

Mariusz LEUS\*, Paweł GUTOWSKI\*

**WPŁYW SZTYWNOŚCI STYCZNEJ STYKU  
NA SIŁĘ TARCIA W OBECNOŚCI DRGAŃ  
KONTAKTOWYCH STYCZNYCH WZDŁUŻNYCH**

**THE INFLUENCE OF TANGENTIAL STIFFNESS  
OF THE CONTACT ON FRICTION FORCE  
IN THE PRESENCE OF LONGITUDINAL TANGENTIAL  
VIBRATION**

**Słowa kluczowe:**

siła tarcia, drgania styczne, sztywność styku

**Key-words:**

friction force, tangential vibration, stiffness of contact

**Streszczenie**

W pracy przedstawiono wyniki analizy numerycznej wpływu sztywności stycznej styku na przebieg siły tarcia w obecności drgań kontaktowych stycznych wzdluznych. Przedstawiono także wyznaczone doświadczalnie charakterystyki sztywności stycznej styku stal–stal w funkcji nacisków powierzchniowych dla styków o różnych chropowatościach powierzchni.

---

\* Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie, Katedra Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn, Al. Piastów 19, 70-310 Szczecin, tel. (91) 449 46 83, e-mail: mariusz.leus@zut.edu.pl, pawel.gutowski@zut.edu.pl

Obliczenia wykonano w środowisku Matlab-Simulink przy wykorzystaniu dynamicznego modelu tarcia Dahla. Przebiegi siły tarcia wyznaczone numerycznie dla styku o ściśle określonej sztywności stycznej porównano z odpowiednimi przebiegami wyznaczonymi doświadczalnie dla styku o tej samej sztywności. Uzyskano bardzo dobrą zgodność wyników badań doświadczalnych z wynikami analiz symulacyjnych.

## WPROWADZENIE

Pożądaną własnością w układach dynamicznych jest możliwość sterowania siłą tarcia między przesuwanymi po sobie elementami. W takich przypadkach zastosowanie tradycyjnego smarowania powierzchni styku jest nieprzydatne, gdyż jest to działanie jednokierunkowe, zmniejszające jedynie i to w sposób skokowy siłę tarcia, bez możliwości ponownego szybkiego jej zwiększenia z powodu konieczności usunięcia z powierzchni styku zastosowanego uprzednio środka smarującego.

Przeprowadzone przez autorów badania wykazały, że sterowanie siłą tarcia może być efektywnie zrealizowane poprzez zastosowanie drgań kontaktowych stycznych wzdłużnych o odpowiednio dobranej – sterowanej częstotliwości i amplitudzie prędkości drgań [L. 5–7]. W czasie trwania tych drgań można uzyskać w każdym ich okresie, chwilową zmianę nie tylko wartości, ale również i znaku siły tarcia, co skutkuje odpowiednim zmniejszeniem lub wzrostem wartości siły napędu, za pomocą której realizowany jest ruch przesuwanego elementu. Po usunięciu drgań następuje powrót do stanu wyjściowego.

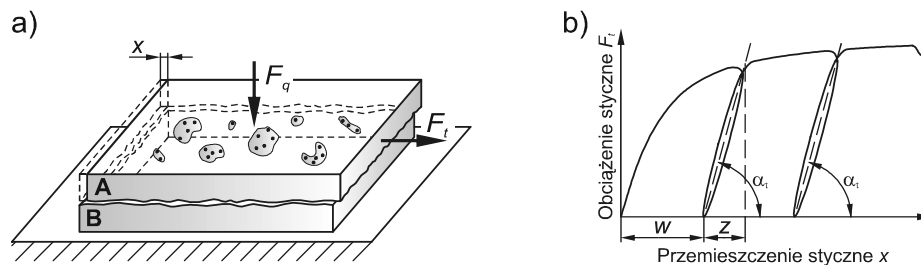
W modelowaniu siły tarcia w układach dynamicznych odchodzi się od klasycznego modelu tarcia Coulomba z powodu jego małej dokładności, a w zamian stosuje się tzw. dynamiczne modele tarcia (Dahla, Duponta, LuGre). Wynika to z konieczności uwzględnienia w badaniach modelowych takich układów rzeczywistych sprężysto-plastycznych charakterystyk styku. Jednym z podstawowych parametrów wyżej wymienionych dynamicznych modeli tarcia jest współczynnik sztywności kontaktowej stycznej styku. Prawidłowy dobór jego wartości decyduje więc o dokładności modelowania procesów tarcia z wykorzystaniem tych modeli.

W niniejszej pracy wykorzystując specjalnie opracowane w środowisku Matlab-Simulink procedury obliczeniowe zbadano, jaki wpływ ma sztywność styku w kierunku stycznym na siłę tarcia w obecności drgań kontaktowych stycznych wzdłużnych i wykazano, porównując uzyskane

wyniki badań symulacyjnych z wynikami badań doświadczalnych, że model Dahla bardzo dobrze nadaje się do opisu wpływu drgań kontaktowych stycznych na siłę tarcia.

## RZECZYWISTY STYK I JEGO MODEL

Jedną z podstawowych wad, tzw. statycznych modeli tarcia bazujących na klasycznym modelu tarcia Coulomba jest założenie, że tworzące styk powierzchnie są idealnie sztywne. Założenie to jest jedną z głównych przyczyn małej dokładności tych modeli w analizach układów dynamicznych, a w szczególności układów znajdujących się w ruchu drgającym. Wady tej nie mają tzw. dynamiczne modele tarcia Dahla [L. 2], Duponta [L. 3], czy też tzw. model LuGre [L. 1], uwzględniające podatność kontaktową styczną rzeczywistego połączenia stykowego (Rys. 1), jak i zjawisko tzw. przesunięcia wstępnego (presliding effect).



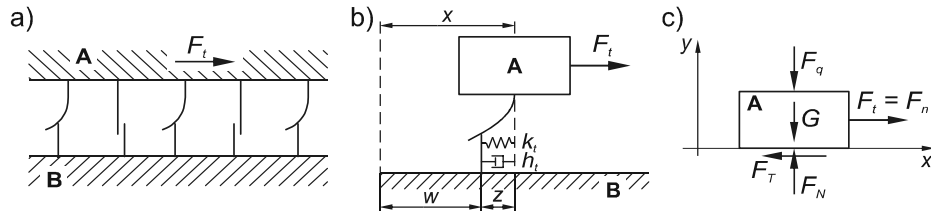
Rys. 1. Płaskie połączenie stykowe: a) rzeczywisty styk, b) charakterystyka podatności styku w kierunku stycznym

Fig. 1. Flat contact joint: a) true joint, b) shear compliance characteristic of the joint

Nierówności tworzące rzeczywisty styk obrazowane są w tych modelach poprzez mikrosprężyny, które pod wpływem obciążenia stycznego odkształcają się w kierunku zgodnym z siłą oporu tarcia (Rys. 2a). Całkowite przemieszczenie  $x$  przesuwanego ciała ma charakterystykę sprężysto-plastyczną i może być rozłożone na dwie składowe (Rys. 2b) – składową sprężystą  $z$  i składową plastyczną  $w$ :

$$x = z + w \quad (1)$$

W modelu analitycznym własności sprężysto-tłumiące obszaru styku w kierunku stycznym modelowane są jednym zastępczym elementem sprężysto-tłumiącym o sztywności  $k_t$  i tłumieniu  $h_t$  (Rys. 2b).



**Rys. 2. Modelowanie styku w dynamicznych modelach tarcia: a) modelowanie występów chropowatości, b) sztywność i tłumienie zastępcze, c) siły działające na przesuwane ciało**

Fig. 2. Modeling of the contact in dynamic models of friction: a) modeling of separate asperities, b) stiffness and damping of joint, c) forces acting on sliding body

W dynamicznych modelach tarcia Dahla, Duponta i LuGre zakłada się, że istnieje związek między siłą tarcia  $F_T$  a odkształceniem sprężystym  $z$  styku w kierunku stycznym w postaci:

$$F_T = k_t \cdot z \quad (2)$$

gdzie:  $k_t$  – współczynnik sztywności styku w kierunku stycznym,  
 $z$  – składowa sprężysta odkształcenia styku.

Składowa sprężysta  $z$  związana jest ze sprężystym odkształceniem występów chropowatości powierzchni styku w kierunku stycznym. W modelu Dahla wyznacza się ją z zależności [L. 2]:

$$\frac{dz}{dt} = v_r \cdot \left( 1 - \frac{k_t}{F_C} \cdot \text{sgn}(v_r) \cdot z \right)^\alpha \quad (3)$$

gdzie:  $F_C = \mu \cdot F_N$  (4)  
 $v_r$  – prędkość względna równa różnicy prędkości  $\dot{x}$  przesuwanego ciała i prędkości  $\dot{u}$  drgań podłoża.

W przypadku przesuwania ciała **A** o masie  $m$  w kierunku  $x$  po drgającym podłożu (**Rys. 2**) równanie ruchu tego ciała ma postać:

$$m \cdot \ddot{x} = F_n - F_T \quad (5)$$

gdzie:  $F_n$  – siła napędu (będąca funkcją sztywności napędu).

Równanie (5) stanowi podstawę prostego, doświadczalnego wyznaczenia przebiegu siły tarcia  $F_T$  w funkcji czasu, występującej między podłożem, a przesuwanym ciałem. W czasie ruchu ciała należy zarejestrować jedynie przebieg jego przyspieszenia  $\ddot{x}$  i przebieg siły napędu  $F_n$  niezbędnej do wprowadzenia ciała w ruch i utrzymania tego ruchu [L. 5–7].

W analizach symulacyjnych problem wyznaczania przebiegu siły tarcia między przesuwanym ciałem a drgającym podłożem nie jest zagadnieniem prostym. Stopień jego złożoności, ale również dokładność uzyskiwanych wyników zależy w dużej mierze od przyjętego modelu tarcia. Należy przy tym zauważyć, że wskutek przenoszenia się drgań z podłoża również przesuwane ciało wykonuje ruch drgający. Ruch ten powoduje zmiany wartości sprężystego odkształcenia napędu  $\lambda$ , a więc i zmiany siły napędu, która jest funkcją tego odkształcenia. Przyjmując liniową zależność siły sprężystości napędu  $F_n$  od odkształcenia  $\lambda$  można tę siłę przedstawić w postaci:

$$F_n = k_n \cdot \lambda \quad (6)$$

gdzie:  $k_n$  – współczynnik sztywności napędu mierzony w kierunku ruchu przesuwanego ciała.

Wartość odkształcenia sprężystego napędu w kierunku osi  $x$  można obliczyć z zależności:

$$\lambda = v_n \cdot t - x \quad (7)$$

gdzie:  $v_n$  – zadana prędkość napędu,

$x$  – przemieszczenie przesuwanego ciała,

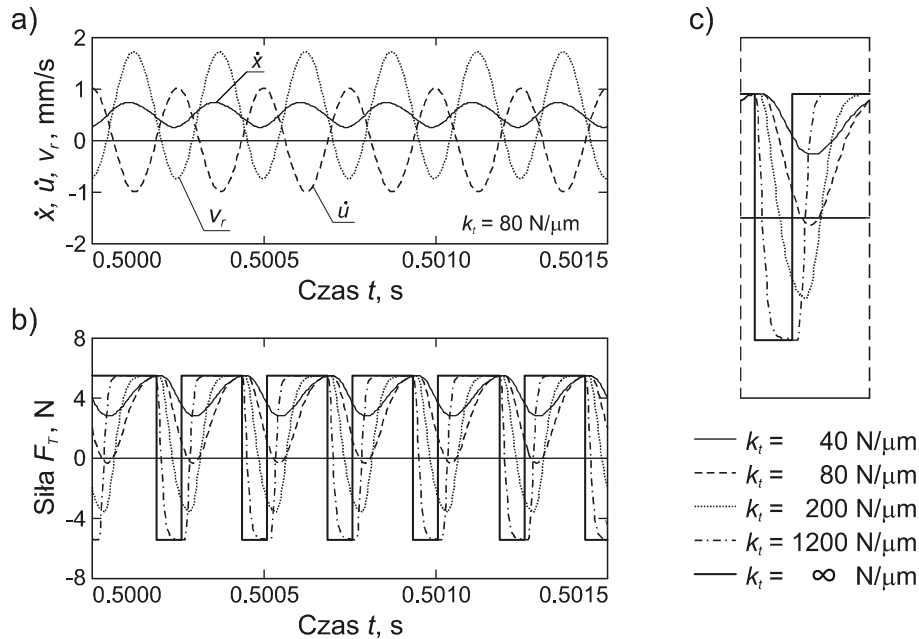
$t$  – czas.

## WYNIKI ANALIZ SYMULACYJNYCH

W numerycznych analizach symulacyjnych wpływu sztywności styku w kierunku stycznym na siłę tarcia w obecności drgań kontaktowych stycznych wzdłużnych rozwiązywano układ równań (5) i (2) przy wykorzystaniu zależności (3), (4), (6) i (7). Analizy przeprowadzono w środowisku Matlab-Simulink [L. 5, 7], przy czym przyjęto, że podłoże wykonuje drgania harmoniczne o częstotliwości  $f$  i amplitudzie prędkości drgań  $v_a$ .

Na **Rys. 3** przedstawiono wyniki takiej analizy. W obliczeniach przyjęto następujące dane: masa przesuwanego ciała  $m = 0,5$  kg, obciążenie zewnętrzne  $F_q = 50$  N, prędkość napędu  $v_n = 0,5$  mm/s, sztywność napędu  $k_n = 0,92$  N/ $\mu$ m, częstotliwość drgań podłoża  $f = 4000$  Hz, amplituda prędkości drgań  $v_a = 1$  mm/s. W kolejnych cyklach obliczeń zmieniano

szttywność styku w zakresie od  $40 \text{ N}/\mu\text{m}$  do  $\infty \text{ N}/\mu\text{m}$ . Z wykresów przedstawionych na **Rys. 3bc** widać bardzo silną zależność przebiegu siły tarcia od sztywności styku.

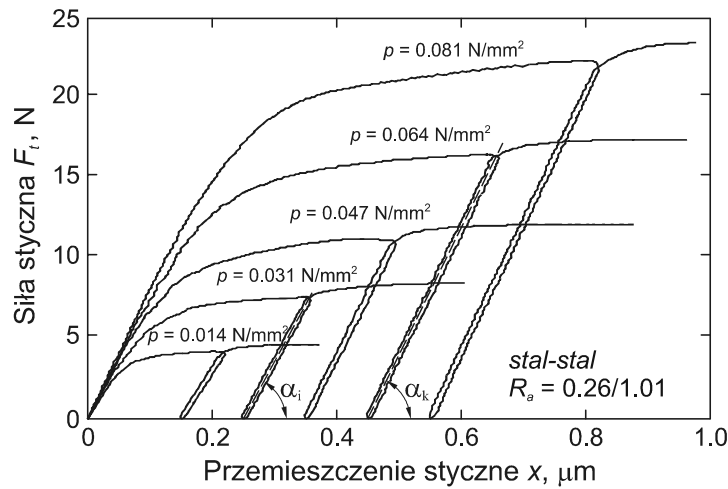


**Rys. 3.** Wpływ sztywności styku na przebieg siły tarcia  $F_T$  w obecności drgań stycznych wzdłużnych: a) przebiegi czasowe prędkości  $\dot{x}$ ,  $\dot{u}$  i  $v_r$  dla  $k_t = 80 \text{ N}/\mu\text{m}$ , b,c) czasowe przebiegi siły tarcia dla styków o różnej sztywności wyznaczone dla modelu Dahla;  $f = 4000 \text{ Hz}$ ,  $v_n = 0,5 \text{ mm/s}$ ,  $v_a = 1 \text{ mm/s}$   
**Fig. 3.** The influence of stiffness of contact on friction force  $F_T$  runs in the presence of longitudinal tangential vibrations: a) the runs of velocities  $\dot{x}$ ,  $\dot{u}$  and  $v_r$  for  $k_t = 80 \text{ N}/\mu\text{m}$ , b,c) the friction force  $F_T$  runs for contact of different stiffness, determined for Dahl's model;  $f = 4000 \text{ Hz}$ ,  $v_n = 0.5 \text{ mm/s}$ ,  $v_a = 1 \text{ mm/s}$

### BADANIA DOŚWIADCZALNE SZTYWNOŚCI STYCZNEJ STYKU

Praktyczne wykorzystanie, np. do sterowania zmian tarcia w układach mechanicznych, przedstawionych zależności zależy od znajomości rzeczywistej wartości współczynnika sztywności danego styku w kierunku stycznym i od znajomości funkcyjnej zależności tego współczynnika od takich parametrów jak naciski powierzchniowe czy też chropowatość powierzchni tworzących styk.

Wartości współczynnika sztywności stykowej styku wyznacza się doświadczalnie na podstawie charakterystyk podatnościowych styku w danym kierunku (stycznym lub normalnym). Na **Rys. 4** przedstawiono przykładowo takie charakterystyki w kierunku stycznym dla styku stal-stal o chropowatości powierzchni  $R_a = 0,26/1,01$  wyznaczone przy różnych naciskach normalnych. Charakterystyki te wyznaczone na specjalnym stanowisku badawczym opisanym w pracy [L. 4].

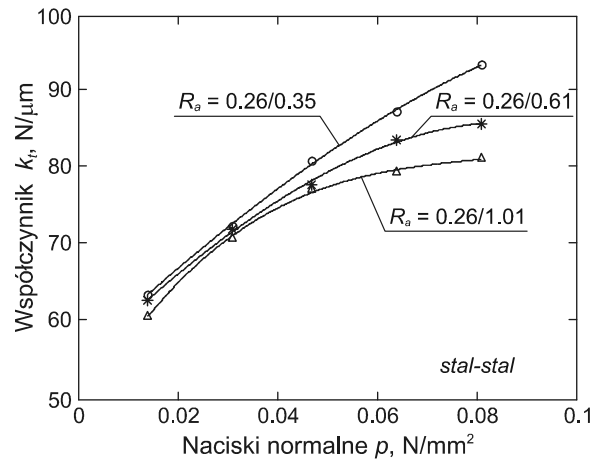


**Rys. 4.** Wpływ nacisków powierzchniowych  $p$  na podatność styczną styku  
 Fig. 4. The influence of normal load  $p$  on tangential compliance of the joint

Na podstawie takich charakterystyk oblicza się wartość współczynnika sztywności stycznej  $k_{ti}$  styku przy danym obciążeniu normalnym  $p_i$  korzystając z zależności:

$$k_{ti} = \operatorname{tg} \alpha_i \quad (8)$$

Na **Rys. 5** przedstawiono zbiorcze wykresy zależności współczynnika sztywności  $k_t$  styku w kierunku stycznym od nacisków normalnych  $p$  dla styku suchego stal-stal wyznaczone dla trzech wariantów chropowatości powierzchni tworzących styk:  $R_a = 0,26/0,35$ ,  $R_a = 0,26/0,61$  i  $R_a = 0,26/1,01$ .



**Rys. 5. Zależność współczynnika sztywności  $k_t$  od nacisków normalnych  $p$  dla styków stal-stal o różnej chropowatości powierzchni**

Fig. 5. The joint compliance coefficient  $k_t$  versus normal load  $p$  for joint steel-steel of different roughness

Analizując wykresy na **Rys. 3** i **Rys. 5** widać, jak istotne różnice w przebiegu siły tarcia w układzie rzeczywistym w obecności drgań wzdłużnych może spowodować zmiana sztywności styku wywołana zmianą nacisków powierzchniowych lub też zmianą chropowatości powierzchni styku.

## WERYFIKACJA WYNIKÓW ANALIZ SYMULACYJNYCH

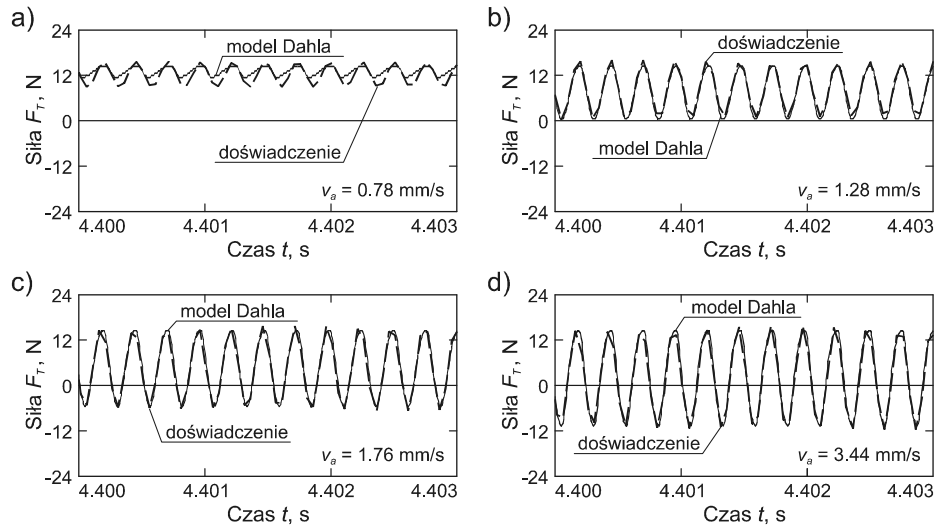
Opracowane w środowisku Matlab-Simulink [L. 5, 7] i wykorzystywane w opisanych badaniach symulacyjnych procedury obliczeniowe zweryfikowano przeprowadzając na specjalnie skonstruowanym stanowisku badawczym badania doświadczalne przebiegu siły tarcia w obecności drgań kontaktowych stycznych wzdłużnych i porównując uzyskane wyniki z wynikami odpowiednich obliczeń symulacyjnych.

Badania weryfikacyjne przeprowadzono dla styku o doświadczalnie zmierzonej wartości współczynnika sztywności stycznej  $k_t = 78$  N/μm. Masa przesuwanego ciała wynosiła  $m = 0,5$  kg, obciążenie zewnętrzne  $F_q = 60$  N, powierzchnia styku  $S = 50$  mm<sup>2</sup>, prędkość napędu  $v_n = 0,62$  mm/s, częstotliwość drgań podłoża  $f = 3900$  Hz. Amplitudę prędkości drgań przyjęto na czterech różnych poziomach  $v_{a1} = 0,78$  mm/s,  $v_{a2} = 1,28$  mm/s,  $v_{a3} = 1,76$  mm/s,  $v_{a4} = 3,44$  mm/s.



Sztywność napędu wyznaczono doświadczalnie. Współczynnik sztywności  $k_n$  wynosił  $0,92 \text{ N}/\mu\text{m}$ .

Wyniki badań doświadczalnych wraz z odpowiednimi wynikami obliczeń symulacyjnych przedstawiono na wykresach porównawczych na **Rys. 6**.



**Rys. 6. Przebiegi siły tarcia  $F_T$  dla modelu Dahla i wyznaczone doświadczalnie przy prędkości napędu  $v_n = 0,62 \text{ mm/s}$  i częstotliwości drgań  $f = 3900 \text{ Hz}$  dla różnych amplitud prędkości drgań  $v_a$  równych: a)  $0,78 \text{ mm/s}$ , b)  $1,28 \text{ mm/s}$ , c)  $1,76 \text{ mm/s}$ , d)  $3,44 \text{ mm/s}$ . Sztywność styku  $k_t = 78 \text{ N}/\mu\text{m}$**

Fig. 6. The friction force  $F_T$  runs for Dahl's model and determined experimentally at driving velocity  $v_n = 0.62 \text{ mm/s}$  and vibration frequency  $f = 3900 \text{ Hz}$  for different amplitudes of vibration velocity equals to: a)  $0.78 \text{ mm/s}$ , b)  $1.28 \text{ mm/s}$ , c)  $1.76 \text{ mm/s}$ , d)  $3.44 \text{ mm/s}$ . Contact stiffness  $k_t = 78 \text{ N}/\mu\text{m}$

Z przedstawionego porównania widać, że w każdym analizowanym wariancie badań przebiegi siły tarcia wyznaczone w badaniach symulacyjnych przy wykorzystaniu opracowanych procedur numerycznych bardzo dobrze zgadzają się z odpowiednimi przebiegami wyznaczonymi w badaniach doświadczalnych.

## PODSUMOWANIE

Przeprowadzone przy wykorzystaniu opracowanych oryginalnych procedur obliczeniowych analizy symulacyjne wykazały istotny wpływ sztywności styku na przebieg siły tarcia między przesuwającym ciałem a drgającym w kierunku stycznym do płaszczyzny przesuwu podłożem.

Duża zależność sztywności rzeczywistego styku od nacisków normalnych i od chropowatości stykających się powierzchni powoduje, że analizy symulacyjne zmian siły tarcia między powierzchniami rzeczywistych elementów w obecności drgań kontaktowych stycznych wzdłużnych powinny być poprzedzone dokładnymi analizami zmian sztywności stycznej styków tworzonych przez te elementy.

Przy poprawnie dobranych współczynnikach sztywności stycznej styku uzyskuje się w badaniach symulacyjnych prowadzonych z wykorzystaniem modelu tarcia Dahla bardzo dobrą zgodność przebiegów siły tarcia w ruchu ślizgowym w obecności drgań kontaktowych stycznych wzdłużnych z wynikami badań doświadczalnych. Wynik taki świadczy, że opracowane procedury numeryczne mogą być wykorzystane w praktyce do sterowania wartością siły tarcia w ruchu ślizgowym poprzez odpowiedni dobór parametrów drgań wymuszonych wzbudzanych w jednym z elementów tworzących styk.

## LITERATURA

1. Canudas de Wit C., Olsson H., Åström K.J., Lischynsky P.: A new model for control of systems with friction. *IEEE, Trans. Autom. Control*, 40, 3, 1995, 419–425.
2. Dahl P.R.: Solid friction damping of mechanical vibrations. *AIAA Journal*, 14, 12, 1976, 1675–1682.
3. Dupont P., Hayward V., Armstrong B., Altpeter F.: Single state elastoplastic friction models. *IEEE Transactions of Automatic Control*, 47, 5, 2002, 787–792.
4. Leus M., Gutowski P.: Doświadczalna analiza sztywności kontaktowej stycznej styku. *Modelowanie Inżynierskie*, 6, 37, 2009, 185–192.
5. Leus M., Gutowski P., Parus A.: Badania doświadczalne i modelowanie oddziaływania drgań stycznych wzdłużnych na siłę napędu w ruchu ślizgowym. *Archiwum Technologii Maszyn i Automatykacji*, 4, 9, 2009, 127–137.
6. Gutowski P., Leus M.: Doświadczalna i symulacyjna analiza wpływu drgań kontaktowych stycznych wzdłużnych na siłę napędu w ruchu ślizgowym. *Modelowanie Inżynierskie*, 6, 37, 2009, 111–120.
7. Gutowski P., Leus M.: Redukcja siły napędu w ruchu ślizgowym pod wpływem drgań stycznych wzdłużnych. *Tribologia*, 6, 2009, 13–27.

**Recenzent:**  
**Janusz JANECKI**

### Summary

The results of the numerical analysis of the contact tangential stiffness effect on the friction forces runs in the presence of longitudinal tangential contact vibrations are presented in this paper. In addition, the experimentally determined tangential stiffness characteristics of the steel-steel contact versus normal pressure for surfaces of various roughnesses are given. The numerical calculations were carried out in the Matlab-Simulink environment with the use of Dahl's dynamic model of friction. The numerically determined runs of friction force for the contact of precisely defined tangential stiffness were compared with respective and experimentally determined runs for the contact of the same stiffness. A very good consistency of the experimental and simulation results was achieved.