n \leq t \leq T_{n+1} \right\} \quad (32)$$

Pozostałe ważne dla opisu parametry wyznacza się w następujący sposób:

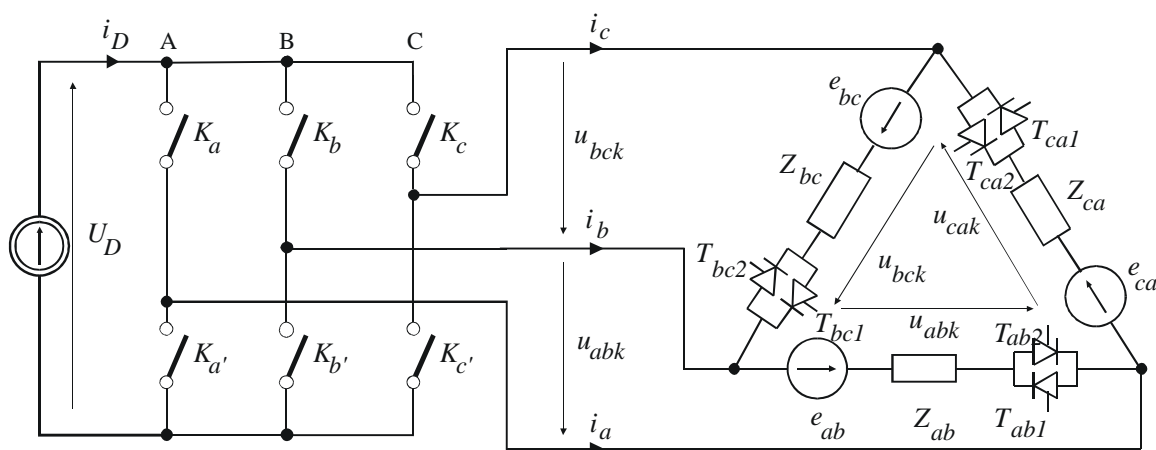
- napięcia fazowe  $u_{a_k}, u_{b_k}, u_{c_k}$  z równań (16...24),
- napięcia międzyfazowe:  $u_{ab}(t)$  – z równań (25, 26, 27), a  $u_{bc}(t), u_{ca}(t)$  według opisanej w równaniach (24, 25, 26, 27) zasady,
- prądy fazowe  $i_{a_k}(t), i_{b_k}(t), i_{c_k}(t)$  z tab.5,
- napięcie obwodu pośredniczącego z tab.6.

Jeżeli w modelu idealnym falownika prądu uwzględni się rzeczywiste czasy załączania i wyłączania łączników, to napięcia fazowe  $u_{a_k}$  wyznacza się z równań (25, 26, 27), a napięcia fazowe  $u_{b_k}, u_{c_k}$  – postępując analogicznie jak to opisano dla fazy *a*.

## 8. SFALOWNIK PRĄDU Z OBCIĄŻENIEM POŁĄCZONYM W TRÓJKĄT

### 8.1. Układ zastępczy

Układ zastępczy przekształtnika trójfazowego przedstawiono na rys. 7. Parametrem wyróżniającym falownik jest stała wartość prądu obwodu pośredniczącego oraz obciążenie połączone w trójkąt.



Rys. 7. Układ zastępczy falownika prądu – obciążenie połączone w trójkąt

Łączniki  $K_a$ ,  $K_a'$ ,  $K_b$ ,  $K_b'$ ,  $K_c$ ,  $K_c'$ , odpowiednio do wybranego wektora prądu, przełączają prąd obwodu pośredniczącego  $I_D$  do obciążenia, które składa się z dwójników  $Z_{ff}-e_{ff}$ , przy czym każdy dwójnik składa się z szeregowo połączonej rezystancji  $R_{ff}$  i indukcyjności  $L_{ff}$ . Obowiązuje założenie, że w obwodzie pośredniczącym znajduje się idealne źródło prądu stałego  $I_D$ <sup>1)</sup>. Poprawna praca falownika prądu z obciążeniem połączonym w trójkąt, możliwa jest tylko wtedy, gdy prąd obwodu pośredniczącego zamyka się w obwodzie składającym się z generatora prądu i tylko jednego dwójnika  $Z_{ff}-e_{ff}$  obciążenia. Aby zapewnić takie warunki należy wprowadzić do obwodu obciążenia dodatkowe dwukierunkowe łączniki połączone szeregowo z dwójnikami  $Z_{ff}-e_{ff}$ . Mogą

<sup>1)</sup> W ogólności, w tym przekształtniku symetria obciążeń międzyfazowych nie jest konieczna.

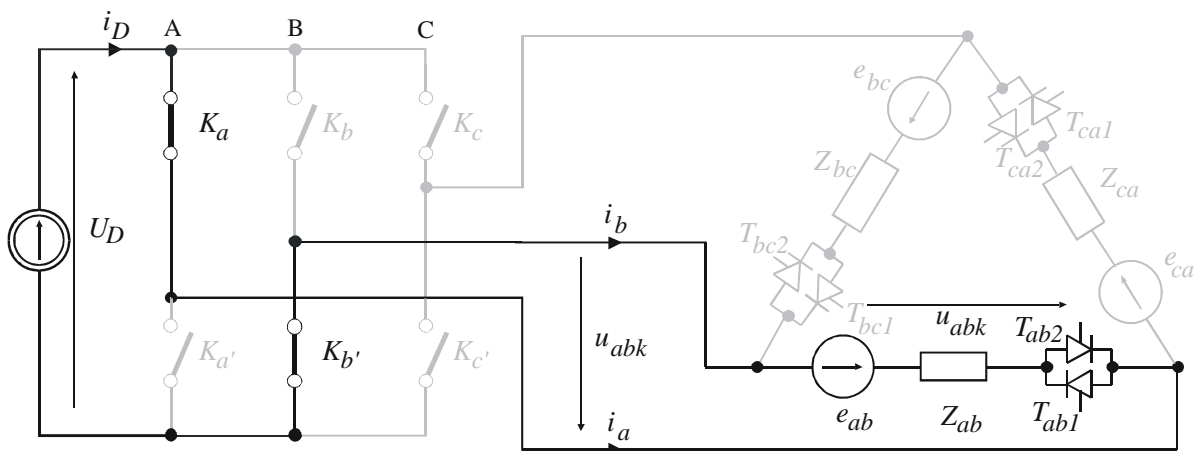
to być na przykład łączniki składające się z połączonych przeciwnoległe tyrystorów. Zostały one oznaczone na rys. 7 jako:  $T_{ab1}$ ,  $T_{ab2}$ ,  $T_{bc1}$ ,  $T_{bc2}$ ,  $T_{ca1}$ ,  $T_{ca2}$ . Załączanie poszczególnych tyrystorów jest przyporządkowane określonym wektorom prądu. Aby załączyć wybrany wektor prądu – dotyczy to tylko wektorów aktywnych – układ sterowania musi jednocześnie podać impuls wyzwalający na bramkę tyrystora przyporządkowanego do tego wektora. Wzajemne przyporządkowanie tyrystorów do wektorów zamieszczono w tab.7. Wyłączenie wektora powoduje spadek prądu płynącego przez obciążenie do zera i pociąga za sobą wyłączenie tyrystora. Dopiero wtedy możliwe staje się załączenie kolejnego wektora. Opis procesu komutacji nie wchodzi w zakres niniejszej pracy.

**TABELA 7**

Przyporządkowanie tyrystorów  $T_{ab1}$ ,  $T_{ab2}$ ,  $T_{bc1}$ ,  $T_{bc2}$ ,  $T_{ca1}$ ,  $T_{ca2}$  do poszczególnych wektorów falownika prądu.

$\vec{I}_k^t$	$\vec{I}_3^t$	$\vec{I}_{12}^t$	$\vec{I}_{48}^t$	$\vec{I}_6^t$	$\vec{I}_9^t$	$\vec{I}_{18}^t$	$\vec{I}_{24}^t$	$\vec{I}_{33}^t$	$\vec{I}_{36}^t$
$T_{ff}$	x	x	x	$T_{bc2}$	$T_{bc1}$	$T_{ca1}$	$T_{ab2}$	$T_{ca2}$	$T_{ab1}$

Dla dowolnego wektora prądu  $\vec{I}_k^t$ , załączonego w chwili  $t = T_n$ , model przekształtnika trójfazowego sprowadza się do jednooczkowego obwodu zastępczego. Na rysunku 8 przedstawiono przykład obwodu powstającego po załączeniu wektora  $\vec{I}_{36}^t$  i tyrystora  $T_{ab1}$ .



**Rys. 8.** Obwód zastępczy falownika prądu po załączeniu wektora  $\vec{I}_{36}^t$  i tyrystora  $T_{ab1}$  – obciążenie połączone w trójkąt

Napięcie  $U_D$  w obwodzie przedstawionym na rys. 8 równe jest napięciu międzyfazowemu  $U_{ab36}$  powstającemu po załączeniu wektora  $\vec{I}_{36}^t$ . Można je wyznaczyć z równania:

$$u_{ab_{36}} = R_a \cdot I_D + L_a \frac{dI_D}{dt} + e_a(t) \quad (33)$$

Równania (30, 31, 32) pozwalają wyznaczyć wszystkie napięcia międzyfazowe dla kolejnych wektorów prądu.

$$\left. \begin{aligned} u_{ab_{36}} &= R_a \cdot I_D + L_a \frac{dI_D}{dt} + e_a(t) & u_{ab_{24}} &= -R_a \cdot I_D - L_a \frac{dI_D}{dt} + e_a(t) \\ u_{ab_k} &= 0 \quad \text{dla } k = 6,9,18,33 \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

$$\left. \begin{aligned} u_{bc_9} &= R_b \cdot I_D + L_b \frac{dI_D}{dt} + e_b(t) & u_{bc_6} &= -R_b \cdot I_D - L_b \frac{dI_D}{dt} + e_b(t) \\ u_{bc_k} &= 0 \quad \text{dla } k = 18,33,24,36 \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

$$\left. \begin{aligned} u_{ca_{18}} &= R_c \cdot I_D + L_c \frac{dI_D}{dt} + e_c(t) & u_{ca_{33}} &= -R_c \cdot I_D - L_c \frac{dI_D}{dt} + e_c(t) \\ u_{ac_k} &= 0 \quad \text{dla } k = 6,9,24,36 \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

W równaniach (30, 31, 32) kolejne napięcia międzyfazowe określone są tylko dla dwóch wektorów aktywnych prądu; napięcie  $u_{ab}(t)$  – dla wektorów  $\vec{I}_{36}^t$  oraz  $\vec{I}_{24}^t$ , napięcie  $u_{bc}(t)$  – dla wektorów  $\vec{I}_9^t$  i  $\vec{I}_6^t$ , a napięcie  $u_{ca}(t)$  – dla wektorów  $\vec{I}_{18}^t$  i  $\vec{I}_{33}^t$ . Dla innych niż wymienione wektorów prądu przyjęto, że napięcia międzyfazowe są równe zero, ponieważ w każdym z tych przypadków odpowiednie fazy są odłączone („wiszą w powietrzu”) od szyn obwodu pośredniczącego. W przekształtnikach rzeczywistych należy liczyć się z wystąpieniem napięcia „pływającego” (floating voltage), o nieokreślonej wartości. Wynika to m. in. z występowania upływności i pojemności pasożytniczych w układzie sterowania i obciążenia.

Rozwiązując równania (30, 31, 32) otrzymuje się wyrażenia opisujące napięcia międzyfazowe modelu idealnego falownika prądu z obciążeniem połączonym w trójkąt. Wyrażenia obowiązują w przedziale czasu  $T_n \leq t \leq T_{n+1}$  między kolejnymi załączeniami wektorów  $\vec{I}_{k(n)}^t$  i  $\vec{I}_{k(n+1)}^t$ .

Napięcie  $u_{ab}$

$$\left. \begin{aligned}
 u_{ab_{36}}(T_n) &= R_a \cdot I_D + \eta \cdot \delta(t - T_n) + e_a(T_n) \\
 u_{ab_{36}}(t) &= R_a \cdot I_D + e_a(t) \quad \text{dla } T_n < t < T_{n+1} \\
 u_{ab_{36}}(T_{n+1}) &= R_a \cdot I_D - \eta \cdot \delta(t - T_{n+1}) + e_a(T_{n+1}) \\
 \\ 
 u_{ab_{24}} &= -R_a \cdot I_D - \eta \cdot \delta(t - T_n) + e_a(T_n) \\
 u_{ab_{24}}(t) &= R_a \cdot I_D + e_{ab}(t) \quad \text{dla } T_n < t < T_{n+1} \\
 u_{ab_{24}} &= -R_a \cdot I_D + \eta \cdot \delta(t - T_{n+1}) + e_a(T_{n+1}) \\
 \\ 
 u_{ab_k} &= 0 \quad k = 6, 9, 18, 33 \quad \text{dla } T_n \leq t \leq T_{n+1}
 \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Napięcie  $u_{bc}$

$$\left. \begin{aligned}
 u_{bc_9}(T_n) &= R_b \cdot I_D + \eta \cdot \delta(t - T_n) + e_{bc}(T_n) \\
 u_{bc_9}(t) &= R_b \cdot I_D + e_{bc}(t) \quad \text{dla } T_n < t < T_{n+1} \\
 u_{bc_9}(T_{n+1}) &= R_b \cdot I_D - \eta \cdot \delta(t - T_{n+1}) + e_{bc}(T_{n+1}) \\
 \\ 
 u_{bc_6} &= -R_b \cdot I_D - \eta \cdot \delta(t - T_n) + e_{bc}(T_n) \\
 u_{bc_6}(t) &= R_b \cdot I_D + e_{bc}(t) \quad \text{dla } T_n < t < T_{n+1} \\
 u_{bc_6} &= -R_b \cdot I_D + \eta \cdot \delta(t - T_{n+1}) + e_{bc}(T_{n+1}) \\
 \\ 
 u_{bc_k} &= 0 \quad k = 18, 24, 33, 36 \quad \text{dla } T_n \leq t \leq T_{n+1}
 \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Napięcie  $u_{ca}$

$$\left. \begin{aligned}
 u_{ca_{18}}(T_n) &= R_c \cdot I_D + \eta \cdot \delta(t - T_n) + e_{ca}(T_n) \\
 u_{ca_{18}}(t) &= R_c \cdot I_D + e_{ca}(t) \quad \text{dla } T_n < t < T_{n+1} \\
 u_{ca_{18}}(T_{n+1}) &= R_c \cdot I_D - \eta \cdot \delta(t - T_{n+1}) + e_{ca}(T_{n+1}) \\
 \\ 
 u_{ca_{33}} &= -R_c \cdot I_D - \eta \cdot \delta(t - T_n) + e_{ca}(T_n) \\
 u_{ca_{33}}(t) &= R_c \cdot I_D + e_{ca}(t) \quad \text{dla } T_n < t < T_{n+1} \\
 u_{ca_{33}} &= -R_c \cdot I_D + \eta \cdot \delta(t - T_{n+1}) + e_{ca}(T_{n+1}) \\
 \\ 
 u_{ca_k} &= 0 \quad k = 6, 9, 24, 36 \quad \text{dla } T_n \leq t \leq T_{n+1}
 \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Prądy obciążenia płynące przez poszczególne dwójniki międzyfazowe zamieszczono w tab.8.

**TABELA 8.**

Prądy międzyfazowe  $i_{abk}, i_{bck}, i_{cak}$  dla poszczególnych wektorów falownika prądu.

$\vec{I}_k^t$	$\vec{I}_3^t$	$\vec{I}_{12}^t$	$\vec{I}_{48}^t$	$\vec{I}_6^t$	$\vec{I}_9^t$	$\vec{I}_{18}^t$	$\vec{I}_{24}^t$	$\vec{I}_{33}^t$	$\vec{I}_{36}^t$
$i_{abk}$	0	0	0	0	0	0	$-I_D$	0	$I_D$
$i_{bck}$	0	0	0	$-I_D$	$I_D$	0	0	0	0
$i_{cak}$	0	0	0	0	0	$I_D$	0	$-I_D$	0

## 8.2. Napięcie obwodu pośredniczącego

Napięcie obwodu pośredniczącego  $U_D$ , podobnie jak w p.7.2, wyznacza się z napięć międzyfazowych. Dla kolejnych wektorów prądu napięcie  $U_D$  wylicza się z napięć międzyfazowych zamieszczonych w tab.6.

## 8.3. Zunifikowany model falownika prądu z obciążeniem połączonym w trójkąt (*MFPT*)

Do opisu modelu *MFPT* niezbędna jest znajomość prądu obwodu pośredniczącego, wybranego wektora prądu, czasu i chwili jego załączenia oraz parametrów obciążenia. W nawiasie klamrowym zawarto wszystkie niezbędne zmienne niezależne.

$$MFPT \left\{ I_D, \vec{I}_k^t, Z_{ff}, E_{ff}, T_n \leq t \leq T_{n+1} \right\} \quad (40)$$

W modelu idealnym napięcia międzyfazowe  $u_{ab_k}, u_{bc_k}, u_{ca_k}$  wyznacza się z równań (33, 34, 35). Pozostałe, potrzebne do opisu przekształtnika, parametry wyznacza się w następujący sposób:

- prądy międzyfazowe  $i_{ab_k}(t), i_{bc_k}(t), i_{ca_k}(t)$  z tab.8,
- napięcie obwodu pośredniczącego z tab.6.

Jeżeli do modelu idealnego wprowadzi się rzeczywiste czasy załączania i wyłączania łączników, to napięcia międzyfazowe można wyznaczyć postępując

w sposób podany dla układu obciążeń połączonych w gwiazdę. Jednakże dla omawianego układu *MFPT* potrzebne byłoby uwzględnienie czasów załączania dodatkowych łączników tyrystorowych. Zagadnienia komutacyjne, aczkolwiek bardzo interesujące, wykraczają poza ramy przedstawionych rozważań.

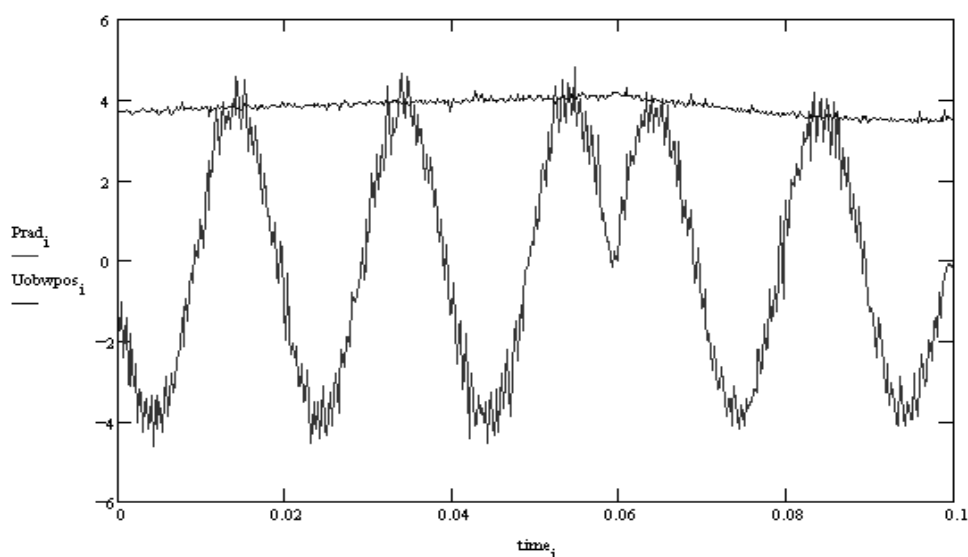
## 9. ZASTOSOWANIE OPRACOWANEGO MODELU

W IEL OG opracowano kilka poprawnie działających algorytmów sterujących wykorzystując pierwotną wersję modelu omówioną w pracy [2], w której opisano dwupoziomowy falownik napięcia wraz z obciążeniem połączonym w gwiazdę. Przedstawiony tam model został zastosowany w opracowanym przez autora programie symulacyjnym *SYMUL*. Program służy do zaawansowanej symulacji podstawowych i złożonych struktur energoelektronicznych. Napisany w języku C, daje użytkownikowi bogate możliwości kształtowania algorytmów, wymaga jednak dobrej znajomości programowania. *SYMUL* ma strukturę blokową, w której skład wchodzi bloki stałe: jądro programu i wyjściowy procesor graficzny oraz bloki zmienne zawierające badany algorytm. Podstawowym elementem jądra programu jest **model matematyczny przekształtnika wraz z obciążeniem**. Program *SYMUL*, w wersji zastosowanej w [2] pozwalał na prowadzenie badań nad oprogramowaniem prądowego sterowania falownika napięcia z obciążeniem *R*, *L*, *SEM*, natomiast w rozwiniętej, pod względem graficznym, wersji *SYMUL-F* [3], program posłużył do badań algorytmów sterowania filtrem aktywnym. W tym wypadku badania obejmowały przekształtnik składający się z dwóch falowników: głównego i pomocniczego stanowiącego filtr dla poprawy przebiegów prądów wyjściowych falownika napięcia.

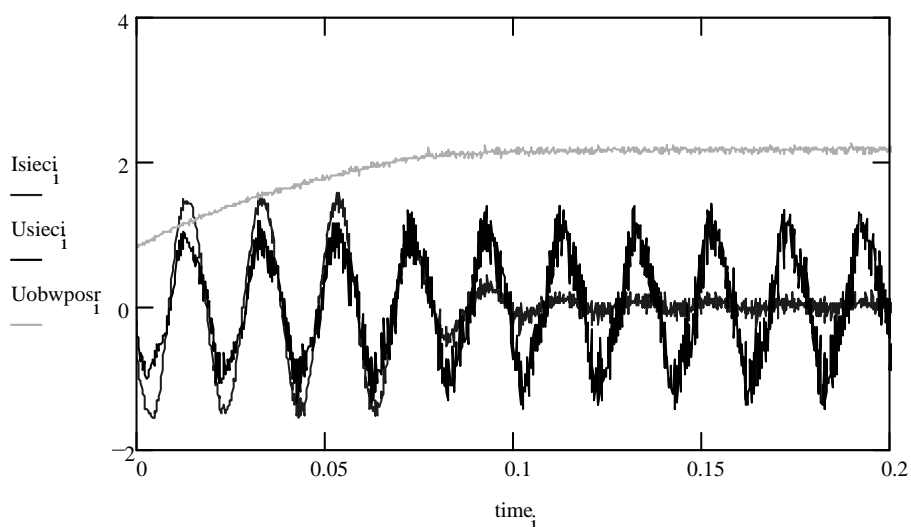
Największą zaletą rodziny programów *SYMUL* jest kompatybilność z oprogramowaniem karty sterującej *DS1102* firmy *dSPACE*. Po przeprowadzeniu badań symulacyjnych algorytmu sterującego, oprogramowanie może być przenoszone na procesor *TMS320C31* stanowiący jednostkę centralną karty *DS1102* przy użyciu kompilatora *Texas Instruments Floating-Point DSP Optimizing C Compiler*. Stwierdzono, że algorytm sprawdzony w trakcie badań symulacyjnych nadawał się do bezpośredniego przeniesienia do obiektu rzeczywistego i zapewniał poprawne sterowanie przekształtnika. Wykorzystanie zaprezentowanego modelu matematycznego pozwoliło uzyskać dużą szybkość przetwarzania w układzie sterowania przekształtnika w czasie rzeczywistym. Tak na przykład czas wykonania pętli głównej złożonego algorytmu predykcyjnego nie przekraczał 45  $\mu\text{s}$ . Umożliwiło to przeprowadzenie badań struktury *AC-DC-AC* przy prądzie fazowym falownika sieciowego sięgającym 110 A [4]. Poniżej na



rys. 9 i 10 przedstawiono oscylogramy z tego eksperymentu. Algorytm sterujący sprawdzony został w trakcie badań symulacyjnych z zastosowaniem programu *SYMUL*, a następnie przeniesiony na kartę sterującą *DS1102 dSPACE*. Rysunek 9 przedstawia przebieg napięcia obwodu pośredniczącego przekształtnika *AC-DC-AC* przy skokowej zmianie kierunku prądu zadanego w przekształtniku sieciowym *AC-DC* ( $\cos\varphi = 1$ ). Na rysunku 10 zaprezentowano przebiegi prądu i napięcia sieci oraz przebieg narastania napięcia obwodu pośredniczącego od wartości 200 V do 400 V.

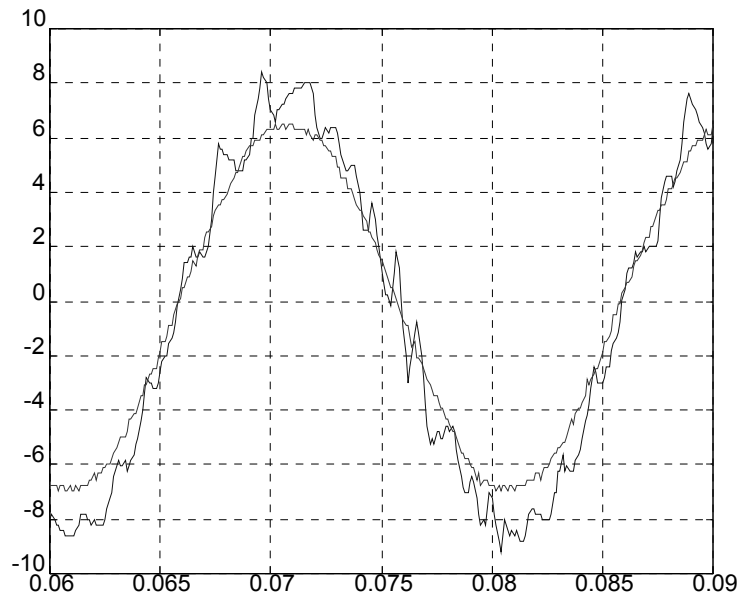


Rys. 9. Przebieg prądu i napięcia obwodu pośredniczącego przy skokowej zmianie kierunku prądu zadanego (skala dla napięcia: 100 V na jednostkę, skala dla prądu: 25 A na jednostkę)

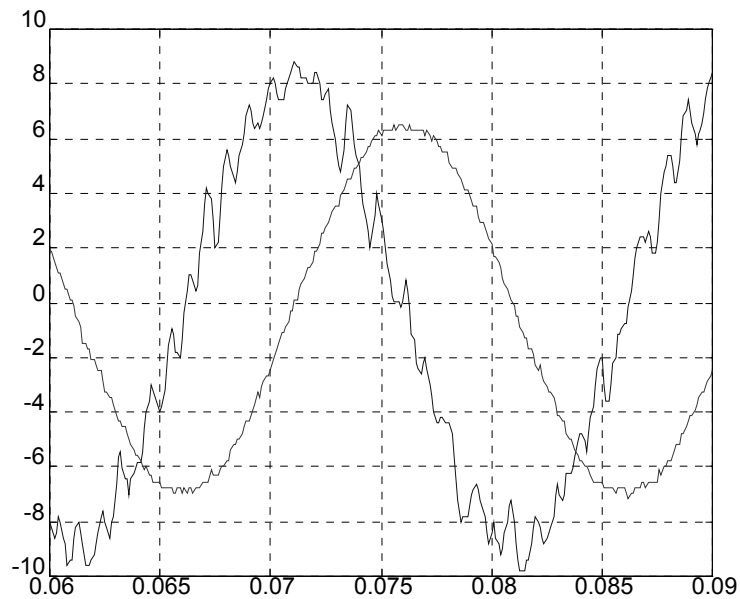


Rys. 10. Przebieg prądu i napięcia sieci oraz napięcie obwodu pośredniczącego w przekształtniku pośrednim 200 kW ( $f = 50$  Hz,  $U_D = 400$  V)

Na rysunku 11 i rys.12 podano przykład symulacji pracy przekształtnika sieciowego uzyskanych z programu *SYMUL*. Do jądra programu wpisano model *MFNG*. Rysunek przedstawia przebiegi prądów i napięć fazowych przekształtnika sieciowego dla dwóch różnych wartości kąta przesunięcia fazowego:  $\cos\phi = 1$  oraz  $\cos\phi = 0$ .



**Rys. 11. Przebiegi prądów i napięć fazowych przekształtnika sieciowego dla  $\cos\phi = 1$**



**Rys. 12. Przebiegi prądów i napięć fazowych przekształtnika sieciowego dla  $\cos\phi = 0$**

## LITERATURA

1. Hartman M., Iwaszkiewicz J., Perz J., Wolski L.: Zastosowanie metody obiektu wirtualnego w procesie uruchamiania algorytmów sterowania przekształtników – Sterowanie w Energoelektronice i Napędzie Elektrycznym – SENE'97, ŁÓDŹ 1997.
2. Iwaszkiewicz J.: Wybrane zagadnienia sterowania kaskadą dwóch przekształtników trójfazowych sterowanych prądowo – Sterowanie w Energoelektronice i Napędzie Elektrycznym – SENE'95, ŁÓDŹ 1995.
3. Iwaszkiewicz J.- Predykcyjne sterowanie przekształtników prądu przemiennego z wykorzystaniem zmiennoprzecinkowych procesorów sygnałowych – Praca doktorska, IEL 1997.
4. Perz J.: Sterowanie filtrem aktywnym dla poprawy przebiegów prądów wyjściowych falownika napięcia sterowanego prądowo – Praca doktorska, IEL 2000.
5. Projekt badawczy Nr 8T10A01410, Sprawozdanie IEL OG: Nowe metody sterowania złożonych struktur przekształtnikowych AC/DC/AC z wykorzystaniem współczesnych narzędzi cyfrowych (DSP, FPGA) – IEL OG, 1998

*Rękopis dostarczono, dnia 23.11.2004 r.*

**Opiniował: prof. dr hab. inż. Marian P. Kaźmierkowski**

## A MATHEMATICAL MODEL OF POWER CONVERTER FOR DISCRETE WAVEFORMS

Jan IWASZKIEWICZ

**ABSTRACT** *A mathematical model presented in the paper has been created in order to accelerate simulation research experiments. It permits to define general features of two level inverters thanks to analytic expressions of voltage and current waveforms in the converter-load circuit. The model describes the converter in digital control time domain. It has become very useful in analysis of converter behavior and transients, excluding commutation phenomena, and it proved its usefulness in algorithms controlling converters in real time. The model permits to carry on research works concerning complex converters built of two and multilevel current and voltage source inverters.*