

Tadeusz MISSALA

## MODELE LINIOWE SERWOSILNIKÓW PRĄDU STAŁEGO - SYSTEMATYZACJA

**STRESZCZENIE** *W analizie pracy dynamicznej i sterowania serwomechanizmów prądu stałego są wykorzystywane modele liniowe silników napędowych. Model dynamiczny silnika jest, jak wiadomo, scharakteryzowany: stałymi momentu  $K_T$ , napięcia  $K_E$ , tarcia lepkiego  $K_D$ , tarcia suchego  $T_F$ , momentem bezwładności  $J$ , rezystancją  $R_a$ , i indukcyjnością  $L_a$  wirnika. Z parametrów tych wynikają stałe czasowe: elektromagnetyczna, elektromechaniczna i bezwładności. W zależności od konstrukcji silnika, rodzaju sterowania i zastosowania niektóre parametry można pominąć. Prowadzi to do modeli o różnym stopniu złożoności, odpowiednio mniej lub bardziej dokładnie odtwarzających zjawiska rzeczywiste. Na podstawie równań i schematów blokowych zdefiniowano 10 modeli: sześć stopnia pierwszego i cztery stopnia drugiego. Podano ich transmitancje, wyrażenia do określenia prądów, końcowych prędkości kątowych i przyspieszeń przy rozruchu*

### 1. WSTĘP

---

W analizie pracy dynamicznej i sterowania serwomechanizmów prądu stałego są wykorzystywane modele liniowe silników napędowych z uwagi na ich prostotę oraz dostateczną dokładność odwzorowywania zjawisk zachodzących w silnikach prądu stałego o magnesach trwałych. Model dynamiczny takiego

---

**Prof. dr inż. Tadeusz MISSALA**  
e-mail: tmissala@sg.piap.waw.pl

Pełnomocnik Dyrektora ds. Jakości  
Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów  
Al. Jerozolimskie 202, 02-486 Warszawa

silnika jest, jak wiadomo, scharakteryzowany następującymi parametrami: stałą momentu, stałą napięcia, stałą tarcia lepkiego, stałą tarcia suchego, momentem bezwładności, rezystancją, i indukcyjnością wirnika.

Parametry te definiują stałe czasowe: elektromagnetyczną, elektromechaniczną i bezwładności. W zależności od typu silnika, rodzaju zastosowania i rodzaju sterowania, stałe te mają większy lub mniejszy wpływ na pracę dynamiczną silnika.

Zaobserwowano znaczne niedokładności w prezentowaniu tego zagadnienia w literaturze omawiającej problemy sterowania silnikami i zastosowania serwonapędów, co skłoniło do wykonania niżej prezentowanej pracy systematyzującej.

Praca nawiązuje do artykułu Hwanga i Lorda [1] i artykułów [3, 4]; posłużono się w niej metodami znanymi z teorii regulacji, np. z [2].

## 2. RÓWNANIA PODSTAWOWE I SCHEMATY BLOKOWE

Liniowy model matematyczny serwo-silnika prądu stałego o magnesach trwałych (spsme) stanowi poniższy układ równań:

$$U(s) = (R_a + sL_a)I_a(s) + E(s) \quad (1)$$

$$E(s) = K_E \Omega(s) \quad (2)$$

$$(Js + K_D)\Omega(s) = M(s) - \frac{T_f}{s} \quad (3)$$

$$M(s) = K_T I_a(s) \quad (4)$$

W równaniach powyższych przyjęto typowe oznaczenia:

$U(s)$  – transformata Laplace'a napięcia zasilania;

$I_a(s)$  – transformata Laplace'a prądu twornika;

$E(s)$  – transformata Laplace'a napięcia źródłowego;

$M(s)$  – transformata Laplace'a momentu elektromagnetycznego;

$\Omega(s)$  – transformata Laplace'a prędkości kątowej;

$R_a$  – rezystancja,

$L_a$  – indukcyjność uzwojenia twornika;

- $K_E$  – stała napięcia;
- $K_T$  – stała momentu;
- $K_D$  – stała tarcia lepkiego;
- $T_f$  – stała tarcia suchego.

Spsme można podzielić na dwie główne grupy:

- Silniki z wirnikami o konstrukcji „beżelazowej” (np. tarczowe, kokonowe), tj. takie, w których można pominąć indukcyjność twornika;
- Silniki z wirnikami żłobkowanymi, w których indukcyjność twornika ma istotne znaczenie.

Jak wynika z tego podziału powstają dwie grupy modeli; w każdej z nich można zdefiniować modele uproszczone, przez pominięcie wpływu tarcia suchego, tarcia lepkiego lub obu tych wielkości.

W przypadku I tj. przy  $L_a = 0$ , otrzymuje się układ równań:

$$I_a(s) = \frac{U(s) - E(s)}{R_a} \quad (5)$$

$$\Omega(s) = \frac{M(s) - \frac{T_f}{s}}{Js + K_D} = [K_T I_a(s) - \frac{T_f}{s}] \frac{1}{s + \frac{1}{T_B}} \quad (6)$$

$$T_B = \frac{J}{K_D} \quad (7)$$

Ponadto ważne jest równanie (2).

Ten układ równań prowadzi do schematu blokowego przedstawionego na rys.1 i do modeli od 1 do 4.

Do tego przypadku należy też zaliczyć silniki sterowane prądowo, tj. takie, w których układ sterowania wymusza stały prąd twornika, a zatem stały moment napędowy elektromagnetyczny; tu indukcyjność twornika jest skompensowana działaniem sterowania. Z tego typu sterowaniem spotyka się w robotach przemysłowych, pamięciach dyskowych itp. Temu przypadkowi odpowiadają schematy blokowe przedstawione na rys.2 i 3 oraz modele 2a i 4a.

W przypadku II, tj. gdy nie można przyjąć  $L_a = 0$ , otrzymuje się równania:

$$I_a(s) = [U(s) - E(s)] \frac{1}{s + \frac{1}{T_a}} \quad (8)$$

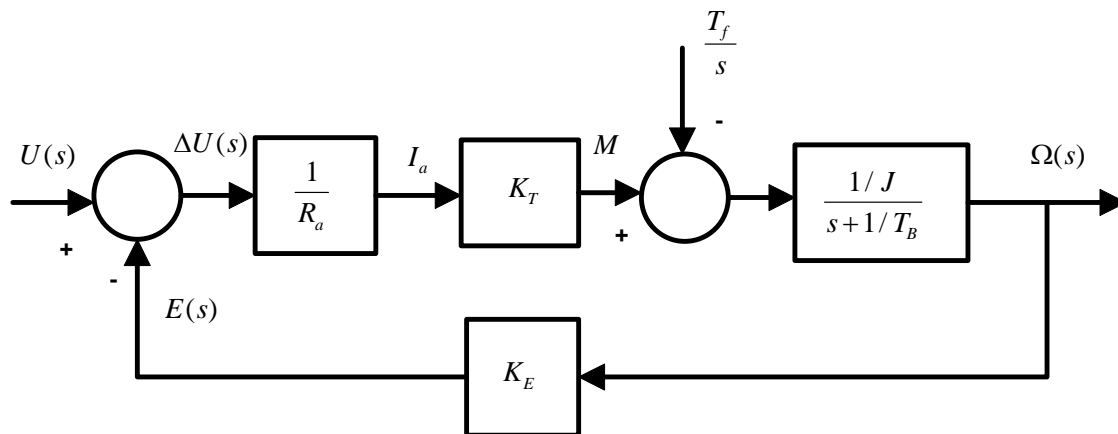
$$T_a = \frac{L_a}{R_a} \quad (9)$$

Ponadto ważne są równania (2), (6), (7).

Ten układ równań prowadzi do schematu blokowego przedstawionego na rys.4 i do modeli od 5 do 8.

### 3. MODELE GRUPY I

#### 3.1. Model 1 – $L_a = 0$ ; $K_D = 0$ ; $T_f = 0$



Rys.1. Schemat blokowy w przypadku  $L_a = 0$  i sterowania napięciowego (oznaczenia jak w tekście).

Ze schematu (rys.1) , przy poczynionych założeniach, wynikają niżej podane zależności:

- **Transmitancja:**

$$G_1(s) = \frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{\frac{1}{R_a} K_T \frac{1}{sJ}}{1 + \frac{1}{R_a} K_T K_E \frac{1}{sJ}} = \frac{1}{K_E} \times \frac{K_E K_T}{R_a J} \frac{1}{s + \frac{K_E K_T}{R_a J}}$$

Po oznaczeniu:

$$\frac{R_a J}{K_E K_T} = T_m \quad (\text{elektromechaniczna stała czasowa}) \quad (10)$$

otrzymuje się do końcową zależność:

$$G_1(s) = \frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{1}{s + \frac{1}{T_m}} \quad (11)$$

- **Wartość końcowa prędkości kątowej przy wymuszeniu skokowym:**

$$\Omega_u = \lim_{s \rightarrow 0} s G_1(s) \frac{U_o}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s + \frac{1}{T_m}} \frac{U_o}{s} = \frac{U_o}{K_E} = \omega_o \quad (12)$$

- **Odpowiedź prądowa:**

$$I_a(s) = \frac{J}{K_T} s G_1(s) U(s) = \frac{J}{K_T} s \frac{1}{s + \frac{1}{T_m}} U(s) \quad (13)$$

- **Wartość początkowa prądu (prąd zwarcia):**

$$I_{ap} = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{J}{K_T} s \frac{1}{s + \frac{1}{T_m}} \times \frac{U_o}{s} = \frac{U_o}{R_a} = I_{az} \quad (14)$$

- **Prąd rozruchu** (z warunków początkowych:  $t = 0$ ;  $\omega = 0$ ;  $\varpi = 0$ ):

$$I_{ar} = \frac{T_f}{K_T} = 0 \quad (15)$$

- **Prąd ustalony:**

$$I_u = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{J}{K_T} s \frac{\frac{1}{K_E T_m}}{s + \frac{1}{T_m}} \times \frac{U_o}{s} = 0 \quad (16)$$

**Początkowe przyspieszenie kątowe:**

$$X(s) = s\Omega(s) = sG_1(s)U(s) \quad (17)$$

$$\gamma_p = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 \frac{\frac{1}{K_E T_m}}{s + \frac{1}{T_m}} \times \frac{U_o}{s} = \frac{U_o}{K_E T_m} = \frac{T_{az} K_T}{J} = \frac{M_p}{J} \quad (18)$$

gdzie początkowy moment rozruchowy:

$$M_p = K_T I_{az} \quad (19)$$

### 3.2. Model 2 – $L_a = 0$ ; $K_D \neq 0$ ; $T_f = 0$ ; sterowanie napięciowe

Ze schematu (rys.1) , przy poczynionych założeniach, wynikają niżej podane zależności

- **Transmitancja:**

$$G_2(s) = \frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{\frac{1}{R_a} K_T \frac{1/J}{s + 1/T_B}}{1 + \frac{1}{R_a} K_T K_E \frac{1/J}{s + 1/T_B}}$$

stąd wyrażenie końcowe:

$$G_2(s) = \frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{1}{K_E T_m} \frac{1}{s + \left( \frac{1}{T_m} + \frac{1}{T_B} \right)} \quad (20)$$

- **Wartość końcowa prędkości kątowej przy wymuszeniu skokowym:**

$$\Omega_u = \lim_{s \rightarrow 0} s G_2(s) \frac{U_o}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} U_o G_2(s) = \frac{U_o T_B T_m}{K_E T_m (T_B + T_m)} = K \omega_o \quad (21)$$

oznaczono:

$$K = \frac{T_B}{T_B + T_m}; 1 - K = \frac{T_m}{T_B + T_m} \quad (22)$$

- **Odpowiedź prądowa:**

$$I_a(s) = \frac{J}{K_T} \left( s + \frac{1}{T_B} \right) G_2(s) U(s) = \frac{U(s)}{R_a} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{s + 1/T_B}} \quad (23)$$

- **Wartość początkowa prądu (prąd zwarcia):**

$$I_{ap} = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{J}{K_T} \left( s + \frac{1}{T_B} \right) \frac{1/K_E T_m}{s + \left( \frac{1}{T_m} + \frac{1}{T_B} \right)} \times \frac{U_0}{s} = \frac{J U_o}{K_E K_T T_m} = \frac{U_o}{R_a} = I_{az} \quad (24)$$

- **Prąd rozruchu** (z warunków początkowych:  $t = 0$ ;  $\omega = 0$ ;  $\varpi = 0$ ): dany jest wzorem (15)

- Prąd ustalony:

$$I_u = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{J}{K_T} \left( s + \frac{1}{T_B} \right) \frac{1 / K_E T_m}{s + \left( \frac{1}{T_m} + \frac{1}{T_B} \right)} \times \frac{U_0}{s} = \frac{U_o}{R_a} \times \frac{T_m}{T_m + T_B} = (1 - K) I_{az} \quad (25)$$

- Początkowe przyspieszenie kątowe:

$$X(s) = s\Omega(s) = sG_2(s)U(s)$$

$$\gamma_p = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 \frac{1 / K_E T_m}{s + \left( \frac{1}{T_m} + \frac{1}{T_B} \right)} \times \frac{U_o}{s} = \frac{U_o}{K_E T_m} = \frac{M_p}{J} \quad (26)$$

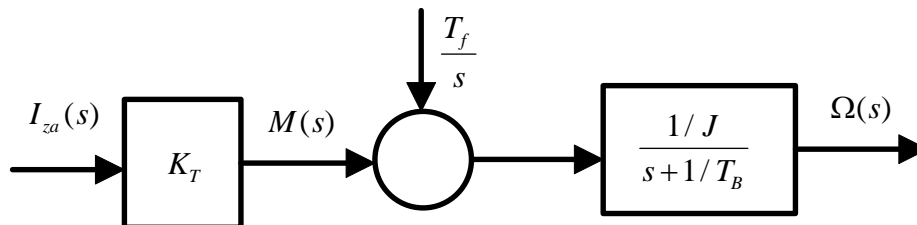
otrzymano wynik taki sam, jak w przypadku modelu 1.

### 3.3. Model 2a – $L_a = 0$ ; $K_D \neq 0$ ; $T_f = 0$ ; sterowanie prądowe

W przypadku sterowania prądowego spotyka się dwa warianty: sterowanie w torze otwartym (rys. 2) i w pętli ze sprzężeniem zwrotnym (rys.3).

#### 3.3.1. Przypadek sterowania w torze otwartym

Ze schematu (rys.2) , przy poczynionych założeniach, wynikają niżej podane zależności



Rys.2. Schemat blokowy w przypadku sterowania prądowego w torze otwartym.

- Transmitancja

$$G_{2I1}(s) = \frac{\Omega(s)}{I_{za}(s)} = K_T \frac{1 / J}{s + 1 / T_B} = \frac{K_T}{K_D (sT_B + 1)} \quad (27)$$



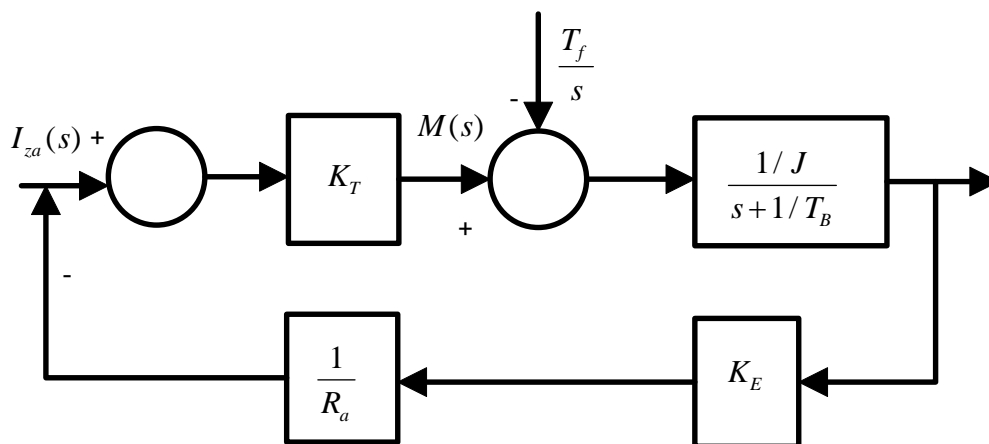
- Wartość końcowa prędkości kątowej przy wymuszeniu skokowym:

$$\Omega_u = \lim_{s \rightarrow 0} s G_{2I1}(s) \frac{I_0}{s} = \frac{I_0 R_a}{K_E} \times \frac{K_T K_E}{R_a K_D} = \frac{U_a}{K_D} \times \frac{T_B}{T_m} = \frac{T_B}{T_m} \omega_o \quad (28)$$

- Początkowe przyspieszenie kątowe:

$$\gamma_p = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 G_{2I1}(s) \frac{I_0}{s} = \frac{K_T I_0}{K_D T_B} = \frac{M_p}{J} \quad (29)$$

### 3.3.2. Przypadek sterowania w torze zamkniętym



Rys.3. Schemat blokowy w przypadku sterowania prądowego w torze ze sprzężeniem zwrotnym

Ze schematu (rys.3), przy poczynionych założeniach, wynikają niżej podane zależności

- Transmitancja

$$G_{2I2}(s) = \frac{\Omega(s)}{I_a(s)} = \frac{K_T \frac{1/J}{s + 1/T_B}}{1 + K_T \frac{1/J}{s + 1/T_B} K_E \frac{1}{R_a}} = \frac{K_T / J}{s + (\frac{1}{T_B} + \frac{1}{T_m})} \quad (30)$$

- **Wartość końcowa prędkości kątowej przy wymuszeniu skokowym:**

$$\Omega_u = \lim_{s \rightarrow 0} s G_{212}(s) \frac{I_0}{s} = \frac{I_a R_a}{K_E} \times \frac{1}{1 + \frac{T_B}{T_m}} = \frac{U_a}{K_E} \times \frac{T_B}{T_B + T_m} = K \omega_o \quad (31)$$

- **Początkowe przyspieszenie kątowe:**

$$\gamma_p = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 G_{221}(s) \frac{I_o}{s} = \frac{K_T I_o}{J} = \frac{M_p}{J} \quad (32)$$

### 3.4. Model 3 – $L_a = 0$ ; $K_D = 0$ ; $T_f \neq 0$ ; sterowanie napięciowe

Ze schematu (rys.1) , przy poczynionych założeniach, wynikają niżej podane zależności

- **Transmitancja:**

$$G_{\Sigma 3}(s) = \frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{K_T / s J R_a}{1 + \frac{K_T K_E}{s J R_a}} - \frac{1 / s J}{1 + \frac{K_T K_E}{s J R_a}} \times \frac{T_f / s}{U(s)}$$

stąd wyrażenie końcowe:

$$G_{\Sigma 3}(s) = \frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{\frac{1}{K_E T_m}}{s + \frac{1}{T_m}} - \frac{\frac{1}{J}}{s + \frac{1}{T_m}} \times \frac{T_f / s}{U(s)} = G_1(s) - G_{T1}(s) \quad (33)$$

- **Wartość końcowa prędkości kątowej przy wymuszeniu skokowym:**

$$\Omega(s) = \frac{1 / K_E T_m}{s + 1 / T_m} \times \frac{U_o}{s} - \frac{1}{J(s + 1 / T_m)} \times \frac{T_f}{s}$$

stąd

$$\Omega_u = \lim_{s \rightarrow 0} s\Omega(s) = \frac{U_o}{K_E} - \frac{T_f T_m}{J} = \frac{U_o}{K_E} - \frac{T_f}{K_T} \times \frac{R_a}{U_o} \times \frac{U_o}{K_E}$$

po wprowadzeniu oznaczeń (14) i (15) oraz oznaczeniu:

$$K' = 1 - \frac{I_{ar}}{I_{az}} \quad (34)$$

otrzymuje się:

$$\Omega_u = \frac{U_o}{K_E} \left(1 - \frac{I_{ar}}{I_{az}}\right) = \omega_o K' \quad (35)$$

- **Odpowiedź prądowa:**

$$I_a(s) = \frac{1}{R_a} \left[ U(s) - K_E \frac{1/T_m K_E}{s + 1/T_m} U(s) + \frac{K_E / J}{s + 1/T_m} \times \frac{T_f}{s} \right] \quad (36)$$

- **Wartość początkowa prądu (prąd zwarcia):**

$$I_{ap} = \lim_{s \rightarrow \infty} s I_a(s) = \frac{U_0}{R_a} = I_{az} \quad (14)$$

- **Prąd rozruchu** (z warunków początkowych:  $t = 0$ ;  $\omega = 0$ ;  $\varpi = 0$ ): dany jest wzorem

$$I_{ar} = \frac{T_f}{K_T} \quad (37)$$

- **Prąd ustalony:**

$$I_u = \lim_{s \rightarrow 0} s I_a(s) = \frac{U_o}{R_a} - \frac{U_o}{R_a} + \frac{K_E J R_a T_f}{J K_E K_T R_a} = \frac{T_f}{K_T} = I_{ar} \quad (38)$$

- **Początkowe przyspieszenie kątowe**

$$X(s) = s\Omega(s) = sG_{\Sigma 3}(s)U(s) \quad (39)$$

$$\chi_p = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 \left[ \frac{1/K_E T_m}{s+1/T_m} \times \frac{U_o}{s} - \frac{1/J}{s+1/T_m} \times \frac{T_f}{s} \right] = \frac{U_o}{K_E T_m} - \frac{T_f}{j} = \frac{M_p = T_f}{j} \quad (40)$$

Tu wykorzystano (18).

### 3.5. Model 4 – $L_a = 0$ ; $K_D \neq 0$ ; $T_f \neq 0$ ; sterowanie napięciowe

Ze schematu (rys.1) , przy poczynionych założeniach, wynikają niżej podane zależności (patrz model 2):

- **Transmitancja**

$$G_{\Sigma 4}(s) = \frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{\frac{1}{K_E T_m}}{s + \left(\frac{1}{T_B} + \frac{1}{T_m}\right)} - \frac{\frac{1}{J}}{s + \left(\frac{1}{T_B} + \frac{1}{T_m}\right)} \times \frac{T_f}{U(s)} \quad (41)$$

- **Wartość końcowa prędkości kątowej przy wymuszeniu skokowym**

$$\Omega(s) = \frac{1/K_E T_m}{s + (1/T_B + 1/T_m)} U(s) - \frac{1/J}{s + (1/T_B + 1/T_m)} \times \frac{T_f}{s}$$

$$\Omega_u = \lim_{s \rightarrow 0} s\Omega(s) = \frac{T_B U_0}{K_E (T_B + T_m)} - \frac{T_f}{J} \times \frac{T_B T_m}{T_B + T_m}$$

przy

$$U(s) = \frac{U_0}{s}$$

Po uwzględnieniu poprzednio wprowadzonych oznaczeń otrzymuje się:

$$\Omega_u = K\omega_0 \left(1 - \frac{I_{ar}}{I_{az}}\right) = KK' \omega_0 \quad (42)$$

- **Odpowiedź prądowa**

$$I_a(s) = \frac{1}{R_a} \left[ U(s) - K_E \frac{1/K_E T_m}{s + (1/T_B + 1/T_m)} U_o(s) + \frac{K_E J}{s + (1/T_B + 1/T_m)} \times \frac{T_f}{s} \right] \quad (43)$$

- **Wartość początkowa prądu (prąd zwarcia)**

$$I_{ap} = \lim_{s \rightarrow \infty} s I_a(s) = \frac{U_o}{R_a} = I_{az} \quad (14)$$

- **Prąd rozruchu z warunków początkowych**  
dany jest wzorem (37)

- **Prąd ustalony**

$$I_u = \lim_{s \rightarrow 0} s I_a(s) = \frac{U_0}{R_a} \left( 1 - \frac{T_B}{T_B + T_m} \right) + \frac{T_f K_E T_m}{J R_a} \times \frac{T_B}{T_B + T_m}$$

po wykorzystaniu poprzednio wprowadzonych oznaczeń daje to:

$$I_u = (1 - KK') I_{az} \quad (44)$$

- **Początkowe przyspieszenie kątowe**

$$X_p(s) = s\Omega(s) = sG_{\Sigma 4}(s)U(s) \quad (45)$$

$$\chi_p = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 \left[ \frac{1/K_E T_m}{s + (1/T_b + 1/T_m)} \times \frac{U_0}{s} - \frac{1/j}{s + (1/T_B + 1/T_m)} \times \frac{T_f}{s} \right] = \frac{M_p - T_f}{J} \quad (46)$$

to jest to samo, co w modelu 3.

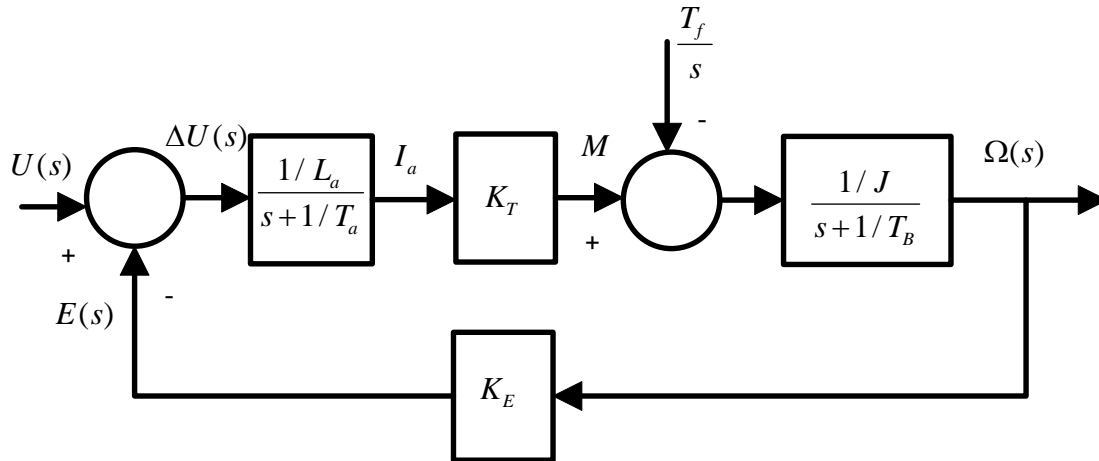
## 4. MODELE GRUPY II

### 4.1. Model 5 – $L_a \neq 0$ ; $K_D = 0$ ; $T_f \neq 0$ ; sterowanie napięciowe

Ze schematu (rys.4) , przy poczynionych założeniach, wynikają niżej podane zależności:

- **Transmitancja:**

$$G_5(s) = \frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{\frac{1/L_a}{s+1/T_a} K_T \frac{1}{sJ}}{\frac{1/L_a}{s+1/T_a} K_T K_E \frac{1}{sJ} + 1} = \frac{1}{T_m T_a K_E} \frac{1}{s^2 + s \frac{1}{T_a} + \frac{1}{T_a T_m}} \quad (47)$$



Rys.4. Schemat blokowy w przypadku  $L_a \neq 0$  i sterowania napięciowego.

Powyższą transmitancję spotyka się często podaną w postaci:

$$G_5(s) = \frac{1}{K_E [1 + sT_m (1 + sT_a)]} = \frac{1}{K_E (1 + sT_m + s^2 T_m T_a)} \quad (48)$$

Przy analizie układów regulacji, a zwłaszcza przy syntezy regulatorów, jest wygodne korzystanie z postaci transmitancji, w której są jawnie wykazane

zastępcze stałe czasowe, będące pierwiastkami wielomianu mianownika. Z założenia o stabilności serwośnika wynika, że wyróżnik mianownika musi być dodatni, co ma miejsce przy:

$$T_m > 4T_a \quad (49)$$

i co prowadzi do zależności:

$$s_1 = \frac{-T_m - \sqrt{T_m^2 - 4T_a T_m}}{2T_m T_a} \Rightarrow T_{15} = \frac{T_m}{2} - \sqrt{\left(\frac{T_m}{2}\right)^2 - T_m T_a} \quad (50a)$$

$$s_2 = \frac{-T_m + \sqrt{T_m^2 - 4T_a T_m}}{2T_m T_a} \Rightarrow T_{25} = \frac{T_m}{2} + \sqrt{\left(\frac{T_m}{2}\right)^2 - T_m T_a} \quad (50b)$$

oraz do postaci transmitancji:

$$G_5(s) = \frac{1}{K_E (1 + sT_{15})(1 + sT_{25})} \quad (51)$$

- **Wartość końcowa prędkości kątowej przy wymuszeniu skokowym:**

$$\Omega_u = \lim_{s \rightarrow 0} sG_5(s) \frac{U_o}{s} = \frac{U_o}{K_E} = \omega_o \quad (52)$$

- **Odpowiedź prądowa:**

$$I_a(s) = \frac{1/L_a}{s + 1/T_a} \left[ 1 - \frac{1}{1 + sT_m(1 + sT_a)} \right] U(s) \quad (53)$$

- **Wartość początkowa prądu przy wymuszeniu skokowym:**

$$I_{ap} = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{1/L_a}{s + 1/T_a} \left[ 1 - \frac{1}{1 + sT_m(1 + sT_a)} \right] \frac{U_o}{s} = 0 \quad (54)$$

- **Prąd rozruchu** (z warunków początkowych) – dany jest wzorem(15)
- **Prąd ustalony:**

$$I_u = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1/L_a}{s + 1/T_a} \left[ 1 - \frac{1}{1 + sT_m(1 + sT_a)} \right] \frac{U_o}{s} = 0 \quad (55)$$

- **Początkowe przyspieszenie kątowe:**

$$X(s) = s\Omega(s) = sG_5(s)U(s)$$

$$\chi_p = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 \left\{ \frac{1}{K_E [1 + sT_m(1 + sT_a)]} \right\} \frac{U_o}{s} = 0 \quad (56)$$

co zgadza się ze wzorem (54).

#### 4.2. Model 6 – $L_a \neq 0$ ; $K_D \neq 0$ ; $T_f = 0$ ; sterowanie napięciowe

Ze schematu na rys. 4, przy poczynionych założeniach wynika:

- **Transmitancja:**

$$G_6(s) = \frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{\frac{1/L_a}{s + 1/T_a} K_T \frac{1/J}{s + 1/T_B}}{1 + K_E \frac{1/L_a}{s + 1/T_a} K_T \frac{1/J}{s + 1/T_B}} = \frac{\frac{1}{T_a T_m K_E}}{s^2 + s\left(\frac{1}{T_a} + \frac{1}{T_B}\right) + \left(\frac{1}{T_m T_a} + \frac{1}{T_a T_B}\right)} \quad (57)$$

Tę transmitancję przedstawia się również w postaci:

$$G_6(s) = \frac{1}{K_E \left[ T_m T_a s^2 + T_m \left( 1 + \frac{T_a}{T_B} \right) s + \left( 1 + \frac{T_m}{T_B} \right) \right]} \quad (58)$$

Podobnie jak w przypadku modelu 5 (poprzedniego), może zachodzić potrzeba wyrażenia transmitancji za pomocą zastępczych stałych czasowych. Przy założeniu dodatniej wartości wyróżnika wielomianu w mianowniku otrzymuje się zastępcze stałe czasowe:



$$T_{16} = \frac{T_m}{2} \times \frac{1 + T_a/T_B}{1 + T_m/T_B} - \sqrt{\left(\frac{T_m}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1 + T_a/T_B}{1 + T_m/T_B}\right)^2 - \frac{T_m T_a}{1 + T_m/T_B}} \quad (59a)$$

$$T_{26} = \frac{T_m}{2} \times \frac{1 + T_a/T_B}{1 + T_m/T_B} + \sqrt{\left(\frac{T_m}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1 + T_a/T_B}{1 + T_m/T_B}\right)^2 - \frac{T_m T_a}{1 + T_m/T_B}} \quad (59b)$$

oraz transmitancję w postaci:

$$G_6(s) = \frac{1}{K_E (1 + sT_{16})(1 + sT_{26})(1 + T_m/T_B)} \quad (60)$$

- **Wartość końcowa prędkości kątowej przy wymuszeniu skokowym:**

$$\Omega_u = \lim_{s \rightarrow 0} s G_6(s) \frac{U_o}{s} = \frac{T_B}{T_m + T_B} \times \frac{U_o}{K_E} = K \omega_0 \quad (61)$$

- **Odpowiedź prądowa:**

$$I_s(s) = \frac{1/L_a}{s + 1/T_a} \left[ 1 - \frac{1}{T_m T_a s^2 + T_m \left(1 + \frac{T_a}{T_B}\right) s + \left(1 + \frac{T_m}{T_B}\right)} \right] U(s) \quad (62)$$

- **Wartość początkowa prądu;**

$$I_{ap}(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{1/L_a}{s + 1/T_a} \left[ 1 - \frac{1}{T_m T_a s^2 + T_m \left(1 + \frac{T_a}{T_B}\right) s + \left(1 + \frac{T_m}{T_B}\right)} \right] \times \frac{U_o}{s} = 0 \quad (63)$$

- **Prąd rozruchu** (z warunków początkowych) – dany jest wzorem (15)

- **Prąd ustalony:**

$$I_u(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1/L_a}{s + 1/T_a} \left[ 1 - \frac{1}{T_m T_a s^2 + T_m \left(1 + \frac{T_a}{T_B}\right) s + \left(1 + \frac{T_m}{T_B}\right)} \right] \times \frac{U_o}{s} = (1 - K) I_{az} \quad (64)$$

- **Początkowe przyspieszenie kątowe:**

$$\chi_p = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 \frac{1}{K_E [T_m T_a s^2 + T_m \left(1 + \frac{T_a}{T_B}\right) s + \left(1 + \frac{T_m}{T_B}\right)]} \times \frac{U_o}{s} = 0 \quad (65)$$

#### 4.3. Model 7 – $L_a \neq 0$ ; $K_D = 0$ ; $T_f \neq 0$ ; sterowanie napięciowe

Ze schematu na rys.4, przy poczynionych założeniach wynika:

- **Model Transmitancja:**

$$G_{\Sigma 7}(s) = \frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{K_T \frac{1/L_a}{s + 1/T_a} \times \frac{1}{Js}}{1 + K_E K_T \frac{1/L_a}{s + 1/T_a} \times \frac{1}{Js}} - \frac{1/Js}{1 + K_E K_T \frac{1/L_a}{s + 1/T_a} \times \frac{1}{Js}} \times \frac{T_f}{sU(s)}$$

Po wykonaniu obliczeń otrzymuje się:

$$G_{\Sigma 7}(s) = \frac{1}{K_E (T_m T_a s^2 + T_m s + 1)} - \frac{T_a T_m (s + 1/T_a) (1/J)}{T_m T_a s^2 + T_m s + 1} \times \frac{T_f}{sU(s)} \quad (66)$$

Stałe czasowe zastępcze, określone przez pierwiastki wielomianu mianownika, są takie same jak w modelu 5; określa to kolejną postać transmitancji:

$$G_{\Sigma 7}(s) = \frac{1}{K_E (1 + sT_{15})(1 + sT_{25})} - \frac{T_a T_m (s + 1/T_a) (1/J)}{(1 + sT_{15})(1 + sT_{25})} \times \frac{T_t}{sU(s)} \quad (67)$$

- **Wartość końcowa prędkości kątowej przy wymuszeniu skokowym:**

$$\Omega_u = \lim_{s \rightarrow 0} (G_{\Sigma 7} \times \frac{U_o}{s}) = \frac{U_o}{K_E} \frac{T_m T_f}{J} = \frac{U_o}{K_E} (1 - \frac{I_{ar}}{I_{az}}) = K' \omega_0 \quad (68)$$

- **Odpowiedź prądowa:**

$$I_a(s) = \frac{1/L_a}{s + 1/T_a} U(s) [1 - K_E G_{\Sigma 7}(s)] \quad (69)$$

- **Wartość początkowa prądu:**

$$I_{ap}(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{1/L_a}{s + 1/T_a} \left[ \frac{U_o}{s} - \frac{1}{T_m T_a s^2 + T_m s + 1} \times \frac{U_o}{s} + K_E \frac{T_a T_m (s + 1/T_a)(1/J)}{T_m T_a s^2 + T_m s + 1} \times \frac{T_f}{s} \right] = 0 \quad (70)$$

- **Prąd rozruchu** (z warunków początkowych) dany jest wzorem (37)
- **Prąd ustalony:**

$$I_u(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1/L_a}{s + 1/T_a} \left[ \frac{U_o}{s} - \frac{1}{T_m T_a s^2 + T_m s + 1} \times \frac{U_o}{s} + K_E \frac{T_a T_m (s + 1/T_a)(1/J)}{T_m T_a s^2 + T_m s + 1} \times \frac{T_f}{s} \right] = \frac{T_f}{K_T} = I_{ar} \quad (71)$$

lub inaczej, według (34):

$$I_u = I_{ar} = (1 - K') I_{az}$$

przy

$$I_{az} = \frac{U_o}{R_a} \quad (72)$$

- **Początkowe przyspieszenie kątowe:**

$$\chi_p = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 \left[ \frac{1}{K_E (T_m T_a s^2 + T_m s + 1)} \times \frac{U_o}{s} - \frac{T_a T_m (s + 1/T_a)(1/J)}{T_m T_a s^2 + T_m s + 1} \times \frac{T_f}{s} \right] = -\frac{T_f}{J} \quad (73)$$

Występuje więc opóźnienie rozruchu.

#### 4.4. Model 8 – $L_a \neq 0$ ; $K_D \neq 0$ ; $T_f \neq 0$ ; sterowanie napięciowe

Ze schematu na rys.4, przy poczynionych założeniach wynika:

- **Transmitancja** (po uwzględnieniu obliczeń z modeli 6 i 7):

$$G_{\Sigma 8}(s) = \frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{1}{K_E [T_m T_a s^2 + T_m (1 + T_a/T_B) s + (1 + T_m/T_B)]} +$$

$$- \frac{T_m (1 + s T_a) (1/J)}{T_m T_a s^2 + T_m (1 + T_a/T_B) s + (1 + T_n/T_B)} \times \frac{T_f}{s U(s)} = G_8 + G_{T8} \quad (74)$$

Stałe czasowe zastępcze, wynikające z pierwiastków wielomianu mianownika, są takie same jak w modelu 6; kolejna postać transmitancji będzie więc:

$$G_{\Sigma 8}(s) = \frac{1}{K_E (1 + s T_{16})(1 + s T_{26})(1 + T_m/T_B)} - \frac{T_n (1 + s T_a) (1/J)}{(1 + s T_{16})(1 + s T_{26})(1 + T_m/T)} \times \frac{T_f}{s U(s)} \quad (75)$$

**Wartość końcowa prędkości kątowej przy wymuszeniu skokowym:**

$$\Omega_u = \lim_{s \rightarrow 0} [s G_{\Sigma 8}(s) \times \frac{U_o}{s}] = \frac{U_o T_B}{K_E (T_m + T_B)} - \frac{T_f T_m T_B}{J (T_m + T_B)} = \omega_o K \left( -\frac{I_{ar}}{I_{az}} \right) = \omega_o K K' \quad (76)$$

- **Odpowiedź prądowa:**

$$I_a(s) = \frac{1/L_a}{s + 1/T_a} U(s) [1 - K_{E8} G_8(s)] \quad (77)$$

- **Wartość początkowa prądu:**

$$I_{ap} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1/L_a}{s + 1/T_a} \left\{ s \frac{U_o}{s} [1 - K_E G_8(s)] + s K_E G_{T8}(s) \right\} = 0 \quad (78)$$

- **Prąd rozruchu** (z warunków początkowych):

$$\begin{aligned}
 I_u &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1/L_a}{s + 1/T_a} \left\{ s \frac{U_o}{s} [1 - K_E G_8(s)] + s K_E G_{T8}(s) \right\} = \\
 &= \frac{1}{R_a} \left[ U_o - U_o \frac{T_B}{T_B + T_m} + \frac{T_f T_m T_B K_E}{J(T_B + T_m)} \right] = (1 - KK') I_{az}
 \end{aligned} \tag{79}$$

- **Początkowe przyspieszenie kątowe:**

$$\chi_p = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 \left[ G_8(s) \frac{U_o}{s} + G_{T8}(s) \right] = -\frac{T_f}{s} \tag{80}$$

Podobnie jak w modelu 7 występuje tu opóźnienie rozruchu.

## 5. Uwagi końcowe

Podany systematyczny wywód liniowych modeli matematycznych serwośilników prądu stałego umożliwia uwzględnienie wszystkich ich rodzajów pracy, a zatem prawidłową analizę układów napędowych z tymi silnikami.

## LITERATURA

1. Lord W., Huang J.H.: *DC motor model parameters*, IEEE Transactions on Industrial Electronics and Control Instrumentation, 1976, IECI-23, No 3, 335-337.
2. Nowacki P., Szklarski L., Górecki H.: *Podstawy teorii układów regulacji automatycznej*, Warszawa, PWN, 1970 r.
3. Pásek Z.: *Nový způsob určení základních dynamických parametrů stejnosměrného motoru*. Elektrotech. Obz., t.51, 1961, nr 3.
4. Sinha N. K., di Cenzo C, D., Szabados B.: *Modelling of DC Motors for Control Applications*. IEEE Transactions on Industrial Electronics and Control Instrumentation, 1974, IECI-21, No 2, May, 84-88.

Rękopis dostarczono, dnia 21.10.2002 r.

Opiniował: **Sławomir Wiak, Jarosław Zadrozny (jr)**

LINEAR MODELS OF DC SERVOMOTORS –  
– SYSTEMATISATION

Tadeusz MISSALA<sup>1)</sup>

**ABSTRACT** *The dynamic properties of the DC servomotors are described by the set of parameters: armature polar moment of inertia –  $J$ ; voltage constant –  $K_E$ ; viscous damping constant –  $K_D$ ; electromagnetic torque constant –  $K_T$ ; dry friction torque –  $T_f$ ; armature resistance –  $R_a$ ; armature inductance –  $L_a$  and resulting parameters: armature electromagnetic time constant –  $T_a$ ; electromechanical time constant –  $T_m$ ; inertia time constant –  $T_B$ . In relation to the servomotor construction ( permanent magnet motor or electromagnetic excited motor), the kind of source of supply (voltage source or current source) and work conditions (dry friction is low or high), some of the motor parameters can be neglected by the dynamic analysis, what leads to diversity of mathematical models. The formula (1) to (9) present the basis set of equations.*

*The diversity of models is illustrated on the block diagrams – figures 1 to 4. The diagrams – figures 1 and 4 present the case of voltage source supply, figures 2 and 3 - the case of current source supply.*

*The formula (11), (20), (33) and (41) present the transfer functions of four mathematical models, which are developed on the basis of the diagram, fig.1. The formula (27) and (30) present the transfer functions derived from the diagrams fig.2 and 3. The formula (48), (58), (67) and (75) – the transfer functions derived from diagram, fig.4. The remaining formulas describe the other characteristics of the motors.*

*The systematic presentation of the dynamic characteristics of the DC servomotors is intended as a facility by the analysis of motion systems .*

---

<sup>1)</sup> Prof., Ph.D.Eng., Industrial Research Institute for Automation and Measurements, Quality Manager, Al. Jerozolimskie 202, 02-486 Warszawa, tel. +(4822)8740402, fax +(4822)8740220, e-mail: tmissala@sg.piap.waw.pl