

Wiesław RAKOWSKI*, **Michał RUSINEK***

NAPRĘŻENIA STYKOWE PRZY WSPÓŁPRACY KÓŁ ZĘBATYCH POKRYTYCH POWŁOKĄ

STRESS IN CONTACT OF TEETH GEAR WITH COATED MATERIAL

Słowa kluczowe:

teoria Hertza, powłoka, model kontaktu, koła zębate, modelowanie naprężeń

Key words:

Hertz theory, coating, stress modeling, teeth gear

Streszczenie

W artykule przedstawiono analizę możliwości zastosowania teorii Hertza do przypadku styku skoncentrowanego elementów pokrytych powłoką. Przedmiotem analizy był rozkład naprężeń w miejscu styku zębów kół zębatych o zębach prostych, których powierzchnie robocze zostały umocnione przez obróbkę powierzchniową. Gradient twardości i modułu sprężystości materiału w głąb warstwy wierzchniej został przyjęty na podstawie dostępnych danych oraz wyników badań indentacyjnych. Metodę

* AGH Akademia Górniczo-Hutnicza, Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki, 30-065 Kraków, al. A. Mickiewicza 30, e-mail: rusinekm@agh.edu.pl.

wyznaczenia pola naprężeń kontaktowych oparto na analizie teorii Hertza oraz symulacji modelu numerycznego. Przyjęty model numeryczny umożliwia wyznaczenie rozkładu naprężeń w warstwie wierzchniej i głębiej w podłożu oraz określenie miejsca maksymalnej koncentracji tych naprężeń w styku pary zębów. Na potrzeby analizy założono, że: powłoka idealnie przylega do podłoża, własności materiału powłoki w miejscach równo oddalonych od powierzchni są jednakowe, grubość powłoki na obydwu stykających się zębach jest jednakowa, styk zębów odbywa się bez poślizgu. Uzyskane wyniki analizy dowodzą, że teorię Hertza można adaptować do przypadku styku skoncentrowanego elementów pokrytych powłoką, poprzez jej integrację z modelem numerycznym. Informacje zdobyte podczas modelowania numerycznego służą także poprawie dokładności opisu oddziaływań w styku walcowych kół zębatych o zębach prostych.

WPROWADZENIE

Materiały pokryte powłoką są dość powszechnie stosowane w elementach maszyn pracujących stykowo. Nie ma jednak wystarczająco prostej i zarazem dokładnej metody wyznaczania naprężeń w strefie styku dla tego typu materiałów. Pilna potrzeba opracowania takich metod wynika z jednej strony ze wzrastających obciążeń elementów maszyn i ich miniaturyzacji, a drugiej z możliwości precyzyjnego sterowania właściwościami materiału warstwy wierzchniej, dzięki osiągnięciom inżynierii powierzchni.

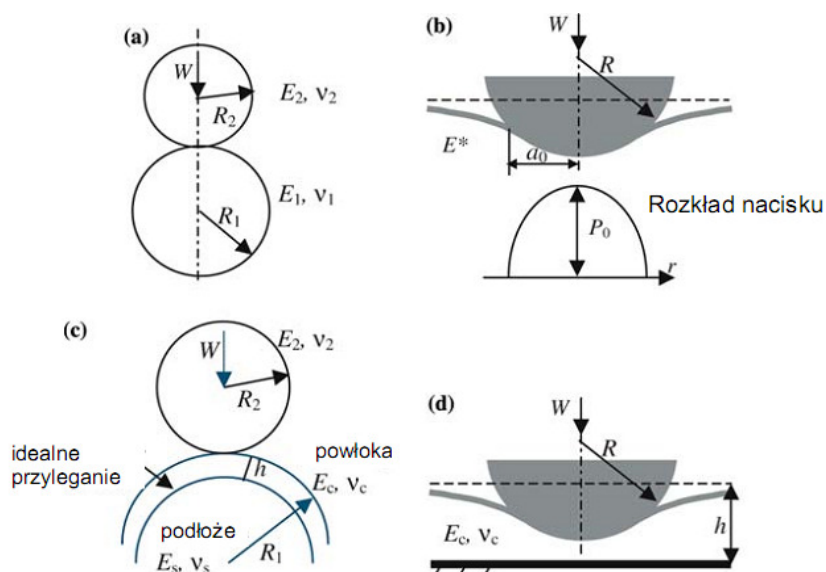
Podstawą do opisu naprężeń stykowych jest teoria Hertza, oparta na następujących założeniach:

- materiał stykających się ciał jest jednorodny i izotropowy,
- materiał spełnia prawo Hooke'a,
- przy docisku ciał występują tylko naprężenia normalne,
- powierzchnia styku jest ciągła oraz mała w stosunku do rozmiarów stykających się ciał.

Materiały pokryte powłoką nie spełniają warunków, sformułowanych przez Hertza w założeniach jego teorii, gdyż przede wszystkim nie są jednorodne i izotropowe. W niniejszym opracowaniu ograniczymy się do przypadku powłoki osadzonej na sztywnym podłożu.

MODEL ZASTĘPCZY KONTAKTU DWÓCH WALCÓW

Na **Rys. 1a** przedstawiono kontakt dwóch elastycznych, izotropowych i jednorodnych walców pod wpływem przyłożonego obciążenia W . Materiał każdego z walców charakteryzowany jest przez moduł Younga E_i i współczynnik Poissona ν_i . Odpowiednio walec o promieniu R_1 charakteryzują E_1 i ν_1 , a walec o promieniu R_2 : E_2 i ν_2 (**Rys. 1**).



Rys. 1. Problemy kontaktu: a) kontakt dwóch walców, b) model zastępczy kontaktu dwóch walców, c) kontakt walców pokrytych warstwą wierzchnią, d) model zastępczy ze sztywnym podłożem kontaktu walców z warstwą wierzchnią [L. 2]

Fig. 1. Contact problems: a) with two half-planes; b) with equivalent bodies; c) with a coated half plane; d) with a rigid substrate [L. 2]

Z założenia powierzchnia kontaktu dwóch walców jest bardzo mała w stosunku do ich długości. Dlatego też kontakt dwóch walców możemy zastąpić kontaktem sztywnego walca o promieniu R obciążonego siłą W , z półprzestrznią sprężystą, co przedstawia **Rys. 1b**. Dzięki klasycznej teorii Hertza możliwe jest obliczenie:

- Połowy szerokości pola styku a_0 walca z powierzchnią płaską:

$$a_0 = \sqrt{\frac{4WR}{\pi E^*}} \quad (1.1)$$

- Maksymalnego nacisku kontaktowego p_0 :

$$p_0 = \sqrt{\frac{WE^*}{\pi R}} \quad (1.2)$$

- Rozkładu ciśnień p :

$$p = p_0 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a_0}\right)^2} \quad (1.3)$$

gdzie:

$$R - \text{promień zastępczego walca. } \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (1.4)$$

$$E^* - \text{zastępczy moduł. } \frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \quad (1.5)$$

Wprowadzenie do teorii Hertza modułu zastępczego umożliwia wykonanie obliczeń dla różnych par materiałów. Jednakże w przypadku przedstawionym na **Rys. 1c**, gdzie na powierzchni walca osadzona jest powłoka z innego materiału, klasyczna teoria Hertza nie sprawdza się. Zakładamy, że powłoka idealnie przylega do podłoża i charakteryzowana jest przez jej grubość h oraz E_c i ν_c , a walec charakteryzują promień R oraz stałe E_s i ν_s . **Rys. 1d** przedstawia szczególny przypadek takiego kontaktu, gdy podłoże pod powłoką jest sztywne.

Dla takiego przypadku moduł zastępczy E_i^* można wyznaczyć ze wzoru:

$$E_i^* = E_c^* \cdot \frac{1 - (\lambda + \kappa + 4\kappa\alpha^2) \cdot e^{(-2\alpha H)} + \lambda\kappa \cdot e^{(-4\alpha H)}}{1 + 4\alpha H \kappa \cdot e^{(-2\alpha H)} - \lambda\kappa \cdot e^{(-4\alpha H)}}, \quad i = 1, 2 \quad (1.6)$$

gdzie:

$$\lambda = 1 - \frac{4(1 - \nu_c)}{1 + \mu(3 - 4\nu_s)} \quad (1.7)$$

$$\kappa = \frac{\mu - 1}{\mu + (3 - 4\nu_c)} \quad (1.8)$$

$$\alpha = \omega \frac{h}{H} \quad (1.9)$$

$$H = \frac{h}{a_{0s}} - \text{sprężyste podłoże} \quad (1.10a)$$

$$H = \frac{h}{a_{0c}} - \text{szttywne podłoże} \quad (1.10b)$$

Wstawiając moduł E_i^* z równania 1.6 w miejsce E_1 i E_2 w równaniu 1.5 otrzymujemy:

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1}{E_1^*} + \frac{1}{E_2^*} \quad (1.11)$$

Takie spojrzenie na kontakt materiałów z osadzoną na nich powłoką jednakże nie jest całkowicie poprawne. Ponieważ tylko w małej ilości przypadków takiego kontaktu można przyjąć, że podłoże jest sztywne. (Ten przypadek zachodzi, gdy przyłożone obciążenie jest bardzo niewielkie a pole naprężeń jest praktycznie zlokalizowane w powłoce). W przeważającej jednak ilości przypadków podłoże charakteryzuje się pewną elastycznością. W przypadkach sztywnego podłoża i podłoża elastycznego z konstytuowaną warstwą wierzchnią, klasyczna teoria Hertza już nie wystarcza. Dlatego też teoria ta musi zostać rozszerzona o Fast Fourier Transform (FFT), lecz również połączona z eksperymentem numerycznym [L. 5].

PRZYPADEK SZTYWNEGO PODŁOŻA

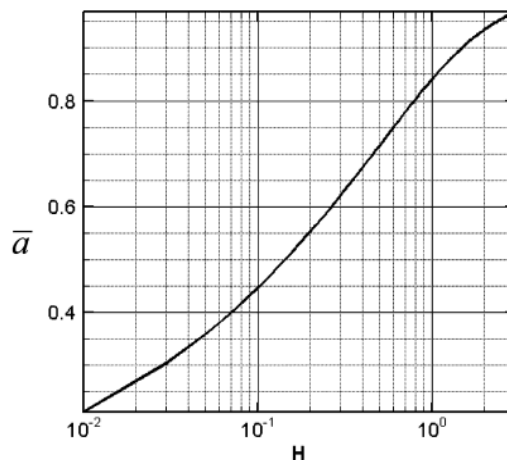
Zakładając, że podłoże jest nieodkształcalne, można stosować do wyliczenia zastępczego modułu Younga równanie 1.6, upraszczając współczynniki λ i κ (1.7 i 1.8) do postaci:

$$\lambda = 4\nu_c - 3, \quad \kappa = \frac{1}{\lambda}$$

Używając symulacji numerycznej, można określić połowę szerokości pola styku a_{num} i maksymalne naciski kontaktu p_{num} . Dzieląc te wartości odpowiednio przez a_{0c} i p_{0c} , uzyskujemy bezwymiarowe parametry [L. 6]:

$$\bar{a} = \frac{a_{num}}{a_{0c}}, \quad \bar{p} = \frac{p_{num}}{p_{0c}}.$$

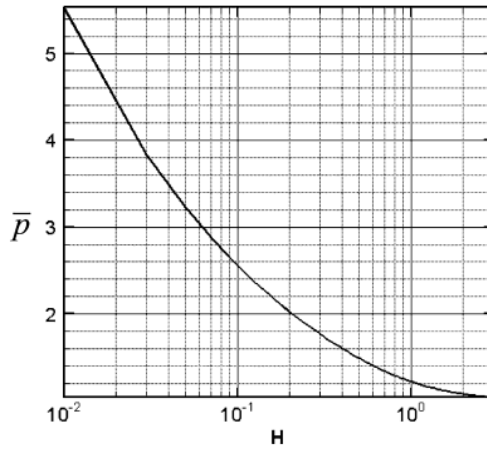
W ten sposób można wykreślić krzywe zależności: \bar{a} od H przedstawiona na **Rys. 3a** oraz \bar{p} od H przedstawionej na **Rys. 3b**:



Rys. 3a. Połowa szerokości pola styku

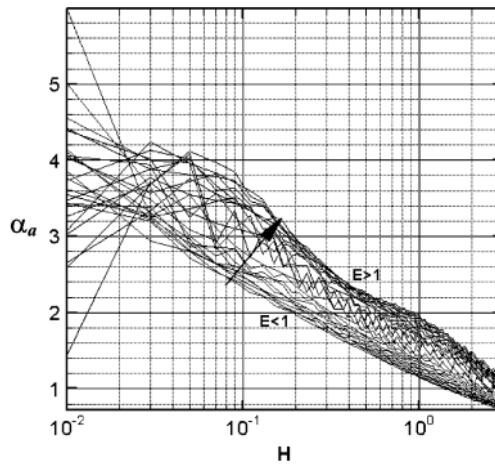
Fig. 3a. Half-width contact field

Wraz ze wzrostem H parametr \bar{a} także rośnie (**Rys. 3a**), a \bar{p} maleje (**Rys. 3b**). Przykładowe krzywe zostały sporządzone dla przypadku $\frac{a}{h} \in [0, 2; 1]$, $\nu_c = 0, 3$, $E_c \in [50, 800 \text{ GPa}]$, $E_s > 10^4 E_c$, jak można zauważyć wszystkie wartości z zależności $\frac{\bar{a}}{H}$ i $\frac{\bar{p}}{H}$ układają się wzdłuż jednej krzywej, co wskazuje na fakt niezależności wyników od E_c . Również parametr α zależny od $E = \frac{E_c^*}{E_s}$ został przyjęty na podstawie wyników liczbowych. Rozrzut wartości α_a i α_p w zależności od E i H został zaprezentowany na **Rys. 3c** i **Rys. 3d**.



Rys. 3b. Maksymalna siła nacisku

Fig. 3b. Maximum contact pressure

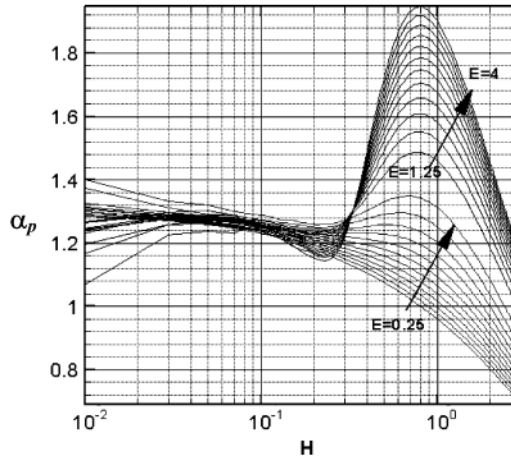


Rys. 3c. Wartość parametru α_a

Fig. 3c. Values of the parameter α_a

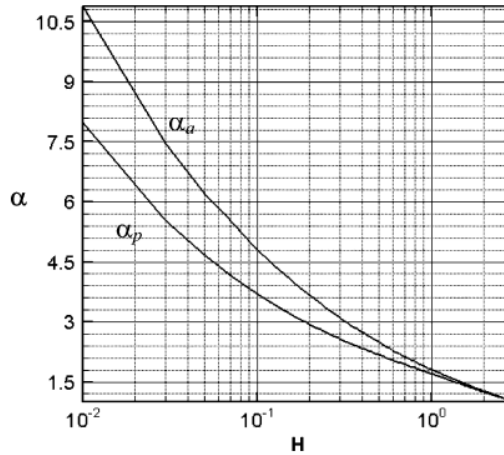
Dla sztywnego podłoża zbiór krzywych jest reprezentowany tylko poprzez jedną krzywą odpowiednio dla α_a i α_p , które przedstawia **Rys. 3e**.

Krzywe z **Rys. 3e** odpowiadają również pokryciu stalową warstwą wierzchnią o parametrach: $E_c = 200 \text{ GPa}$ i $\nu_c = 0,3$ sztywnego podłoża. Dlatego też podczas doboru grubości warstwy wierzchniej można kierować się krzywą z **Rys. 3e** [L. 4].



Rys. 3d. Wartość parametru α_p

Fig. 3d. Values of the parameter α_p



Rys. 3e. Reprezentacja krzywych α_a i α_p dla sztywnego podłoża

Fig. 3e. Representative curve α_a i α_p for rigid substrate

WNIOSKI

Analizując wyniki otrzymane z badań nad możliwością zastosowania teorii Hertza do przypadku styku skoncentrowanego elementów pokrytych powłoką, można wysunąć następujące wnioski:

- moduł E_i^* jest zależny od:

- a) modułu Younga,
 - b) współczynnika Poissona,
 - c) grubości powłoki,
 - d) parametru α .
- Parametr α jest określony na podstawie wyników liczbowych.
 - Na podstawie rozszerzonej teorii Hertza można prognozować długość kontaktu i maksymalne naciski kontaktowe dla różnych par materiałów.
 - Grubość warstwy wierzchniej wpływa wprost proporcjonalnie na parametr \bar{a} , a odwrotnie proporcjonalnie na parametr \bar{p} ,
 - Parametry \bar{a} i \bar{p} są niezależne od E_c ,
 - Zależność pomiędzy parametrem \bar{a} a H nie jest liniowa,
 - Dla $H = 0,5 \cdot 10^{-1}$ ($\bar{a} \cong 0,27$) i $H = 10^0$ ($\bar{a} \cong 0,85$), funkcja posiada punkty przegięcia,
 - Krzywa zależności \bar{p} od H ma postać funkcji potęgowej $y = ax^{-1}$.

Prace nad adaptacją teorii Hertza do przypadku powłoki osadzonej na sprężystym podłożu i przypadku materiałów pokrytych „gradientową” warstwą wierzchnią już trwają. Wyniki zostaną przedstawione w najbliższych opracowaniach.

LITERATURA

1. Kot M., Rakowski W., Morgiel J., Major Ł.: Metoda wyznaczania nacisku dopuszczalnego w styku skoncentrowanym dla układów powłoka–podłoże. *Tribologia*, 218 (2/2008), s. 285–295.
2. Liu S., Peyronnel A., Wang Q. J., Keer M.: An extension of the Hertz theory for 2D coated components. *Tribology Letters*, Vol. 18, No. 4, April 2005.
3. Zhang X.C., Xu B.S., Wang H.D., Wu Y.X., Jiang Y.: Hertzian contact response of single-layer, functionally graded and sandwich coatings. *Materials and Design* 28 (2007), p. 47–54.
4. Holmberg K., Matthews A.: *Coatings tribology – Properties, mechanisms, techniques and application in surface engineering*. Tribology and Interface Engineering Series 56, Elsevier, Oxford (2009).
5. Saizonou C., Kouitit-Njiwa R., Von Stebut J.: Surface engineering with functionally graded coatings: a numerical study based on the boundary element method. *Surf Coat Technol* 2002, 153:290–7.

6. Fukumasu N.K., Souza R.M.: Numerical analysis of the contact stresses developed during the indentation of coated systems with substrates with orthotropic properties. *Surface & Coatings Technology* 201 (2006), p. 4294–4299.
7. Bhushan B., Peng W.: Contact mechanics of multilayered rough surfaces. *ASME Appl. Mech. Rev.* 55(2002), p. 435–479.

Recenzent:
Witold PIEKOSZEWSKI

Summary

Due to the increased interest amongst tooth gear manufacturers for an adequate method of stress field controlling, this paper presents an analysis of the applicability of Hertz theory to the case of contact of the elements with coated material. The proposed method to determine the contact stress field in this case of contact was developed based on the classic Hertz theory and a specific numerical model. Gradient of hardness and elastic modulus in the material of the surface layer was measured by indentation and partly taken from databases. The adopted numerical model allows the determination of the stress distribution in the surface layer, in the core material below this layer, and allows the determination of the maximum stress concentration. The following assumptions were made: (1) The graded surface layer adheres perfectly to the substrate. (2) The properties of surface layer material at the same distance from the surface are the same. (3) The thickness of surface layer of both surfaces in contact is the same, and the contact is without sliding.

The results of analysis indicate that Hertz theory can be adapted to the case of the contact of elements made with coated material through its integration with a numerical model. An example for analysis was the stress distribution in the contact of gears with straight teeth, whose working surfaces have been hardened by glow discharge. Information gained using this method can provide a contribution to improve the accuracy of the description of the interaction in the contact of surfaces with coated material.