

Michał RUSINEK*, Wiesław RAKOWSKI*

NAPRĘŻENIA STYKOWE PRZY WSPÓŁPRACY KÓŁ ZĘBATYCH Z POWŁOKAMI OSADZONYMI NA SPRĘŻYSTYM PODŁOŻU

STRESS IN CONTACT AREA OF GEAR TEETH WITH COATINGS DEPOSITED ON ELASTIC SUBSTRATE

Słowa kluczowe:

teoria Hertza, materiał warstwowy, model kontaktu, modelowanie naprężeń

Key words:

Hertz theory, layered material, stress modeling, teeth gear

Streszczenie

Analizowano możliwość zastosowania teorii Hertza do przypadku styku skoncentrowanego elementów pokrytych powłoką osadzoną na sprężystym podłożu. Badano rozkład naprężeń w miejscu styku elementów, których powierzchnie zostały umocnione poprzez obróbkę powierzchniową. Gradient twardości i moduł sprężystości materiału w głąb warstwy wierzchniej wyznaczono w badaniach indentacyjnych. Na potrzeby analizy zostały wprowadzone założenia: powłoka idealnie przylega do podłoża, właściwości materiału powłoki w miejscach równo oddalonych od powierzchni są jednakowe, grubość powłoki na

* AGH Akademia Górniczo-Hutnicza, Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki, Al. Mickiewicza 30, 30-059 Kraków, e-mail: rusinek@agh.edu.pl, rakowski@agh.edu.pl.

obydwu stykających się elementach jest jednakowa, styk odbywa się bez poślizgu. Wyniki badań dowodzą, że teorię Hertza można stosować do przypadku materiałów warstwowych poprzez połączenie rozwiązań analitycznych z eksperymentem numerycznym.

WPROWADZENIE

Powszechne zastosowanie materiałów pokrytych powłoką do elementów maszyn pracujących stykowo wymusza potrzebę znalezienia prostej a zarazem dokładnej metody wyznaczania naprężeń w strefie styku dla tego typu materiałów. Potrzeba ta podyktowana jest coraz większą miniaturyzacją elementów maszyn przy wzroście ich obciążenia. Drugim czynnikiem wpływającym na prace nad metodami wyznaczania naprężeń w strefie styku jest chęć sterowania właściwościami materiału warstwy wierzchniej.

Podstawową teorią opisującą naprężenia stykowe jest teoria Hertza. Opiera się ona na następujących założeniach:

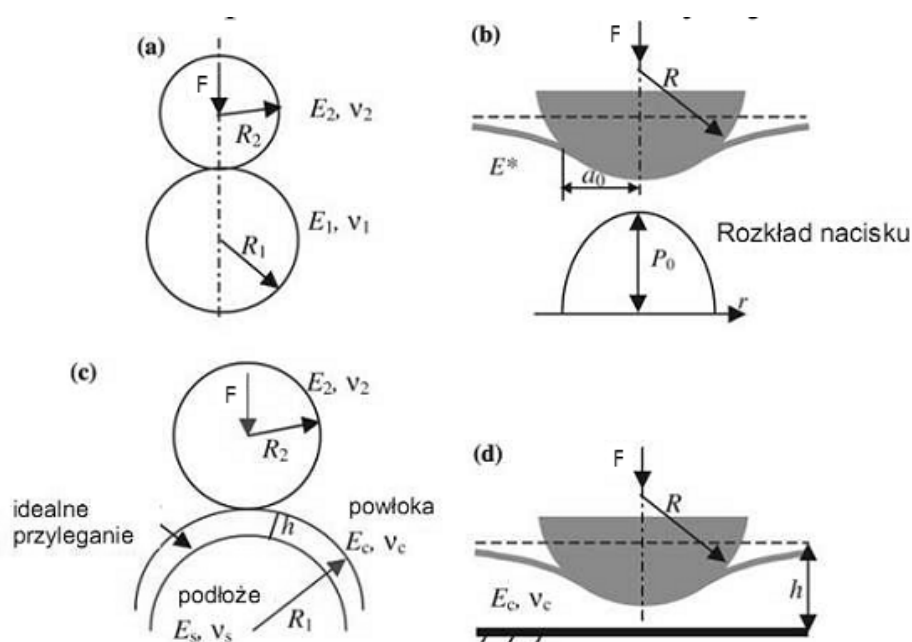
- materiały stykających się ciał są jednorodne i izotropowe,
- obydwa materiały spełnią prawo Hooke'a,
- przy docisku ciał występują tylko naprężenia normalne,
- powierzchnia styku jest ciągła oraz mała w stosunku do rozmiarów stykających się ciał.

Z powyższych założeń wynika, że teoria Hertza nie obejmuje materiałów pokrytych powłoką. Materiały te nie są jednorodne i izotropowe, jak również nie spełniają prawa Hooke'a [L. 5]. W niniejszym opracowaniu została podjęta próba adaptacji teorii Hertza do materiałów pokrytych powłoką, osadzoną na sprężystym podłożu.

ZASTĘPCZY MODEL KONTAKTU

Kontakt zębów współpracujących kół zębatach możemy zastąpić kontaktem dwóch elastycznych, izotropowych i jednorodnych walców, na które działa obciążenie F . Przypadek ten został przedstawiony na **Rys. 1a**. Materiał każdego z walców charakteryzowany jest przez moduł Younga E_i , oraz współczynnik Poissona ν_i . Walec o promieniu R_1 jest charakteryzowany przez E_1 i ν_1 , a walec o promieniu R_2 charakteryzują E_2 i ν_2 (**Rys. 1**).

Kontakt walców z **Rys. 1a** możemy zastąpić kontaktem sztywnego walca z półprzestrzenią sprężystą, zakładając że powierzchnia kontaktu dwóch walców jest bardzo mała w stosunku do ich długości oraz że nie występują naprężenia styczne. Zastępczy walec o promieniu R jest obciążony siłą F . Przypadek ten przedstawia **Rys. 1b**.



Rys. 1. Problemy kontaktu: a) kontakt dwóch walców, b) model zastępczy kontaktu dwóch walców, c) kontakt walców pokrytych warstwą wierzchnią, d) model zastępczy ze sztywnym podłożem kontaktu walców z warstwą wierzchnią [L. 1]

Fig. 1. Contact problems: a) with two half-planes; b) with equivalent bodies; c) with a coated half plane; d) with a rigid substrate

Korzystając z klasycznej teorii Hertza, można obliczyć:

- Połowę szerokości pola styku a_0 walca z powierzchnią płaską:

$$a_0 = \sqrt{\frac{4FR}{\pi E^*}} \quad (1)$$

- Maksymalny nacisk kontaktowy p_0 :

$$p_0 = \sqrt{\frac{FE^*}{\pi R}} \quad (2)$$

- Rozkład ciśnień p :

$$p = p_0 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a_0}\right)^2} \quad (3)$$

gdzie:

$$R - \text{promień zastępczego walca} \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (4)$$

$$E^* \text{ – zastępczy moduł } \frac{1}{E^*} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \quad (5)$$

Poprzez wprowadzenie do obliczeń modułu zastępczego E^* , stają się możliwe do wykonania obliczenia dla różnych par materiałów.

PRZYPADEK SPRĘŻYSTEGO PODŁOŻA

Na powierzchni jednego z walców z **Rys. 1a** zostaje osadzona powłoka z innego materiału, co obrazuje **Rys. 1c**. Powłoka ta idealnie przylega do podłoża i jest charakteryzowana przez: jej grubość h , E_c i ν_c . Drugi wałek charakteryzują: promień R , E_s i ν_s [**L. 2**]. Do tego przypadku nie można stosować klasycznej teorii Hertza. Dlatego zachodzi potrzeba rozszerzenia jej o FFT (*Fast Fourier Transform*) oraz eksperyment numeryczny [**L. 6**].

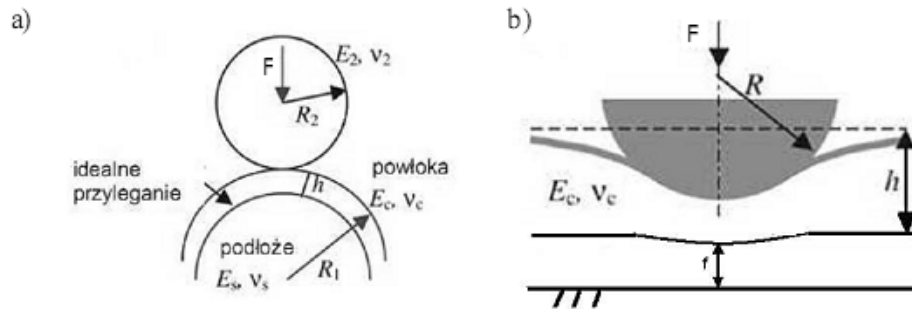
W ten sposób uzyskujemy moduł zastępczy E_i^* , który przedstawia wzór 6:

$$E_i^* = E_c^* \cdot \frac{1 - (\lambda + \kappa + 4\kappa\alpha^2 H^2) \cdot e^{(-2\alpha H)} + \lambda\kappa \cdot e^{(-4\alpha H)}}{1 + 4\alpha H\kappa \cdot e^{(-2\alpha H)} - \lambda\kappa \cdot e^{(-4\alpha H)}}, \quad i=1,2 \quad (6)$$

Wstawiając moduł E_i^* z równania 6 w miejsce E_1 i E_2 w równaniu (5) otrzymujemy:

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1}{E_1^*} + \frac{1}{E_2^*} \quad (7)$$

Przypadek, kiedy to podłoże charakteryzuje się pewną sprężystością (odkształcalnością), jest w rozważaniach znacznie trudniejszym przypadkiem od przypadku powłoki osadzonej na sztywnym podłożu [**L. 1**].



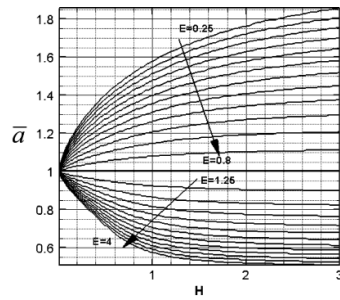
Rys. 2. Problemy kontaktu: a) kontakt walców pokrytych warstwą wierzchnią, b) model zastępczy ze sprężystym podłożem kontaktu walców z warstwą wierzchnią [L. 2]

Fig. 2. Contact problems: a) with a coated half plane; b) with an elastic substrate

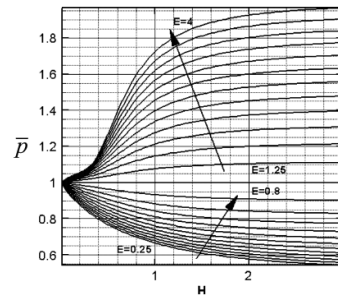
Na początku, dzięki symulacji numerycznej, możliwe jest określenie połowy szerokości pola styku a_{num} oraz maksymalne naciski kontaktu p_{num} . Dzieląc te wartości odpowiednio przez a_{0s} i p_{0s} uzyskujemy parametry [L. 7]:

$$\bar{a} = \frac{a_{num}}{a_{0s}}, \quad \bar{p} = \frac{p_{num}}{p_{0s}} \quad (8)$$

Rozkład krzywych tych parametrów ze względu na $E = \frac{E_c^*}{E_s^*}$ i bezwymiarowy współczynnik grubości warstwy wierzchniej H przedstawiają: **Rys. 3 i 4**:



Rys. 3. Połowa szerokości pola styku
Fig. 3. Half-width contact field

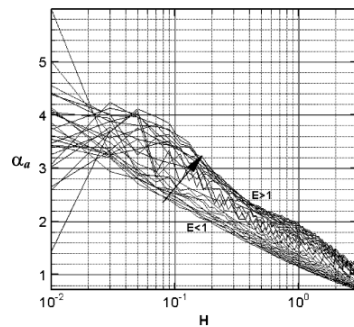


Rys. 4. Maksymalna siła nacisku
Fig. 4. Maximum contact pressure

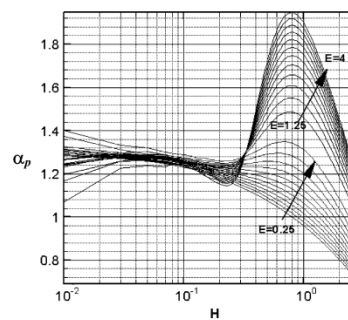
Można zauważyć, że kształt krzywych jest związany ze stosunkiem modułów E . Rysunki przedstawiają krzywe dla przypadku

$$\frac{a}{h} \in [0, 2; 1], \quad \nu_c = 0, 3, \quad E_c \in [50, 800 \text{ GPa}], \quad E_s > 10^4 E_c \quad E \in [0, 25; 4] \quad \text{i} \quad H \in [0, 3].$$

Natomiast wartości parametrów α_a i α_p w zależności od E i H zostały zaprezentowane na **Rys. 5 i 6**:



Rys. 5. Wartość parametru α_a
Fig. 5. Values of the parameter α_a



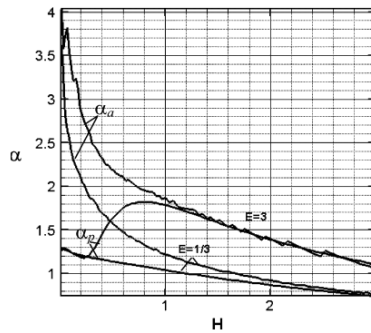
Rys. 6. Wartość parametru α_p
Fig. 6. Values of the parameter α_p

Ze względu na fakt zależności kształtu krzywych od E można wybrać spośród krzywych z **Rys. 5** i **6** reprezentantów zgodnie z kryterium:

$$\alpha_p(E) = \begin{cases} \alpha_p(1/3) - (1/E - 3)/16, & E \in [1/4; 1/3] \\ 1,25 + [\alpha_p(1/3) - 1,25]/(3E), & E \in [1/3; 1] \\ 1,25 + E[\alpha_p(3) - 1,25]/3, & E \in [1; 3] \\ \alpha_p(3) - (E - 3)/12, & E \in [3; 4] \end{cases} \quad \text{dla maksymalnej siły docisku} \quad (9)$$

$$\alpha_a(E) = \begin{cases} \alpha_a(1/3) - (1/E - 3)/16, & E < 1 \\ \alpha_a(3) + (E - 3)/12, & E > 1 \end{cases} \quad \text{dla szerokości pola styku} \quad (10)$$

Rysunek 7 przedstawia wybrane krzywe zależne od H .



Rys. 7. Reprezentacja krzywych α_a i α_p dla sprężystego podłoża
Fig. 7. Representative curve α_a i α_p for elastic substrate

Porównując wartości przewidywane równań (1), (2), (3) oraz (6) z wartościami uzyskanymi podczas eksperymentu numerycznego (z założeniami jak dla równań (9) i (10)). Stwierdzić można, że dla wszystkich przypadków z **Rys. 5** i **6** rozbieżność między wynikami nie przekracza jednego procenta.

WNIOSKI

Analizując wyniki otrzymane z badań nad możliwością zastosowania teorii Hertza do przypadku styku skoncentrowanego elementów pokrytych powłoką, można wysunąć następujące wnioski:

- moduł E_i^* jest zależny od:
 - a) modułu Younga,
 - b) współczynnika Poissona,
 - c) grubości powłoki,
 - d) parametru α .

- Wyniki badań dowodzą, że możliwe jest rozszerzenie stosowalności teorii Hertza na przypadek materiału warstwowego poprzez połączenie rozwiązania analitycznego z wynikiem eksperymentu numerycznego.
- Grubość warstwy wierzchniej h wpływa:
 - wprost proporcjonalnie na parametr:

$$\bar{a} \text{ (dla } E \in [0, 25; 0, 8])$$

$$\bar{p} \text{ (dla } E \in [1, 25; 4])$$
 - odwrotnie proporcjonalnie na parametr:

$$\bar{a} \text{ (dla } E \in [1, 25; 4])$$

$$\bar{p} \text{ (dla } E \in [0, 25; 0, 8])$$
- Dla wartości $E = 0,8$ krzywe \bar{a} i \bar{p} są funkcjami stałymi postaci $y(x) = 1$.

LITERATURA

1. Rusinek M., Rakowski W.: Naprężenia stykowe przy współpracy kół zębatych pokrytych powłoką. Tribologia, 240 (6/2011) 173–182.
2. Kot M., Rakowski W., Morgiel J., Major Ł.: Metoda wyznaczania nacisku dopuszczalnego w styku skoncentrowanym dla układów powłoka–podłoże. Tribologia, 218 (2/2008) 285–295.
3. Liu S., Peyronnel A., Wang Q. J., Keer M.: An extension of the Hertz theory for 2D coated components. Tribology Letters, Vol. 18, No. 4, April 2005.
4. Zhang X.C., Xu B.S., Wang H.D., Wu Y.X., Jiang Y.: Hertzian contact response of single-layer, functionally graded and sandwich coatings. Materials and Design 28 (2007) 47–54.
5. Holmberg K., Matthews A.: Coatings tribology – Properties, mechanisms, techniques and application in surface engineering. Tribology and Interface Engineering Series 56, Elsevier, Oxford (2009).
6. Saizonou C, Kouitat-Njiwa R, Von Stebut J.: Surface engineering with functionally graded coatings: a numerical study based on the boundary element method. Surf Coat Technol 2002;153:290–7.
7. Fukumasu N.K., Souza R.M.: Numerical analysis of the contact stresses developed during the indentation of coated systems with substrates with orthotropic properties. Surface & Coatings Technology 201 (2006) 4294–4299.

Summary

Due to the increased interest amongst teeth gear manufacturers for an adequate method of controlling the stress field, this paper presents an analysis of the applicability of the Hertz theory to the case of the contact of elements with coated material. The proposed method to determine the contact stress field in this case of contact was developed based on the classic Hertz theory and a specific numerical model. The gradient of hardness and elastic modulus in the material of the surface layer was

measured by indentation. The following assumptions were made: the graded surface layer adheres perfectly to the substrate, the properties of surface layer material in the same distance from the surface are the same, the thickness of surface layer of the both surfaces in contact is the same, and the contact is without sliding. The results show that, by extending the combination of numerical experiments, the Hertz theory can be applied to the case of layered materials.