

Miron CZERNIEC*
Jurij CZERNIEC**

BADANIE MECHANIKI WSPÓLDZIAŁANIA STYKOWEGO ZE ZUŻYCIEM W UKŁADACH CYLINDRYCZNYCH O WEWNĘTRZNYM STYKU HERTZOWSKIM

RESEARCH OF TRIBOCONTACT INTERACTION MECHANICS IN CYLINDRICAL CONJUNCTIONS WITH INSIDE HERTZ CONTACT

Słowa kluczowe:

połączenia cylindryczne o styku wewnętrznym, wzór Hertza, obszar jego zastosowania, zużycie, zmodyfikowany wzór Hertza, naciski stykowe, trwałość

Key words:

cylindrical conjunction with inside contact, Hertz formula, its using limits, wear, modified Hertz formula, contact pressure, longevity

* Politechnika Lubelska, Wydział Mechaniczny, Instytut Technologicznych Systemów Informacyjnych, ul. Nadbystrzycka 36, 20-618 Lublin, tel.: (81) 538-42-76, e-mail:m.czerniec@pollub.pl.

** Państwowy Uniwersytet Pedagogiczny w Drohobycz, ul. Ivana Franki 24, 82-100 Drohobych (Ukraina).

Streszczenie

Na podstawie metody autorskiej badania mechaniki styku w połączeniu cylindrycznym oraz kinetyki jego zużycia przy tarciu ślizgowym przeprowadzono analizę numeryczną obszaru zastosowania klasycznego wzoru Hertza dla określenia nacisków stykowych. Zmodyfikowano wzory Hertza celem oszacowania maksymalnych nacisków stykowych oraz kąta styku przy zużyciu wskazanych układów tribologicznych. Wyniki numerycznej oceny według obu metod wstępnych nacisków stykowych oraz ich zmiany w wyniku zużycia podano w postaci graficznej. Został przebadany wpływ obciążenia oraz luzu promieniowego w połączeniu na jego trwałość.

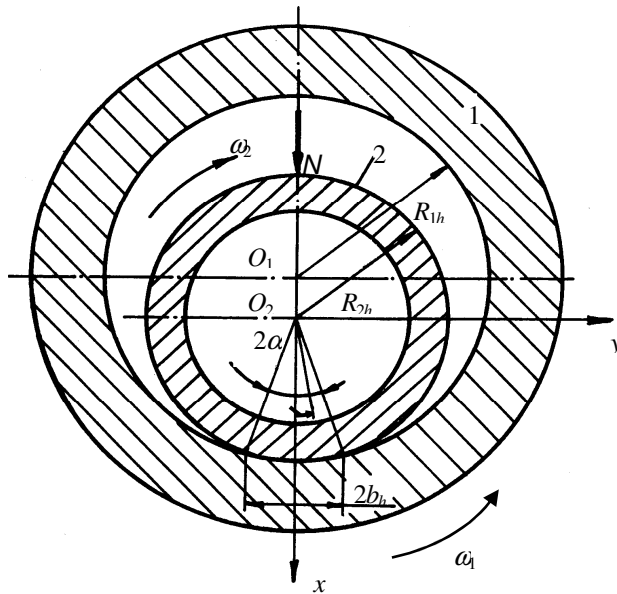
WPROWADZENIE

W układach cylindrycznych o styku wewnętrznym ciał ze średnicami o różnej wielkości na oszacowanie jego parametrów używane są wzory Hertza. Problem ten prezentowano w pracach [L. 4–8]. W [L. 9] podano przegląd tych prac oraz analizę wyników badań. Zauważono, że „... dla półkąta styku $\alpha_0 \in (0^\circ, 20^\circ)$ teoria Hertza wystarczająco dokładnie opisuje zjawiska stykowe w parze wał–tuleja. Gdy $\alpha_0 > 30^\circ$, rozbieżności stają się bardzo wyraźne”. Więc jeżeli obciążenie w układzie jest dość znaczne lub luz promieniowy zmniejsza się, to kąt styku rośnie wskutek czego wzory Hertza nie mogą być stosowane. Wtedy są stosowane rozwiązania zagadnienia o styku wewnętrznym ciał o zbliżonych średnicach wg metod teorii sprężystości [L. 1, 4–8].

Celem oszacowania parametrów styku w układach tribologicznych, tj. maksymalnych nacisków stykowych $p_{02}^{(H)}$ w trakcie zużycia oraz bieżącego kąta styku $2\alpha_0^{(H)}$ po raz pierwszy w pracy [L. 3] przedstawiono zmodyfikowane wzory typu Hertza. Jednak przeprowadzone badania [L. 3] nie pozwalają ustalić zakres zastosowania klasycznych lub zmodyfikowanych wzorów Hertza w przypadku wzrostu strefy styku. W tym celu w niniejszym artykule podjęto próbę rozwiązania takiego zagadnienia, gdy a priori wybrano, że $2\alpha_0 = 2^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 40^\circ, 60^\circ, 80^\circ$.

METODA ROZWIĄZANIA ZAGADNIENIA KONTAKTOWEGO

W układzie cylindrycznym (**Rys. 1**) element 2 o promieniu zewnętrznym R_{2h} współdziała z elementem 1 o promieniu wewnętrznym R_{1h} pod wpływem siły promieniowej N . Elementy układu przemieszczają się w ruchu obrotowym względem siebie z przeciwnie skierowanymi prędkościami kątowymi ω_1 i ω_2 . Między elementami występuje luz promieniowy $\varepsilon = R_{1h} - R_{2h}$. W zależności od wielkości obciążenia N oraz luzu ε w układzie występować będzie styk hertzowski, gdzie strefa styku jest mała w stosunku do wielkości promieni ciał lub niehertzowski, gdzie strefa styku $2b_h = 2R_{2h} \alpha_{0h}$ będzie porównywalna z promieniami ciał.



Rys. 1. Schemat układu cylindrycznego tribologicznego

Fig. 1. Scheme of tribological cylindrical system

Ponieważ wstępnie został wybrany początkowy kąt kontaktu $2\alpha_0$ (gdy zużycie równe zero), to obciążenie N , które zapewni go, określa się z równania równowagi [**L. 2**]

$$N = 4\pi R_2 E_0 \varepsilon \sin^2(\alpha_0 / 4) \quad (1)$$

gdzie: $E_0 = e \cos^2(\alpha_0 / 4) / R_2$,

$$\begin{aligned}
 e &= 4E_1E_2 / Z, \\
 Z &= 2(1 + \kappa)(1 + \mu)E, \\
 E_1 &= E_2 - \text{moduły Younga materiałów,} \\
 \mu_1 &= \mu_2 - \text{liczby Poissona,} \\
 \kappa &= 3 - 4\mu - \text{stała Kołosowa-Muscheliszwilego.}
 \end{aligned}$$

Maksymalne naciski wstępne stykowe obliczamy zgodnie ze wzorem [L. 2]

$$p_0 \approx \varepsilon E_0 \operatorname{tg}(\alpha_0 / 2) \quad (2)$$

Według wartości N określonych zgodnie z (1) zostały obliczone wielkości $p_0^{(H)}$ oraz $\alpha_0^{(H)}$:

$$p_0^{(H)} = 0,564 \sqrt{\frac{NE}{2(1-\mu^2)} \frac{\varepsilon}{R_1 R_2}} \quad (3)$$

$$\alpha_0^{(H)} = \frac{1,128}{R_2} \sqrt{\frac{2N(1-\mu^2)}{E} \frac{R_1 R_2}{\varepsilon}} \quad (4)$$

W przypadku zużycia elementów układu bieżący półkął styku α_{0h} określa się [L. 2] z równania typu (1) dla obliczonych obciążeń N :

$$N = 4\pi R_2 E_h (\varepsilon + \tilde{h}_2 \tilde{\Sigma}_2) \sin^2 \frac{\alpha_{0h}}{4} \quad (5)$$

gdzie: $\tilde{h}_2 = h_2 K_t^{(2)}$, $\tilde{\Sigma}_2 = 1 + h'_2 / K_t^{(2)}$,

$h'_2 = h_1 / h_2$ – zużycie względne,

h_1, h_2 – odpowiednio zużycie promieniowe elementów 1 i 2,

$\alpha_0 / \pi \leq K_t^{(k)} \leq 1$ – współczynnik pokrycia,

$k = 1; 2$ – numeracja elementów układu,

$E_h = e \cos^2(\alpha_{0h} / 4) / R_2$,

$$h'_2 = \frac{B_2 (\tau_{02})^{m_2} (\tau_{\max} - \tau_{01})^{m_1}}{B_1 (\tau_{01})^{m_1} (\tau_{\max} - \tau_{02})^{m_2}} K_t^{(1)}, K_t^{(1)} = K_t^{(2)} = \alpha_0 / \pi,$$

$\tau_{\max} = fp_0$ – jednostkowa siła tarcia,

f – współczynnik tarcia ślizgowego,

B_k, m_k, τ_{0k} – wskaźniki odporności materiałów na zużycie w badanej parze tribologicznej [L. 1, 2].

Maksymalne naciski stykowe oblicza się zgodnie z metodą [L. 2] następująco:

$$p_{0h} = p_0(1 + C_h \tilde{h}_2 \tilde{\Sigma}_2) \quad (6)$$

gdzie: $C_h = 7,5 \sqrt{\alpha_0 / \alpha_{0h}} / R_2 \sqrt{10^3 \tilde{\epsilon}}$, $\tilde{\epsilon} \equiv \epsilon$ (w metrach).

Odpowiednio przy zużyciu elementów układu parametry styku tribologicznego ustala się według zmodyfikowanych wzorów Hertza [L. 3]:

$$p_{0h}^{(H)} = 0,564 \sqrt{\frac{NE}{2(1-\mu^2)} \frac{R_{1h} - R_{2h}}{R_{1h} R_{2h}}} \quad (7)$$

$$\alpha_{0h}^{(H)} = \frac{1,128}{R_{2h}} \sqrt{\frac{2N(1-\mu^2)}{E} \frac{R_{1h} R_{2h}}{R_{1h} - R_{2h}}} \quad (8)$$

gdzie: $R_{1h} = R_1 + h_1 = R_1 + h_2 h'_2 / K_t^{(2)}$, $K_t^{(2)} = \alpha_0 / \pi$;

$$R_{2h} = R_2 - h_2.$$

TRWAŁOŚĆ UKŁADU

Na obliczenie trwałości układu stosujemy następujące wzory [L. 3]:

a) w przypadku funkcji nacisków w postaci (6):

$$t_2 = \frac{B_2 (\tau_{02})^{m_2}}{v S'_2 (1 - m_2) \tilde{\Sigma}_2 K_t^{(2)}} \left[S_2^{1-m_2} - (S_2 + S'_2 \tilde{h}_2 \tilde{\Sigma}_2)^{1-m_2} \right] \quad (9)$$

gdzie: $S_2 = fp_0 - \tau_{20}$, $S'_2 = fp_0 C_h$, $K_t^{(2)} = \alpha_0 / \pi$.

b) w przypadku funkcji nacisków w postaci (3):

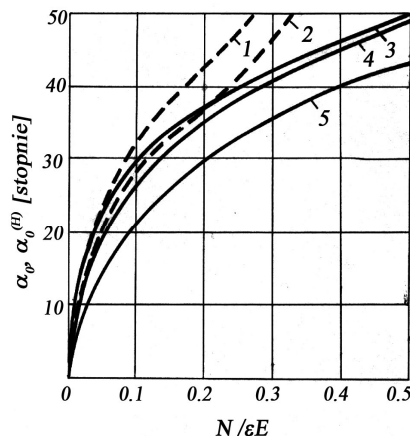
$$t_2^{(H)} = A_1 \int_0^{h_2^*} \left(A_2 \sqrt{\frac{1}{R_2 - A_3 h_2} - \frac{1}{R_1 + A_4 h_2}} - \tau_{02} \right)^{-m_2} dh_2 \quad (10)$$

gdzie: $A_1 = B_2 (\tau_{02})^{m_2} / \nu K_t^{(2)}$, $A_2 = \sqrt{0,318 f^2 NE / (1 - \mu^2)}$, $A_3 = 1$, $A_4 = h_2' / K_t^{(2)}$, $K_t^{(2)} = \alpha_0^{(H)} / \pi$.

WYNIKI BADAŃ

Numeryczne rozwiązanie zagadnienia zostało przeprowadzone dla układu, gdzie oba elementy są ze stali konstrukcyjnej (element 1 – stal 40HN, element 2 – stal 45) hartowanych i wysoko odpuszonych, dla których wskaźniki odporności na zużycie: $B_2 = 1,2 \cdot 10^9$, $m_2 = 0,25$, $\tau_{02} = 0,1$ MPa, $B_1 = 1,4 \cdot 10^9$, $m_1 = 0,17$, $\tau_{01} = \tau_{02}$. Luzy promieniowe w układzie $\varepsilon = 0,2$; 1; 2; 10; 20 mm. Inne dane: $R_2 = 52$ mm, $R_1 = R_2 + \varepsilon$; $\tilde{h}_2 = h_2 = 5$ mm, $f = 0,13$; $E = 2,1 \cdot 10^5$ MPa, $\mu = 0,3$; $\nu = 3$ m/sek.

Wyniki obliczeń są podane na **Rys. 2–5**. Zwłaszcza **Rys. 2** określa zależność półkąta styku od obciążenia oraz luzu promieniowego.



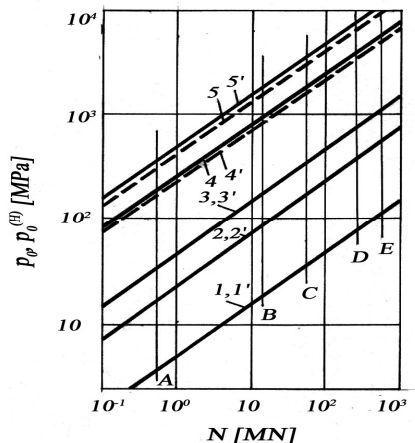
Rys. 2. Zależność półkąta styku od czynnika $N/\varepsilon E$: 1 – Hertz dla $\varepsilon = 20$ mm; 2 – Hertz dla $\varepsilon = 0,2$ mm; 3 – wg [L. 6]; 4 – wg warunku (1), 4 – wg [L. 5]; 5 – wg [L. 7]

Fig. 2. The dependency of half-angle of connection from $N/\varepsilon E$: 1 – Hertz for $\varepsilon = 20$ mm; 2 – Hertz for $\varepsilon = 0,2$ mm; 3 – according to [L. 6]; 4 – according to condition (1), 4 – according to [L. 5]; 5 – according to [L. 7]

Rozwiązanie wg Hertza w przypadku małych wartości ε daje wyniki zbliżone do metody [L. 6] i wystarczająco dobrze zbliżone do metody [L. 7] oraz przedstawionej metody autorskiej nawet przy $\alpha_0 \approx 40^\circ$. Ze zwiększeniem wielkości luzu promieniowego różnice pomiędzy α_0 i $\alpha_0^{(H)}$ stają się dość znaczne już od $\alpha_0 > 20^\circ$. Ponieważ w łożyskach ślizgowych luzy promieniowe są małe, to wzór Hertza na naciski stykowe może być stosowany dla przypadku, gdy kąty styku $2\alpha_0$ osiągają wartość $70\text{--}80^\circ$.

Na Rys. 3 przedstawiono zmianę maksymalnych wstępnych nacisków stykowych wg Hertza (linie kreskowe) oraz wg metody autorskiej (linie ciągłe). Analiza podanych wykresów wskazuje, że tylko w przypadku dużych luzów (od 10 mm) pojawia się pewna różnica pomiędzy p_0 a $p_0^{(H)}$.

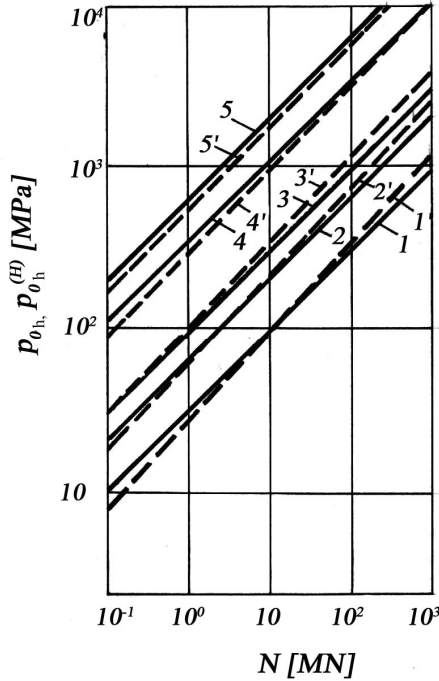
Dla określonych wartości N , odpowiadających wybranym półkątom styku α_0 , obliczono wg zależności (4) półkąty styku $\alpha_0^{(H)}$. Odpowiednio na Rys. 3 wskazano ich wartości liniami cienkimi: A – $\alpha_0 = 1^\circ$, $\alpha_0^{(H)} = 1,16^\circ$; B – $\alpha_0 = 5^\circ$, $\alpha_0^{(H)} = 5,8^\circ$; C – $\alpha_0 = 10^\circ$, $\alpha_0^{(H)} = 11,7^\circ$; D – $\alpha_0 = 20^\circ$, $\alpha_0^{(H)} = 24^\circ$; E – $\alpha_0 = 30^\circ$, $\alpha_0^{(H)} = 37,6^\circ$. Ze zwiększeniem N różnicę pomiędzy α_0 a $\alpha_0^{(H)}$ wzrastają od 16 do 25,3%.



Rys. 3. Wpływ N oraz ε na naciski stykowe p_0 , $p_0^{(H)}$: 1; 1' – $\varepsilon = 0,2$ mm; 2; 2' – $\varepsilon = 1$ mm; 3; 3' – $\varepsilon = 2$ mm; 4; 4' – $\varepsilon = 10$ mm; 5; 5' – $\varepsilon = 20$ mm

Fig. 3. Influence of N and ε on pressures contact p_0 , $p_0^{(H)}$: 1; 1' – $\varepsilon = 0,2$ mm; 2; 2' – $\varepsilon = 1$ mm; 3; 3' – $\varepsilon = 2$ mm; 4; 4' – $\varepsilon = 10$ mm; 5; 5' – $\varepsilon = 20$ mm

Wpływ zużycia elementów układu tribologicznego na maksymalne naciski stykowe p_{0h} oraz $p_{0h}^{(H)}$ podano na **Rys. 4**.

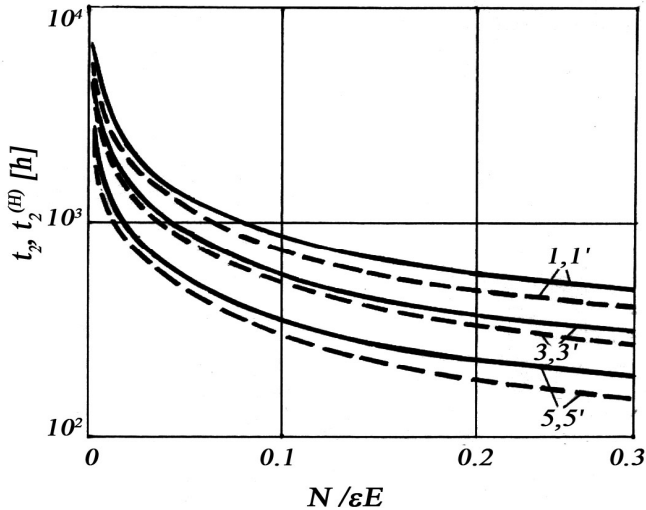


Rys. 4. Wpływ N oraz ε na naciski stykowe p_{0h} , $p_{0h}^{(H)}$ przy zużyciu $\tilde{h}_2 = h_2 = 5$ mm

Fig. 4. Influence of N and ε on pressures contact p_{0h} , $p_{0h}^{(H)}$ with wear $\tilde{h}_2 = h_2 = 5$ mm

Analiza wykresów (**Rys. 3** oraz **Rys. 4**) wskazuje, że wzrost maksymalnych nacisków stykowych wskutek zużycia obliczonych wg obu rozpatrzonych metod dla niewielkich (0,2 mm) oraz średnich (1 oraz 2 mm) luzów jest znacznie większy jak w przypadku większych luzów (wykresy 4, 4' oraz 5, 5').

Według zależności (9), (10) obliczono trwałość elementu 2 przy zużyciu dopuszczalnym $\tilde{h}_2 = h_2 = 5$ mm. Odpowiednie wykresy podano na **Rys. 5**. Ze zwiększeniem obciążenia oraz luzu promieniowego jego trwałość t_2 oraz $t_2^{(H)}$ maleje.



Rys. 5. Trwałość elementu 2

Fig. 5. Longevity of the element 2

WNIOSKI

1. Korelacja wartości kątów styku obliczonych wg metod [L. 2, 3, 5, 6] oraz metody Hertza jest wystarczająco dobra do wartości $2\alpha_0 \leq 70^\circ$ w przypadku małego luzu promieniowego ($\epsilon = 0,2$ mm).
2. Przy znacznej wielkości luzu promieniowego wartości kątów styku w wystarczająco dobrym stopniu pokrywają się dla $2\alpha_0 \leq 35...40^\circ$.
3. Maksymalne naciski stykowe p_0 oraz $p_0^{(H)}$ w całym zakresie obciążeń $0,0055$ MN $\leq N \leq 1200$ MN faktycznie pokrywają się dla $\epsilon \leq 6$ mm. Ich korelacja pozostaje też dość dobra w przypadku luzów o znacznej wartości $\epsilon = 10$ mm, a nawet jest zadowalająca przy $\epsilon = 20$ mm (**Rys. 3**).
4. Naciski $p_{0h}^{(H)}$ mają nieco inny charakter zmiany niż naciski $p_0^{(H)}$ (**Rys. 4**).

LITERATURA

1. Andrejkiv A.E., Czerniec M.V.: Ocenka kontaktowego wzajemodziejstvjia tr-uščichsia dietaliej mašin. Naukova Dumka. Kijev 1991.

2. Czerniec M.: Wytrzymałość stykowo-tarciowa oraz trwałość systemów tribotechnicznych ślizgowych. Wyd. Politechniki Lubelskiej. Lublin 2000.
3. Czerniec M. : Możliwości stosowania teorii Hertza do oceny kinetyki zużycia się układów cylindrycznych tribotechnicznych. XXIV Jesienna Szkoła Tribologiczna: Polska Tribologia 2000. Teoria i Praktyka. Krynica Górska, 2000.
4. Gafner S.L., Dobyczin M.N.: K račetu ugła kontakta pri vnutrennem soprikosnovenii cilindričeskich tieł, radiusy kotorych počti ravny, Mašinostroenije, 1973, nr 2, s. 69–74.
5. Panasiuk V.V., Tiepłyj M.J.: Dejaki kontaktni zadači teorii pružnosti. Naukova Dumka. Kijów 1975.
6. Reiš A.S.: Povyšeniye iznosostojkosti stroitielnyh i dorožnyh mašin. Mašinostroenije. Moskva 1986.
7. Štajerman I.J.: Kontaktnaja zadača teorii uprugosti. Gostiechizdat. Moskva-Leningrad 1949.
8. Usov P.P.: Opredelenie zony kontakta i kontaktnyh napriazhenij pri vnutrennem soprikosnovenii cilindričeskich tieł, Mašinovedenie, 1981, nr 6, s. 75–81.
9. Zwierzycki W.: Prognozowanie niezawodności zużywających się elementów maszyn. Wyd. ITeE, Radom 1998.

Summary

On the basis of the author's research method of cylindrical conjunction contact mechanics and wear kinetics during sliding friction, numeral analysis of classical Hertz formula using sphere for contact pressures has been made. Hertz formulas for the valuation of tribocontact pressures and angles during appointed tribosystems wear have been modified. The results of numerical valuation, according to both methods of contact and tribocontact pressures, are presented graphically. Additionally, the influence of loading and rational clearance on its longevity has been investigated.

**Recenzent:
Jan BURCAN**