

**Jan ZWOLAK\***, **Marcin WITEK\*\***

**OPTYMALIZACJA PARAMETRÓW  
GEOMETRYCZNYCH KÓŁ ZĘBATYCH  
W ASPEKCIE MINIMALIZACJI NAPRĘŻEŃ  
KONTAKTOWYCH**

**OPTIMIZATION OF THE GEOMETRICAL PARAMETERS  
OF TOOTHED GEARS IN THE ASPECT OF CONTACT  
STRESS MINIMIZATION**

**Słowa kluczowe:**

koła zębate, optymalizacja, naprężenia kontaktowe, przekładnia zębata  
typu power shift

**Key words:**

gears teeth, optimization, contact stresses, toothed gears transmission  
type power shift

---

\* Uniwersytet Rolniczy im. Hugona Kołłątaja, Katedra Inżynierii i Aparatury Przemysłu Spożywczego, Wydział Technologii Żywności, ul. Balicka 122, 30-149 Kraków, tel. (12) 662-47-62, e-mail: j.zwolak@dr.krakow.pl.

\*\* Politechnika Krakowska, al. Jana Pawła II, 31-864 Kraków, e-mail: mwitek@pk.edu.pl.

## Streszczenie

Koła zębate jako podstawowe elementy wchodzące w skład każdej przekładni zębatej, tworzącej układ napędowy maszyny roboczej, czy dowolnego pojazdu samochodowego narażone są przede wszystkim na naprężenia kontaktowe boku zęba i na naprężenia zginające u podstawy zęba. W pracy analizowane są naprężenia kontaktowe, jakie występują w warstwie wierzchniej boku zęba o zarysie ewolwentowym, podczas przeniesienia obciążeń eksploatacyjnych. Badaniom poddano przekładnię zębatą przełączaną pod obciążeniem (przekładnię power shift), stosowaną w układzie napędowym ładowarki kołowej, która składa się z 12 kół tworzących 7 par zębatach, z 5 wałków i z 3 sprzęgieł umieszczonych na wspólnych wałkach z kołami zębatymi.

## WPROWADZENIE

W kołach zębatych stosowanych w układach napędowych maszyn roboczych występują podczas eksploatacji zmienne wartości przenoszonych momentów obrotowych, generujących tym samym zmienne wartości naprężeń kontaktowych. Zmienność momentów obrotowych pochodzi od oporów jazdy maszyny oraz od oporów wynikających z wykonywanej pracy.

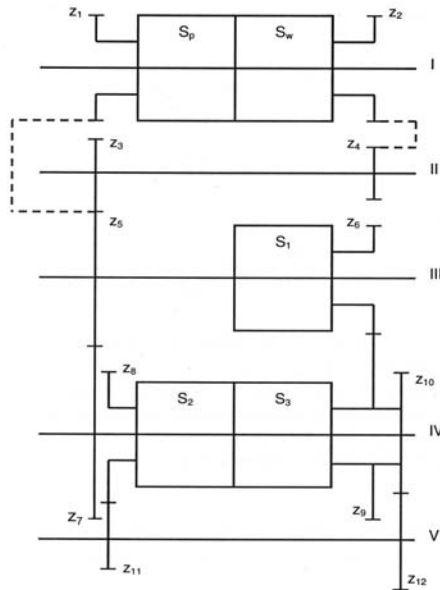
Jeżeli maszyną roboczą będzie ładowarka kołowa wykonująca prace ziemne przy równaniu terenu o zróżnicowanej wiązkości i prace załadunkowe, to zakres zmienności momentu obrotowego będzie stosunkowo duży. Odpowiednio wysokie wartości momentu obrotowego skorelowane są z wysokimi wartościami naprężeń kontaktowych, pod wpływem których zachodzi efekt zmęczeniowego zużywania powierzchniowego warstwy wierzchniej w postaci pittingu. Minimalizacja naprężeń kontaktowych może być prowadzona przez odpowiednie obliczenia parametrów geometrycznych kół zębatach (moduł, liczba zębów, współczynnik korekcji, kąt zarysu, kąt pochylenia linii zęba, szerokość wieńca) wyznaczające w rezultacie parametry zazębienia.

Należy jednak pamiętać o tym, że niektóre z wymienionych parametrów wpływających na obniżenie naprężeń kontaktowych powodują równocześnie wzrost naprężeń zginających. W procesie obliczeń optymalizacyjnych problem ten rozwiązuje się za pomocą odpowiednio sformułowanych kryteriów cząstkowych oraz racjonalnie dobranych współczynników wagowych [L. 7]. W procesie obliczeń kół zębatach z użyciem autorskiego programu [L. 7] konstruktor posiada możliwość optymalizacji

ich parametrów geometrycznych ze względu na akceptowane minimum naprężeń kontaktowych.

## PRZEDMIOT BADAŃ

Przedmiotem badań była przekładnia zębata typu power shift, stosowana w układzie napędowym ładowarki kołowej. Schemat kinematyczny przekładni przedstawiono na **Rys. 1**.

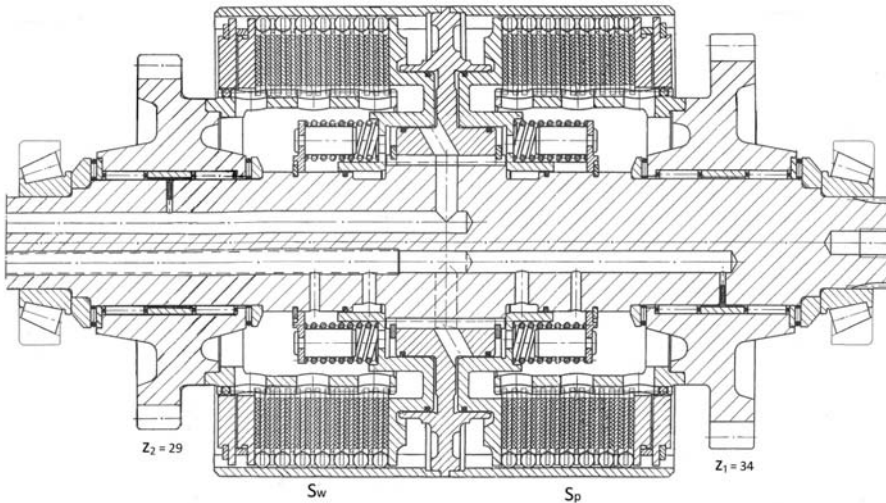


**Rys. 1. Schemat kinematyczny przekładni zębatej typu power shift**

Fig. 1. Kinematic scheme of the toothed gear transmission of the type power shift

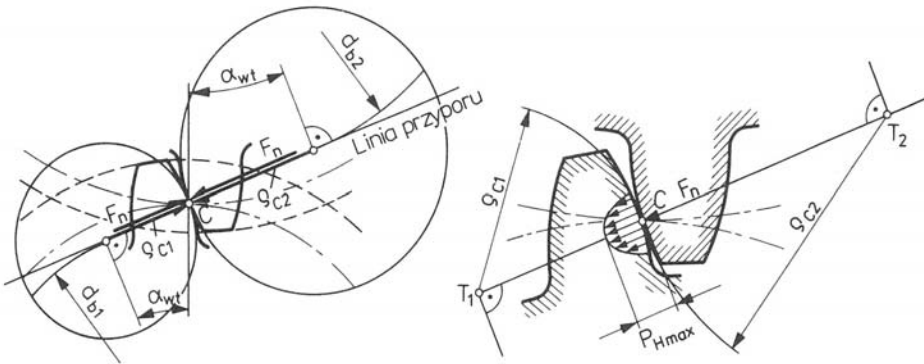
Znamienną cechą badanej przekładni jest to, że występujące w niej koła zębate są w ciągłym zazębieniu, a przełączanie biegów odbywa się za pomocą specjalnych sprzęgieł zespolonych z kołami zębatymi i umieszczonych na wspólnym wałku. Kompletny zespół dwóch kół zębatych  $z_1$  i  $z_2$  i dwóch sprzęgieł  $S_p$  i  $S_w$  z wałkiem wejściowym I przedstawiono na **Rys. 2**.

Naprężenia kontaktowe obliczano w biegunie zazębienia C każdej pary zębatej, występującej w odpowiednim łańcuchu kinematycznym na każdym biegu [L. 1, 2]. Stosowany w obliczeniach model Hertza w odpowiednim odniesieniu do kół zębatych [L. 3, 4, 5, 6, 9, 10–13] przedstawiono na **Rys. 3**.



**Rys. 2. Kompletny zespół wałka I w przekroju osiowym**

Fig. 2. A complete team of shaft I in the axial section



**Rys. 3. Model Hertza stosowany do kół zębnych**

Fig. 3. Model Hertza applied to gears teeth

Przyjęte symbole  $\rho_{c1}$  i  $\rho_{c2}$  na **Rys. 3** oznaczają promienie krzywizny powierzchni ewolwentowej zęba koła napędzającego (1) i koła napędzanego (2), w punkcie styku C, będącym biegunem zazębienia. Punkt ten jest miejscem charakterystycznym na wysokości czynnej zęba, mający zerową prędkość poślizgu współpracujących ze sobą powierzchni bocznych zębów kół zębnych.

## PARAMETRY GEOMETRYCZNE ZĘBÓW KÓŁ ZĘBATYCH A NAPRĘŻENIA KONTAKTOWE

Naprężenia kontaktowe obliczano z uwzględnieniem zmian następujących parametrów charakteryzujących koła zębate: moduł –  $m$ , kąt zarysu –  $\alpha_0$ , współczynnik przesunięcia zarysu –  $x$ , kąt pochylenia linii zęba –  $\beta$ , szerokość wieńca zębatego –  $b$ .

Ze zmianą tych parametrów wiążą się zmiany w charakterystyce zazębienia wyznaczonej przez: czołową liczbę przyporu –  $\varepsilon_\alpha$ , poskokową liczbę przyporu –  $\varepsilon_\beta$ , całkowitą liczbę przyporu –  $\varepsilon_\gamma$ , współczynnik nierównomiernego rozdziału obciążenia na pary zębów w przyporze –  $K_{H\alpha}$ , współczynnik nierównomiernego rozkładu obciążenia wzdłuż linii styku –  $K_{H\beta}$ .

W obliczeniach naprężeń kontaktowych korzystano z programu komputerowego [L. 7], w którym zawarte są wzory [L. 1] uwzględniające wymienione parametry kół zębatach. Program komputerowy umożliwia prowadzenie obliczeń jednorazowych bez optymalizacji oraz z optymalizacją.

Wykonano obliczenia w parach zębatach badanej przekładni z kołami o zębatach prostych, jak też z kołami o zębatach skośnych. W obydwu przypadkach stosowano obciążenie na wale wejściowym  $M = 2000 \text{ Nm}$  i prędkość obrotową  $n = 1800 \text{ min}^{-1}$  jako parametry będące w górnym zakresie widma obciążeń eksploatacyjnych układu napędowego ładowarki kołowej. Wyniki obliczeń naprężeń kontaktowych bez optymalizacji przedstawiono w **Tabeli 1**.

Wyznaczone naprężenia kontaktowe z zastosowaniem optymalizacji parametrów charakteryzujących koła zębata zamieszczono w **Tabeli 2**.

**Tabela 1. Naprężenia kontaktowe przed optymalizacją**

Table 1. Contact stress before optimization

Para zębata	Naprężenia kontaktowe $\sigma_H$ [MPa]			
	$\beta = 0^\circ$		$\beta = 25^\circ$	
	zębnik	koło	zębnik	koło
$z_1:z_5$	1022	1003	991	967
$Z_6:Z_9$	1084	1066	1051	1037
$z_{10}:z_{12}$	1085	1062	1007	1007
$Z_5:Z_7$	1003	682	967	664
$z_8:z_{11}$	945	975	940	961
$z_2:z_4$	1049	1049	1000	1000
$z_3:z_5$	991	1003	944	967

**Tabela 2. Naprężenia kontaktowe po optymalizacji**

Table 2. Contact stress after optimization

Para zębata	Naprężenia kontaktowe $\sigma_H$ [MPa]			
	$\beta = 0^\circ$		$\beta = 25^\circ$	
	zębnik	koło	zębnik	koło
$Z_1:Z_5$	994	976	877	863
$Z_6:Z_9$	1050	1040	918	911
$Z_{10}:Z_{12}$	1051	1007	861	861
$Z_5:Z_7$	976	668	863	554
$Z_8:Z_{11}$	955	973	847	859
$Z_2:Z_4$	1032	1032	907	907
$Z_3:Z_5$	987	976	870	863

Występujące w tabelach pary zębate stanowią kompletny łańcuch kinematyczny rozpatrywanej przekładni. Zamieszczone w nich słowo zębnik odnosi się do koła napędzającego, a więc będą tu koła:  $Z_1, Z_6, Z_{10}, Z_5, Z_8, Z_2, Z_3$ . Natomiast słowo koło – do koła napędzanego, czyli w tym przypadku do:  $Z_5, Z_9, Z_{12}, Z_7, Z_{11}, Z_4, Z_5$ .

Uzupełnienie obliczeń optymalizacyjnych stanowią badania numeryczne (badania własne, tu tylko zasygnalizowane) oparte na MES z wykorzystaniem systemu COSMOS-M w wersji 1.7 [L. 8]. Z wielu uzyskanych wyników na **Rys. 4** przedstawiono charakterystykę rozkładu pola naprężeń, obliczanych w biegunie zazębienia.

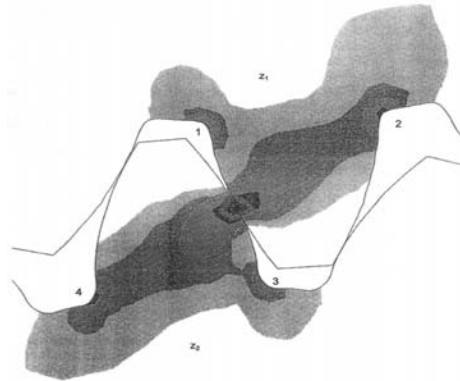
**Rys. 4. Lokalny rozkład pola naprężeń dla punktu przyporu w biegunie zazębienia**

Fig. 4. Local distribution of the field of stresses for the point line of action pole engage

Zauważa się tu, że oprócz naprężeń kontaktowych zlokalizowanych w otoczeniu punktu przyporu występują także naprężenia w pewnej obję-

tości materiału dochodzącej do stopy zęba. Przy stopie zęba koła napędzającego  $z_1$  powstają naprężenia rozciągające po stronie oznaczonej 1, natomiast po stronie 2 naprężenia ściskające. Podobnie stopa zęba koła napędzanego 2, po stronie 3 narażona jest na naprężenia rozciągające, zaś po stronie 4 na naprężenia ściskające.

## PODSUMOWANIE

Wyniki obliczeń naprężeń kontaktowych (**Tabela 1 i 2**) we wszystkich parach zębatych w przypadku zębów prostych są wyższe aniżeli w przypadku zębów skośnych. Relacje takie odnoszą się do par zębatych niepoddawanych optymalizacji, jak również do par zębatych optymalizowanych. Różnice w wartościach liczbowych naprężeń, jak wskazuje **Tabela 1 i 2**, nie są duże, gdyż założone współczynniki wagowe odnoszące się do parametrów podlegających optymalizacji, a mających wpływ na naprężenia kontaktowe, dają im stosunkowo mały udział w globalnym rozwiązaniu rozpatrywanej przekładni jako zadania optymalizacyjnego. Zwiększanie tych samych współczynników wagowych sprawi, że obliczane wartości naprężeń kontaktowych będą mniejsze od zamieszczonych w **Tabeli 2**.

Zamieszczone wyniki obliczeń naprężeń kontaktowych odnoszą się do konkretnej przekładni, której schemat kinematyczny przedstawia **Rys. 1**. Jednakże stosowany w tym przypadku program komputerowy, posiada również możliwości obliczeniowe i optymalizacyjne dowolnej przekładni power shift, a także przekładni klasycznej.

W przypadku szczególnym współpracy kół zębatych, kiedy punkt przyporu znajduje się w biegunie zazębienia, można zauważyć, że istnieje symetria w rozkładzie naprężeń kontaktowych zęba napędzającego  $z_1$  i zęba napędzanego  $z_2$ , co przedstawia **Rys. 4**. Na rysunku tym widać także pole naprężeń w objętości materiału zębów układające się na kierunku linii przyporu. Warto też zauważyć, że w przypadku przyporu, kiedy jest nim biegun zazębienia, utrzymuje się znaczna część objętości materiału wolna od naprężeń, a należąca do głowy współpracujących ze sobą zębów.

**LITERATURA**

1. ISO 6336/ I – III; 1996: Calculation of load capacity of spur and helical gears.
2. Zwolak J.: Projektowanie przekładni zębatych power shift. Przegląd Mechaniczny, nr 2, 2008.
3. Glodez S., Winter H., Stule H. P.: A fracture mechanics model for the wear of gear flanks by pitting. *Wear*, vol. 208, 1997.
4. Yi-Cheng Chen, Chung-Biau Tsay: Stress analysis of a helical gear set with localized bearing contact. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 38, 2002.
5. Simon V.V.: Computer aided loaded tooth contact analysis in cylindrical worm gears. *Journal of Mechanical Design*, vol. 127, 2005.
6. Simon V.V.: Influence of tooth errors and shaft misalignments on loaded tooth contact in cylindrical worm gears. *Mechanism and Machine Theory*, vol. 41, 2006.
7. Martyna M., Zwolak J.: Program obliczeniowy z optymalizacją PRZEKŁADNIA (<http://www.gearbox.com.pl>).
8. Rusiński E.: Metoda elementów skończonych. System COSMOS/M. WKŁ, Warszawa 1994.
9. Jaśkiewicz Z., Wąsiewski A.: Przekładnie walcowe – geometria, wytrzymałość, dokładność wykonania. WKŁ, Warszawa 1992.
10. Li Ting, Pan Cunyun: On grinding manufacture technique and tooth contact and stress analysis of ring-involute spherical gears. *Mechanism and Machine Theory*, vol. 44, 2009.
11. Faydor L. Litvin, Ignacio Gonzalez-Perez, Kenji Yukishima, Alfons Fuentes, Kenichi Hayasaka: Design simulation of meshing and contact stresses for an improved worm gear drive. *Mechanism and Machine Theory*, vol. 42, 2007.
12. Szu-Han Wu, Shyi-Jeng Tsai: Contact stress analysis of skew conical involute gear drives approximate line contact. *Mechanism and Machine Theory*, vol. 44, 2009.
13. Faydor L. Litvin, Ignacio Gonzalez-Perez, Alfonso Fuentes Vecchiato, Bruce D. Hansen, David Binney: Design generation and stress analysis of face-gear drive with helical pinion. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 194, 2005.

**Recenzent:**  
**Karol NADOLNY**



## Summary

**Gear wheels are the basic elements of each gear transmission, which builds the power transmission system of a working machine or any automotive vehicle. Gear wheels are exposed to the contact stress acting on a tooth face and the bending stress at the base of the tooth. This paper analyses the contact stress that occurs in the surface layer of the side of the tooth with an involute tooth profile during operational load transfer. Tests were conducted on the power shift toothed gear that is used in the power transmission system of a wheeled loader. The loader consists of 12 wheels comprising 7 toothed pairs, 5 shafts, and 3 clutches mounted together with the gear wheels on the common shafts.**