

Maria KOSICKA

## ANALIZA UKŁADÓW O PARAMETRACH ROZŁOŻONYCH ZA POMOCĄ FALEK HAARA

**STRESZCZENIE** *W artykule przedstawiono metody analizy liniowych układów dynamicznych o parametrach rozłożonych opisanych równaniami różniczkowymi cząstkowymi przy zastosowaniu funkcji (falek) Haara. Podano metody analizy układów dowolnego rzędu. Zilustrowano je obliczeniami rozkładu prądu i napięcia w linii długiej oraz obliczeniami rozkładu temperatury w ogrzewanym pręcie. Omówiono zalety stosowanej metody, a także jej pewne niedogodności.*

### 1. WPROWADZENIE

---

Niniejsza praca jest kontynuacją prac [7, 8, 9], w których zostały opisane metody analizy i optymalizacji liniowych układów dynamicznych o zmiennych skupionych przy zastosowaniu falek Haara. Poniżej pokazano pewne możliwości zastosowania falek Haara do układów o zmiennych rozłożonych.

Sygnały określające układy o parametrach rozłożonych zależne są nie tylko od czasu, ale również od współrzędnych przestrzennych. Układy takie opisuje się równaniami różniczkowymi cząstkowymi. Przykładami układów o parametrach

---

**Mgr inż. Maria KOSICKA**

Zakład Badań Podstawowych Elektrotechniki  
Instytut Elektrotechnik

rozłożonych są linie długie, kable, wymienniki ciepła, reaktory rurowe, elementy nagrzewane itp. Rozwiązywanie równań różniczkowych cząstkowych zarówno analitycznie jak i numerycznie jest dość kłopotliwe, ponieważ zawierają one co najmniej dwie zmienne niezależne i co najmniej dwa zbiory warunków początkowych (lub brzegowych) spełniających te równania.

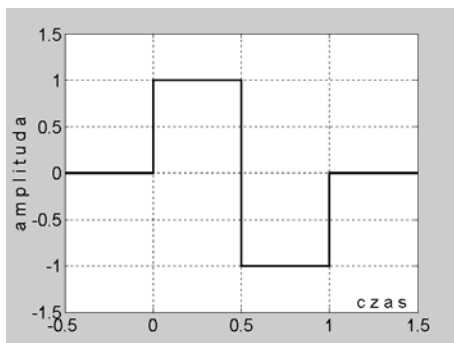
Okazuje się, że do tego typu zadań można w pewnych przypadkach stosować transformatę Haara [2], co pozwala na szybsze i bardziej eleganckie rozwiązywanie problemu.

Informacje na temat funkcji (falek) Haara można znaleźć w każdej niemal publikacji dotyczącej transformaty falkowej [np. 1, 10, 11], a sposób rozkładu dowolnej funkcji na funkcje (falki) Haara został dokładnie opisany w pracach [2, 3] oraz uzupełniony w pracach [7, 8, 9], dlatego też poniżej pokazano jedynie szkic stosowanej metody.

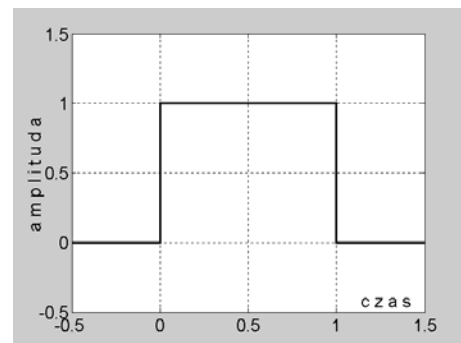
Podstawową falkę Haara (rys.1a) definiuje się następująco:

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } 0 \leq t < 0,5 \\ -1 & \text{dla } 0,5 \leq t < 1 \\ 0 & \text{dla } t < 0 \text{ i } t \geq 1 \end{cases} \quad (1)$$

a)



b)



Rys.1. Podstawowa falka Haara (a) i odpowiadająca jej funkcja skalująca (b).

Falka ta generuje zbiór falek opisany wzorem:

$$\psi_{jk}(t) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}t - k) = 2^{-j/2} \psi[2^{-j}(t - 2^j k)] \quad (2)$$

gdzie  $j$  i  $k$  są liczbami całkowitymi, przy czym  $j$  zwane jest współczynnikiem skali, a  $k$  – współczynnikiem przesunięcia [1]. Charakterystyczną cechą falki jest zależność przesunięcia  $2^j k$  od współczynnika skali, natomiast parametr  $2^{-j/2}$  zwany jest współczynnikiem normalizującym i powoduje, że dla każdej falki całka z jej kwadratu w przedziale o długości  $2^j$ , w którym  $\psi_{jk}(t) \neq 0$ , jest równa 1. Falki Haara stanowią rodzinę funkcji ortogonalnych i ortonormalnych, tzn. spełniają zależności:

$$\int_0^1 \psi_{j_1 k_1}(t) \psi_{j_2 k_2}(t) dt = \begin{cases} 1 & \text{dla } j_1 = j_2 \text{ i } k_1 = k_2 \\ 0 & \text{dla } \begin{cases} (j_1 \neq j_2 \text{ i } k_1 \neq k_2) \\ \text{lub } (j_1 \neq j_2 \text{ i } k_1 = k_2) \\ \text{lub } (j_1 = j_2 \text{ i } k_1 \neq k_2) \end{cases} \end{cases} \quad (3)$$

Czasem przyjmuje się stałą amplitudę falki zwykle równą 1, wtedy zgodnie ze wzorem (2)  $h_1(t) = \psi_{00}(t)$ , a kolejne funkcje są generowane następująco:

$$\begin{aligned} h_n(t) &= h_1(2^j t - k) \\ n &= 2^j + k, \quad j \geq 0, \quad 0 \leq k < 2^j \end{aligned} \quad (4)$$

przy czym

$$\int_0^1 h_i(t) h_l(t) dt = 2^{-j} \delta_{i,l} = \begin{cases} 2^{-j} & \text{dla } i=l=2^j+k \\ 0 & \text{dla } i \neq l \end{cases} \quad (5)$$

Taki zbiór funkcji jest ortogonalny, ale nie ortonormalny, ponieważ  $\int_0^1 h_n^2(t) dt \neq \text{const}$ .

Falki Haara uzupełnione funkcją skalującą (rys.1b), dla której  $h_0(t) = 1$  przy  $0 \leq t < 1$  mogą być narzędziem rozkładu dowolnej funkcji całkowalnej z kwadratem w przedziale  $[0,1)$ , a więc spełniającej warunek

$$\int_0^1 f^2(t) dt < \infty \quad (6)$$

Można za ich pomocą dokonywać uproszczonej analizy liniowych układów dynamicznych zarówno o parametrach skupionych, jak i rozłożonych [2, 3].

Podstawą analizy jest założenie, że każdą funkcję spełniającą warunek (6) można przedstawić w postaci sumy:

$$f(t) = \sum_{i=0}^N c_i h_i(t) \quad (7)$$

przy czym

$$c_i = 2^j \int_0^1 f(t) h_i(t) dt \quad (8)$$

gdzie  $2^j = i - k$ .

Formalnie parametr  $N \rightarrow \infty$ , ale w praktyce przyjmuje wartość skończoną. Funkcje  $h_i(t)$  są falkami Haara przedstawionymi w postaci wektorów [2] o  $m$  elementach, gdzie  $m$  jest stopniem rozwinięcia funkcji  $h_i(t)$  i musi być potęgą liczby 2:

$$\begin{aligned} h_0(t) &= [\underbrace{1 \dots 1}_m] \\ h_1(t) &= [\underbrace{1 \dots 1}_{m/2} \quad \underbrace{-1 \dots -1}_{m/2}] \\ h_2(t) &= [\underbrace{1 \dots 1}_{m/4} \quad \underbrace{-1 \dots -1}_{m/4} \quad \underbrace{0 \dots 0}_{m/2}] \\ h_3(t) &= [\underbrace{0 \dots 0}_{m/2} \quad \underbrace{1 \dots 1}_{m/4} \quad \underbrace{-1 \dots -1}_{m/4}] \quad \text{itd.} \end{aligned} \quad (9)$$

Z powyższych wektorów tworzy się macierz  $\mathbf{H}_m(t)$

$$\mathbf{H}_m(t) = \begin{bmatrix} h_0(t) \\ h_1(t) \\ \vdots \\ h_{m-1}(t) \end{bmatrix} \quad (10)$$

oraz jej całkę, którą można wyrazić także za pomocą falek Haara:

$$\int_0^t \mathbf{H}_m(\tau) d\tau = \mathbf{P}_m \mathbf{H}_m(t) \quad (11)$$

gdzie

$$\mathbf{P}_m = \frac{1}{2m} \begin{bmatrix} 2m\mathbf{P}_{m/2} & -\mathbf{H}_{m/2} \\ \mathbf{H}_{m/2}^{-1} & 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Powyższe rozważania odnoszą się do rozkładu funkcji jednej zmiennej (7). Rozłożenie na faleki Haara funkcji dwóch zmiennych  $f(x, t)$ , wymaga traktowania jednej z nich (np.  $x$ ) jako parametru, wtedy najwyższą pochodną funkcji  $f(x, t)$  po  $t$  występującą w równaniu różniczkowym cząstkowym można przedstawić w postaci:

$$\frac{\partial^q f(x, t)}{\partial t^q} = \mathbf{a}^T(x) \mathbf{H}_m(t) \quad (13)$$

gdzie  $\mathbf{a}(x)$  – wektor o  $m$  elementach zależnych od  $x$ .

Kolejne niższe pochodne (przy zerowych warunkach początkowych) przyjmą zgodnie z (11) postać:

$$\frac{\partial^{q-1} f(x, t)}{\partial t^{q-1}} = \mathbf{a}^T(x) \mathbf{P} \mathbf{H}_m(t), \dots, \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \mathbf{a}^T(x) \mathbf{P}^{q-1} \mathbf{H}_m(t), f(x, t) = \mathbf{a}^T(x) \mathbf{P}^q \mathbf{H}_m(t) \quad (14)$$

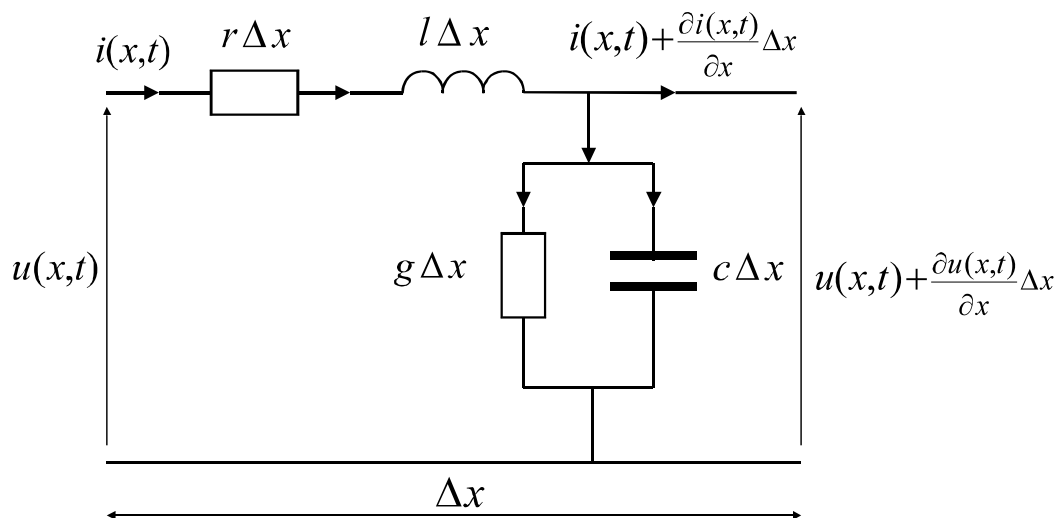
Natomiast daną pochodną funkcji  $f(x, t)$  po  $x$  można wyrazić w postaci:

$$\frac{\partial^p f(x, t)}{\partial x^p} = \frac{d^p \mathbf{a}^T(x)}{dx^p} \mathbf{P}^q \mathbf{H}_m(t) \quad (15)$$

Te operacje pozwalają na sprowadzenie równania różniczkowego cząstkowego do równania różniczkowego zwyczajnego, w którym występują pochodne wektora  $\mathbf{a}(x)$ . Powyższą metodę zilustrowano trzema przykładami:

- obliczeniami przebiegu prądu i napięcia w linii długiej,
- obliczeniami przebiegu prądu i napięcia dla bezindukcyjnego kabla,
- obliczeniami rozkładu temperatury w nagrzewanym metalowym pręcie.

## 2. ZASTOSOWANIE TRANSFORMATY HAARA DO OBLICZENIA PRĄDU I NAPIĘCIA W LINII DŁUGIEJ



Rys.2. Elementarny odcinek linii długiej dwuprzewodowej o długości  $\Delta x$ .

Równanie linii długiej [6] zwane równaniem telegrafisty ma postać:

$$ri(x,t) + l \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} = - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \quad (16)$$

$$gu(x,t) + l \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = - \frac{\partial i(x,t)}{\partial x} \quad (17)$$

gdzie

$r, l, g, c$  – rezystancja liniowa, indukcyjność liniowa, konduktancja liniowa i pojemność liniowa<sup>1)</sup> (rys.2).

<sup>1)</sup> Parametry liniowe zwane były kiedyś parametrami na jednostkę długości.

Różniczkując powyższe równania najpierw po  $x$ , a następnie po  $t$ , po wyrugowaniu pochodnych mieszanych otrzymuje się układ równań różniczkowych cząstkowych w postaci:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = lc \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + (rc + lg) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + rg u(x,t) \quad (18)$$

$$\frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial x^2} = lc \frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial t^2} + (rc + lg) \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} + rgi(x,t) \quad (19)$$

Zastosowanie transformaty Haara w dziedzinie czasu zgodnie z (13) i (14) daje przy zerowych warunkach początkowych  $u(x,0) = 0$  równości:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \mathbf{a}^T(x) \mathbf{H}_m(t), \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \mathbf{a}^T(x) \mathbf{P} \mathbf{H}_m(t), \quad u(x,t) = \mathbf{a}^T(x) \mathbf{P}^2 \mathbf{H}_m(t) \quad (20)$$

Podstawienie (20) do (18) pozwala otrzymać różniczkowe zwyczajne:

$$\frac{d^2 \mathbf{a}^T(x)}{dx^2} - \mathbf{a}^T(x) \mathbf{M}^2 = 0 \quad (21)$$

gdzie

$$\mathbf{M} = \left[ LC \mathbf{I} + (RC + LG) \mathbf{P} + RG \mathbf{P}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \mathbf{P}^{-1}$$

Rozwiązanie równania (21) ma postać:

$$\mathbf{a}^T = \mathbf{a}_1^T \exp(-\mathbf{M}x) + \mathbf{a}_2^T \exp(\mathbf{M}x) \quad (22)$$

$\mathbf{I}$  – macierz jednostkowa.

Ponieważ przy  $x \rightarrow \infty$  napięcie  $u(x,t)$  musi mieć wartość skończoną należy przyjąć  $\mathbf{a}_2 = 0$ . Podstawienie (22) do (20) daje zależność:

$$u(x,t) = \mathbf{a}_1^T \exp(-\mathbf{M}x) \mathbf{P}^2 \mathbf{H}_m(t) \quad (23)$$

Załóżmy, że na początku linii długiej został przyłożony skok napięcia o wartości  $u(0,t) = U_0 1(t)$ . Po przedstawieniu sygnału wejściowego za pomocą funkcji Haara otrzymuje się:

$$u(0,t) = \mathbf{a}_1^T(x) \mathbf{P}^2 \mathbf{H}_m(t) = U_0 \left[ \underbrace{1, 1, \dots, 1, 1}_m \right] \quad (24)$$

Stąd:

$$\mathbf{a}_1^T(x) = u(0,t) \mathbf{H}_m^{-1}(t) \mathbf{P}^{-2} \quad (25)$$

Przebieg napięcia w dowolnym punkcie linii długiej można zatem wyrazić wzorem:

$$u(x,t) = \mathbf{a}_1^T(x) \exp(-\mathbf{M}x) \mathbf{P}^2 \mathbf{H}_m(t) \quad (26)$$

Natomiast przebieg prądu w punkcie  $x = 0$  znajduje się stosując transformatę Haara do wzoru (16):

$$\frac{di(0,t)}{dt} = \mathbf{b}^T \mathbf{H}_m(t) \quad \text{oraz} \quad i(0,t) = \mathbf{b}^T \mathbf{P} \mathbf{H}_m(t) \quad (27)$$

gdzie  $\mathbf{b}$  – wektor o  $m$  elementach. Po zróżniczkowaniu wyrażenia (23) po  $x$  i podstawieniu wraz z (27) do (1) otrzymuje się:

$$\mathbf{b}^T = \mathbf{a}_1^T \mathbf{M} \mathbf{P}^2 [\mathbf{R} \mathbf{P} + \mathbf{L} \mathbf{I}]^{-1} \quad (28)$$

Natomiast po podstawieniu (28) do (27):

$$i(0,t) = \mathbf{a}_1^T \mathbf{M} \mathbf{P}^2 [\mathbf{r} \mathbf{P} + \mathbf{l} \mathbf{I}]^{-1} \mathbf{P} \mathbf{H}_m(t) \quad (29)$$

Przebieg prądu w dowolnym punkcie linii można znaleźć podobnie jak przebieg napięcia podstawiając jako warunek brzegowy wyrażenie (29), stąd:



$$i(x, t) = \mathbf{a}_1^T(x) \mathbf{M} \mathbf{P}^2 [r\mathbf{P} + l\mathbf{I}]^{-1} \mathbf{P}^{-1} \exp(-\mathbf{M}x) \mathbf{P}^2 \mathbf{H}_m(t) \quad (30)$$

Ogólne rozwiązanie analityczne równań (18) i (19) wymagałoby znalezienia odwrotnej transformaty Laplace'a [4] poniższych zależności:

- dla napięcia:  $u(x, t) = U_0 \mathbf{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s} \exp(-\gamma x) \right]$
- dla prądu:  $i(x, t) = U_0 \mathbf{L}^{-1} \left[ \frac{\gamma}{s(ls + r)} \exp(-\gamma x) \right]$

gdzie

$$\gamma = \sqrt{(ls + r)(cs + g)}$$

Można rozpatrywać pewne przypadki szczególne, np.:

- dla linii bezstratnej ( $r = 0$  i  $g = 0$ ) (rys.3):

$$u(x, t) = U_0 (t - \sqrt{lc}x), \quad i(x, t) = U_0 \sqrt{\frac{c}{l}} (t - \sqrt{lc}x) \quad (31)$$

- dla linii nie zniekształcającej ( $rc = lg$ ):

$$u(x, t) = U_0 \exp\left(-xr\sqrt{\frac{c}{l}}\right) (t - \sqrt{lc}x) \quad (32)$$

$$i(x, t) = U_0 \sqrt{\frac{c}{l}} \exp\left(-xr\sqrt{\frac{c}{l}}\right) (t - \sqrt{lc}x)$$

Przebiegi napięcia i prądu dla linii nie zniekształcającej będą miały podobną postać jak dla linii bezstratnej (rys.3). Zmieni się jedynie współczynnik proporcjonalności zależny od  $x$ .

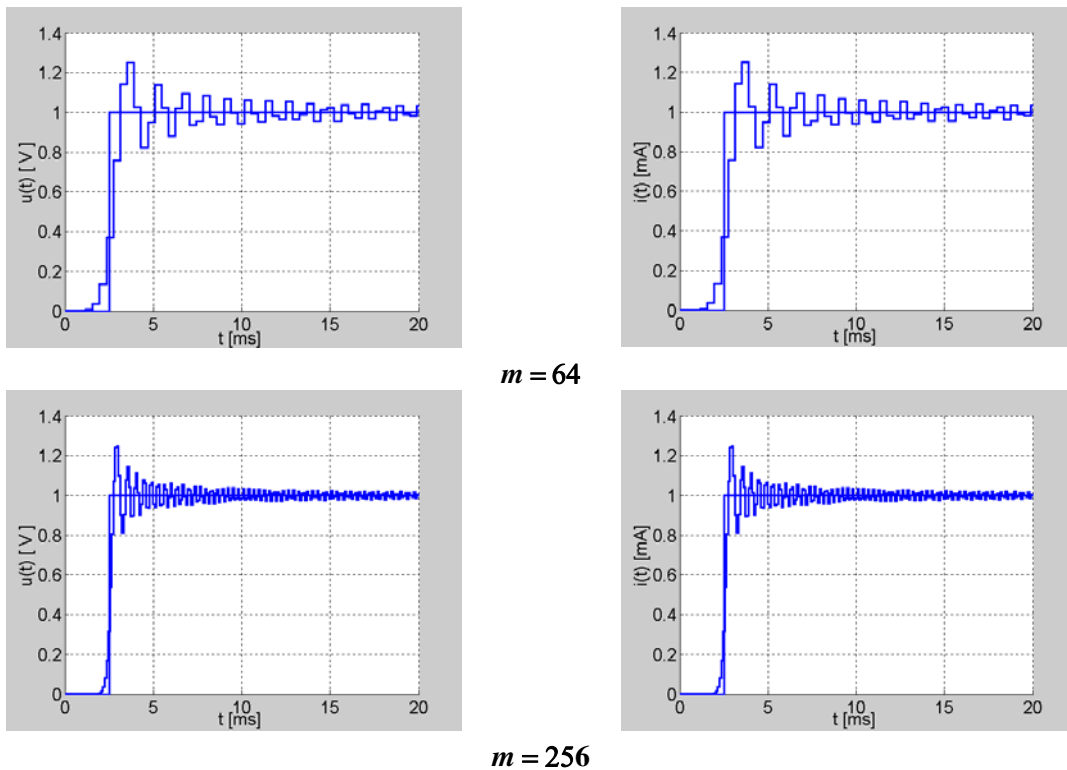
- dla  $x = 0$  (rys.4) istnieje rozwiązanie analityczne [4] przebiegu prądu:

$$i(0,t) = U_0 \sqrt{\frac{c}{l}} \left[ e^{-\alpha t} I_0(\beta t) + \frac{g}{c} \int_0^t e^{-\alpha \tau} I_0(\beta \tau) d\tau \right] \quad (33)$$

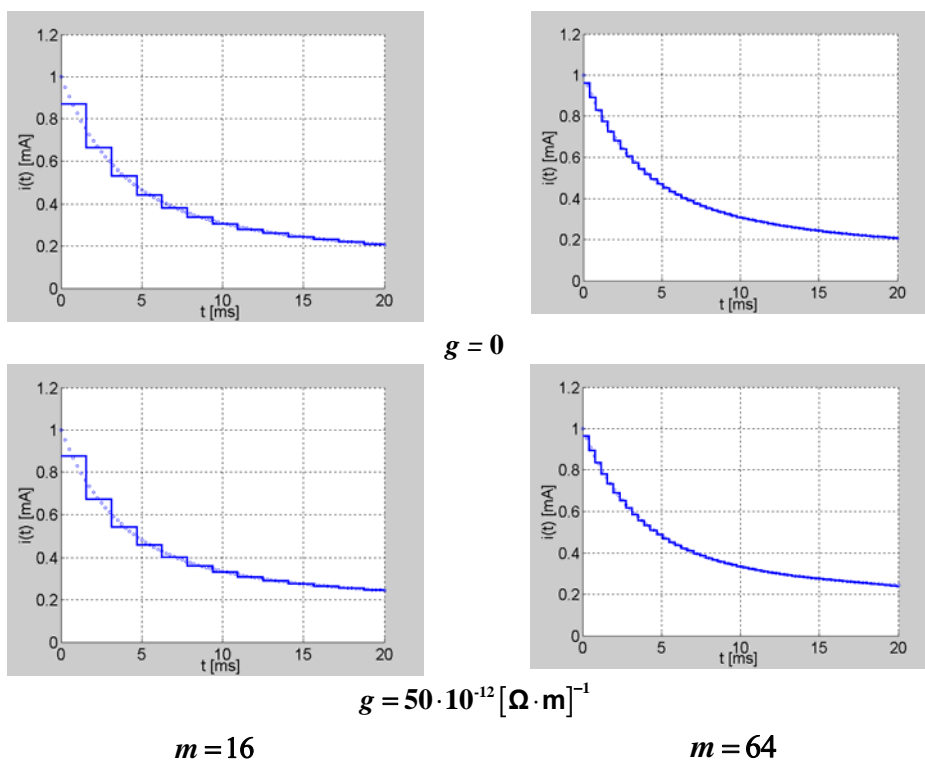
gdzie  $\alpha = \frac{1}{2} \left( \frac{r}{l} + \frac{g}{c} \right)$  oraz  $\beta = \frac{1}{2} \left( \frac{r}{l} - \frac{g}{c} \right)$ , a  $I_0$  jest zmodyfikowaną funkcją Bessela pierwszego rodzaju, rzędu zero [12].

Do obliczeń przyjęto dane:

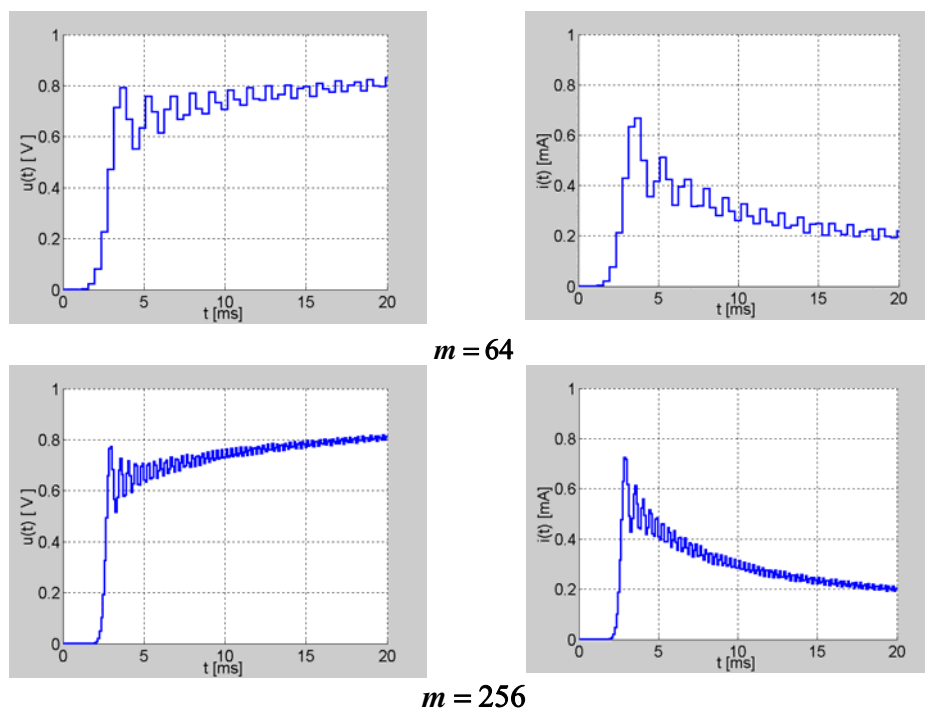
$$r = 0,002 \Omega \cdot \text{m}^{-1}, c = 5 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}, l = 5 \cdot 10^{-6} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}, g = \text{var}.$$



**Rys.3.** Przebiegi napięcia i prądu w odpowiedzi na skok jednostkowy napięcia dla linii bezstratnej ( $r = 0, g = 0$ ) przy  $x \neq 0$  obliczone za pomocą rozkładu na falki Haara.



Rys.4. Porównanie przebiegów prądu w odpowiedzi na skok napięcia dla  $x = 0$  przy rozwiązaniach za pomocą falek Haara oraz funkcji Bessela przy różnych wartościach konduktancji liniowej linii długiej.



Rys.5. Przebiegi napięcia i prądu w odpowiedzi na skok jednostkowy napięcia przy rozwiązaniach za pomocą rozkładu na faleki Haara dla przypadku ogólnego ( $x \neq 0, g = 0$ ) przy różnych stopniach rozkładu.

W przypadku ogólnym (rys.5) można znaleźć przebiegi napięcia i prądu posługując się wzorami (26) i (30).

### 3. ZASTOSOWANIE TRANSFORMATY HAARA DO OBLICZENIA PRĄDU I NAPIĘCIA DLA KABLA BEZ INDUKCYJNOŚCI I BEZ UPŁYWNOŚCI

Dla  $g = 0$  i  $l = 0$  równania (16)...(19) redukują się do postaci:

$$ri(x,t) = -\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \quad (34)$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = rc \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \quad (35)$$

Podstawienie odpowiedniej zależności z (20) do (35) daje równanie różniczkowe o postaci (21), przy czym w tym przypadku macierz  $M$  opisana jest zależnością:

$$M = \sqrt{rc} P^{\frac{1}{2}} \quad (36)$$

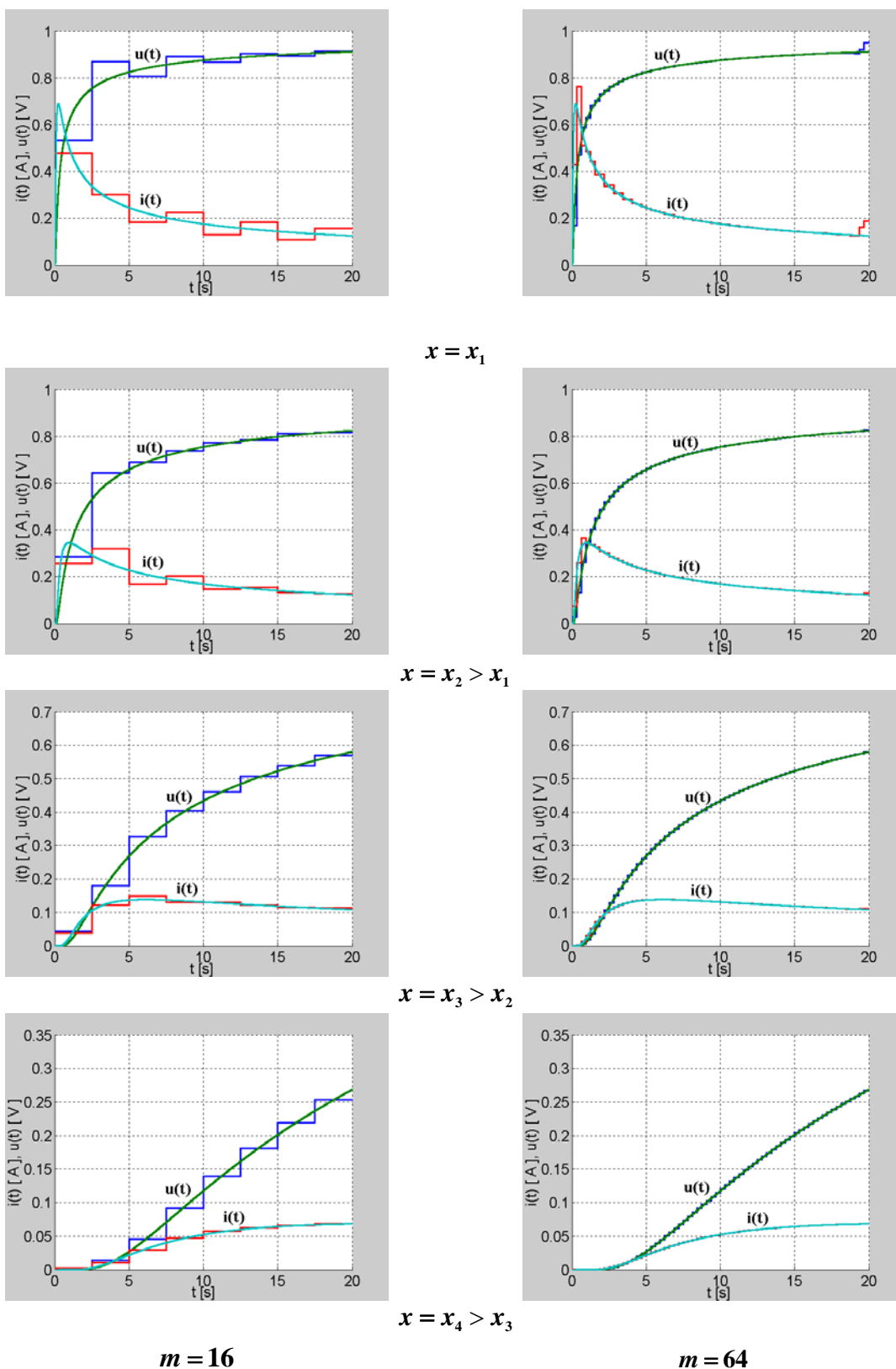
Zgodnie z (20) i (34):

$$u(x,t) = \mathbf{a}_0^T(x) \exp(-Mx) P \mathbf{H}_m(t) \quad (37)$$

$$i(x,t) = \sqrt{\frac{c}{r}} \mathbf{a}_0^T(x) \exp(-Mx) P^{\frac{1}{2}} \mathbf{H}_m(t) \quad (38)$$

Przy czym dla skoku jednostkowego na początku kabla:  $u(0,t) = U_0 1(t)$ :

$$\mathbf{a}_0^T = U_0 [1, \dots, 1] \mathbf{H}_m^{-1}(t) P^{-1} = U_0 \left[ \underbrace{0, \dots, 0}_{m/2}, \underbrace{2m, \dots, 2m}_{m/2} \right] \quad (39)$$



Rys.6. Przebiegi napięcia i prądu w odpowiedzi na skok jednostkowy napięcia dla bezindukcyjnego kabla przy rozwiązaniach za pomocą rozkładu na falek Haara oraz przy zastosowaniu funkcji  $\text{erfc}$  (przy różnych wartościach  $x$ ).

Rozwiązanie analityczne [4] równań (34) i (35) ma postać:

$$u(x,t) = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2}\sqrt{\frac{rc}{t}}\right) \quad (40)$$

$$i(x,t) = \sqrt{\frac{c}{\pi r t}} e^{-\frac{rc}{4t}x^2} \quad (41)$$

gdzie

$\operatorname{erfc}$  – komplementarna funkcja błędu o postaci ogólnej:

$$\operatorname{erfc}(z) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt \quad (42)$$

#### 4. ZASTOSOWANIE TRANSFORMATY HAARA DO OBLICZENIA ROZKŁADU TEMPERATURY W OGRZEWANYM PRĘCIE

---

Równanie różniczkowe cząstkowe opisujące rozkład temperatury w metalowym jednorodnym pręcie, którego koniec jest ogrzewany, ma postać [6]:

$$\frac{\partial \Delta \mathcal{G}(x,t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \Delta \mathcal{G}(x,t)}{\partial x^2} - \beta \Delta \mathcal{G}(x,t) \quad (43)$$

gdzie

- $\Delta \mathcal{G}(x,t)$  – przyrost temperatury pręta ponad temperaturę otoczenia,
- $\alpha, \beta$  – współczynniki zależne od: współczynnika przewodnictwa cieplnego pręta, jego przekroju poprzecznego, ciepła właściwego, gęstości materiału oraz współczynnika wymiany ciepła [6].

Zgodnie z zależnościami (14) i (15):

$$\frac{\partial \Delta \mathcal{G}(x,t)}{\partial t} = \mathbf{a}^T(x) \mathbf{H}_m(t) \quad (44)$$

$$\Delta \mathcal{G}(x, t) = \mathbf{a}^T(x) \mathbf{P} \mathbf{H}_m(t) \quad (45)$$

$$\frac{\partial^2 \Delta \mathcal{G}(x, t)}{\partial x^2} = \ddot{\mathbf{a}}^T(x) \mathbf{P} \mathbf{H}_m(t) \quad (46)$$

Podstawienie (44), (45) i (46) do (43) daje równanie różniczkowe:

$$\ddot{\mathbf{a}}^T(x) - \frac{1}{\alpha} \mathbf{a}^T(x) (\mathbf{P}^{-1} + \beta \mathbf{I}) = 0 \quad (47)$$

którego rozwiązanie ma postać (22) przy  $\mathbf{M} = \left( \frac{\mathbf{P}^{-1} + \beta \mathbf{I}}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2}}$ .

Temperatura pręta nie może rosnąć do nieskończoności, zatem tak jak we wzorze (22)  $\mathbf{a}_2^T = 0$ . Przyjmując (z pewnym przybliżeniem), że na początku pręta nastąpił skok temperatury  $\Delta \mathcal{G}_p$  ponad temperaturę otoczenia otrzymuje się zależność:

$$\Delta \mathcal{G}(0, t) = \mathbf{a}_1^T \mathbf{P} \mathbf{H}_m(t) = \Delta \mathcal{G}_p \left[ \underbrace{1, 1, \dots, 1, 1}_m \right] \quad (48)$$

Stąd po podstawieniu  $\mathbf{a}_1^T$  do (22), a następnie do (45) otrzymuje się przybliżony wzór opisujący przebieg temperatury w funkcji czasu i odległości od początku pręta:

$$\Delta \mathcal{G}(x, t) = \Delta \mathcal{G}_p \left[ \underbrace{1, 1, \dots, 1, 1}_m \right] \mathbf{H}_m^{-1}(t) \mathbf{P}^{-1} \exp(-\mathbf{M}x) \mathbf{P} \mathbf{H}_m(t) \quad (49)$$

Rozwiązanie analityczne równania (43) można znaleźć przy zastosowaniu transformaty Laplace'a traktując zmienną  $x$  jako parametr. Oznaczając

$$\mathcal{L}[\Delta \mathcal{G}(x, t)] = \theta(x, s) \quad (50)$$

po podstawieniu do (43) otrzymuje się równanie:

$$\frac{\partial^2 \theta(x,s)}{\partial x^2} - \left( \frac{s+\beta}{\alpha} \right) \theta(x,s) = -\frac{1}{\alpha} \theta(x,0) \quad (51)$$

Dla  $\theta(x,0)=0$  rozwiązanie powyższego równania ma postać:

$$\theta(x,s) = C_1 \exp\left(-\frac{x}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{s+\beta}\right) + C_2 \exp\left(\frac{x}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{s+\beta}\right) \quad (52)$$

Ponieważ  $\theta(\infty,s) \neq \infty$   $C_2=0$ . Współczynnik  $C_1$  można znaleźć z warunków brzegowych, zakładając, że na początku pręta nastąpił skok temperatury o wielkość  $\Delta \mathcal{G}_p$ , zatem:

$$\theta(0,s) = \frac{\Delta \mathcal{G}_p}{s} \quad (53)$$

oraz

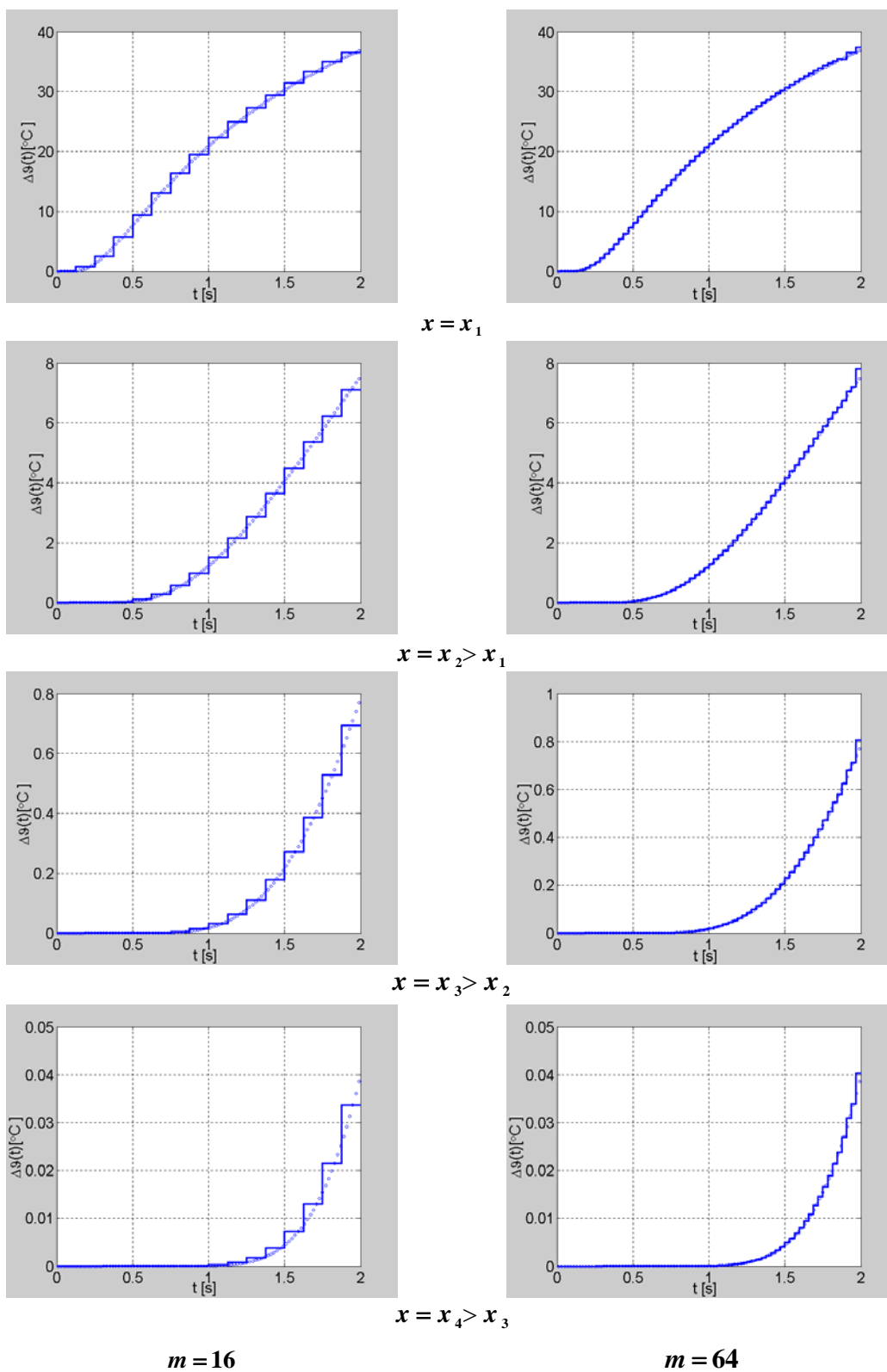
$$\theta(x,s) = \frac{\Delta \mathcal{G}_p}{s} \exp\left(-\frac{x}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{s+\beta}\right) \quad (54)$$

stąd

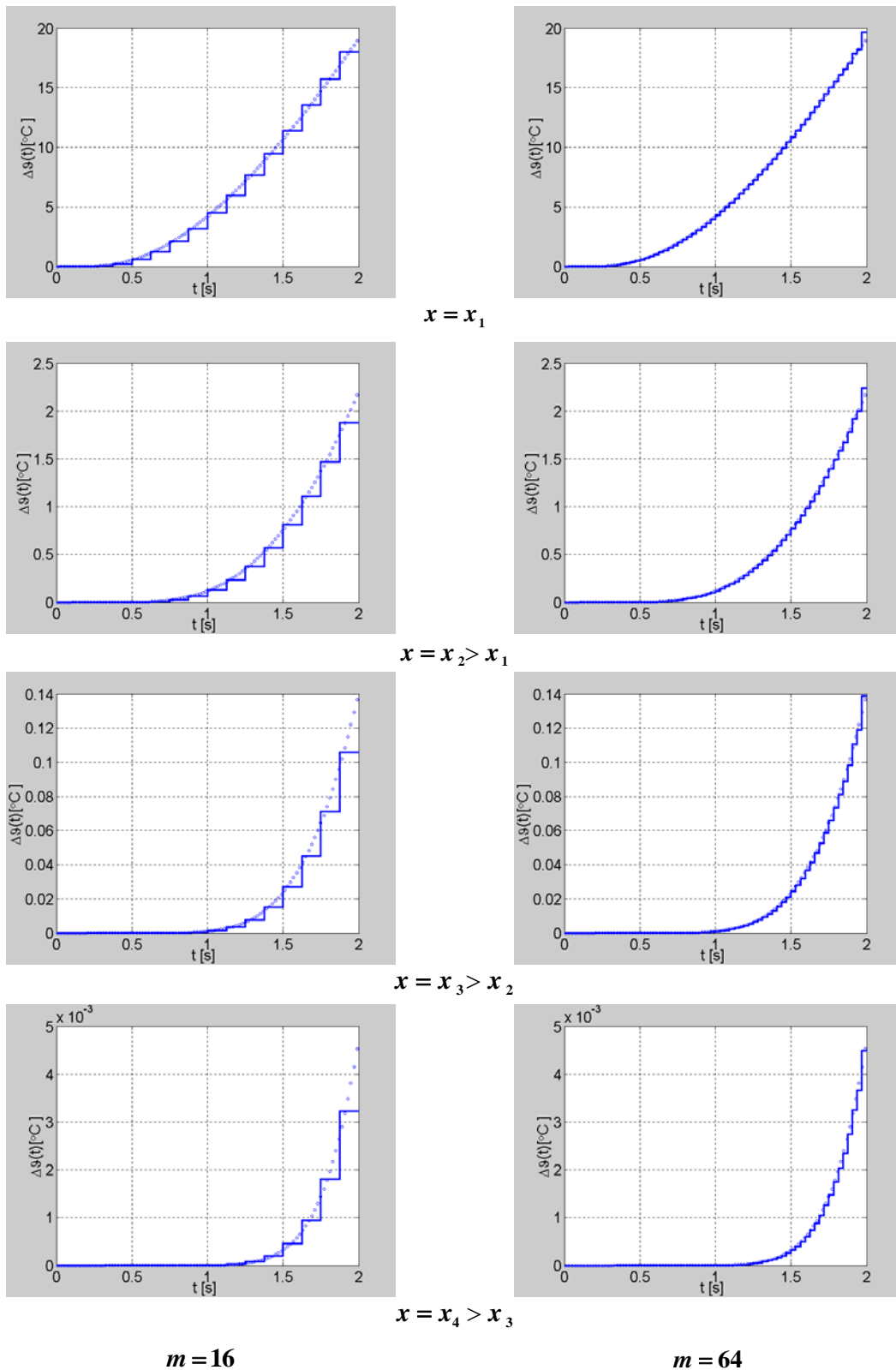
$$\mathcal{L}^{-1}[\theta(x,s)] = \theta(x,t) = \Delta \mathcal{G}_p \exp(-\beta t) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) \quad (55)$$

Wyniki dla szacunkowo przyjętych wartości  $\alpha = 0,02 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ ,  $\beta = 0,01 \text{ s}^{-1}$  przedstawiono na rys.7.





Rys.7. Przebiegi temperatury w różnych punktach pręta przy skoku jednostkowym temperatury na początku pręta. Porównanie przebiegów przy rozwiązaniu analitycznym oraz za pomocą rozkładu na faleki Haara.



Rys.8. Przebiegi temperatury w różnych punktach pręta przy liniowym narastaniu temperatury na początku pręta. Porównanie przebiegów przy rozwiązaniu analitycznym oraz za pomocą rozkładu na falki Haara.

W podobny sposób można rozwiązać problem zakładając, że temperatura na początku pręta narasta liniowo. Wówczas we wzorze (49) należy podstawić:

$$\Delta \mathcal{G}(0, t) = \mathbf{a}_1^T \mathbf{P} \mathbf{H}_m(t) = \Delta \mathcal{G}_p \left[ \underbrace{0, \frac{\Delta \mathcal{G}(0, t_f)}{m-1}, 2 \frac{\Delta \mathcal{G}(0, t_f)}{m-1}, \dots, (m-2) \frac{\Delta \mathcal{G}(0, t_f)}{m-1}, \Delta \mathcal{G}(0, t_f)}_m \right] \quad (56)$$

gdzie

$\Delta \mathcal{G}(0, t_f)$  – przyrost temperatury ponad temperaturę otoczenia w chwili końcowej  $t_f$ .

Rozwiązanie analityczne przyjmuje wtedy postać:

$$\theta(x, t) = \frac{\Delta \mathcal{G}(0, t_f)}{t_f} \int_0^t \exp(-\beta \tau) \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{\alpha \tau}} \right) d\tau \quad (57)$$

Wyniki przedstawiono na rys.8.

## 5. PODSUMOWANIE

Rozkład na falki Haara pozwala na szybsze wykonywanie obliczeń niż w przypadku zastosowania transformaty Fouriera lub transformaty Walsh, o czym wspomniano już w pracach [2,3,7,8,9] poświęconych głównie zastosowaniu falek Haara w układach dynamicznych o parametrach skupionych. W niniejszej pracy badano możliwości zastosowania metod rozkładu funkcji dwóch zmiennych na falki Haara w układach o parametrach rozłożonych opisywanych równaniami różniczkowymi cząstkowymi. Stwierdzono, że traktując jedną ze zmiennych jako parametr, można zastosować rozkład na falki Haara podobnie jak w przypadku układów o zmiennych skupionych opisywanych równaniami różniczkowymi zwyczajnymi. Metodę zademonstrowano na podstawie trzech różnych przykładów i tam, gdzie to było możliwe, porównano przebiegi uzyskane za pomocą rozkładu na falki Haara z rozwiązaniami analitycznymi (rys.4, 6, 7, 8).

W pewnych sytuacjach otrzymuje się bardzo dobre przybliżenia już dla niewielkiego stopnia rozwinięcia, np.  $m = 64$  (rys. 4, 6, 8). Natomiast w innych nawet przy  $m = 256$  nie można uzyskać „gładkich” przebiegów (rys.3, 5). W takich przypadkach rozkład na falki Haara pozwala jedynie na uzyskanie orientacyjnego przebiegu (co często jest w zupełności wystarczające). Na podstawie przeanalizowanych przypadków trudno jest jednak podać ogólne prawidłowości, właściwie każdy przypadek należy rozpatrywać osobno.

Wszystkie wyniki otrzymano przy wykorzystaniu pakietu Matlab.

## LITERATURA

1. Białasiewicz J.T.: Falki i aproksymacje. WNT, Warszawa, 2000.
2. Chen C.F., Hsiao C.H.: *Haar wavelet method for solving lumped and distributed-parameter systems*. IEE Proc.-Control Theory Appl. vol.144, no.1, pp.87-94, Jan. 1997.
3. Chen C.F., Hsiao C.H.: *Wavelet approach to optimising dynamic systems*. IEE Proc.-Control Theory Appl. vol.146, no.2, pp.213-219, March 1999.
4. Cheng D.K.: *Analysis of linear systems*. Addison-Wesley, New York, 1961.
5. Haar A.: *Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme*. Mathematische Annalen, pp.331-371, Leipzig, 1910.
6. Kaczorek T.: Teoria sterowania. t.I, PWN, Warszawa, 1977.
7. Kosicka M., Adamczyk P.: *Falki Haara w liniowych układach dynamicznych*. Prace Instytutu Elektrotechniki, z.211, str.147-166, 2002.
8. Kosicka M., Adamczyk P.: *Zastosowanie falek Haara do analizy i optymalizacji liniowych układów dynamicznych*. Referat na XXV Konferencję IC-SPETO, str.341-344, GLIWICE-BESKID ŚLĄSKI, 22-25.V.2002.
9. Kosicka M.: *Możliwości zastosowania falek Haara do analizy i optymalizacji układów napędowych*. Prace Instytutu Elektrotechniki, z.214, 2002, str. 99-116.
10. Kosicka M.: *Transformata falkowa a transformata Fouriera*. Przegląd Elektrotechniczny, z.7, str. 175-181, 1998.
11. Kosicka M.: *Właściwości transformaty falkowej*. Przegląd Elektrotechniczny, z.9, str. 224-229, 2000.
12. McLachlan N.W.: Funkcje Bessela dla inżynierów. PWN, Warszawa, 1964.

Rękopis dostarczono, dnia 25.04.2003 r.

**Opiniował: prof. dr hab. inż. Krystyn Pawluk**

ANALYSIS OF DISTRIBUTED-PARAMETERS SYSTEMS  
USING HAAR WAVELETS

M. KOSICKA

**SUMMARY** *The paper presents methods of analysis of distributed-parameters systems described by partial differential equations with application of the Haar functions (wavelets). Those methods of any rank systems are illustrated by computations concerning the current and voltage distribution in transmission line as well as the temperature distribution in a heated bar. Advantages and some inconveniences of methods have been specified.*



**Mgr inż. Maria Kosicka** urodziła się w 1944 roku w Warszawie. Ukończyła studia na Wydziale Elektrycznym Politechniki Warszawskiej w 1968 roku w specjalności automatyka przemysłowa. W tym samym roku rozpoczęła pracę w Instytucie Elektrotechniki, początkowo w Zakładzie Zastosowań Przemysłowych Układów Regulacji (obecnie Zakład Napędów Obrabiarkowych), a od 1978 roku w Zakładzie Badań Podstawowych Elektrotechniki. Zajmowała się problemami automatyki napędu elektrycznego, teorią regulacji, przetwarzaniem obrazów, a obecnie zagadnieniami dotyczącymi zastosowań transformaty falkowej. Jest autorką lub współautorką około czterdziestu artykułów i referatów. Dwukrotnie otrzymała nagrodę Dyrektora Instytutu Elektrotechniki za artykuł wyróżniający się wśród drukowanych na łamach „Prac IEL”. Jest członkiem Stowarzyszenia Elektryków Polskich od czasów studenckich.

