

Henryk HOLKA, Tomasz JARZYNA

e-mail: holka@utp.edu.pl

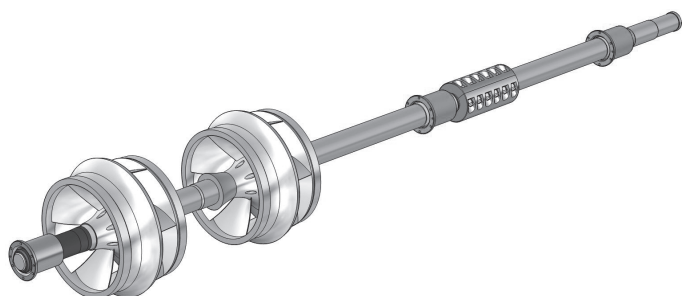
Instytut Mechaniki i Konstrukcji Maszyn, Wydział Inżynierii Mechanicznej, Uniwersytet Technologiczno-Przyrodniczy, Bydgoszcz

Obliczanie częstotliwości drgań własnych wirnika pompy w zależności od sposobu jego podparcia

Wstęp

Przedmiotem rozważań przeprowadzonych w pracy jest modelowanie wirnika dwustopniowej wirowej pompy diagonalnej oraz porównanie uzyskanych wyników obliczeń dla modeli różniących się strukturą podparć.

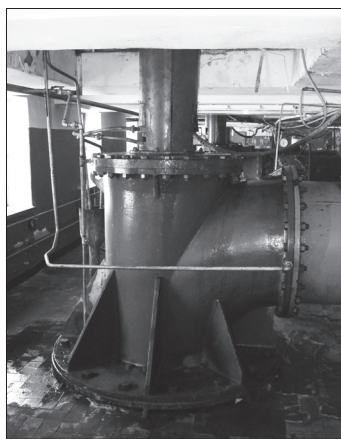
Analizowany wirnik przedstawiony na rys. 1 jest głównym elementem pompy wirowej, która wraz z silnikiem elektrycznym stanowi agregat pompowy. Całość tworzy złożony układ elektro-mechaniczno-hydrauliczny (Rys. 2, 3).



Rys. 1. Wirnik pompy



Rys. 2. Silnik elektryczny pompy



Rys. 3. Układ wylotowy pompy

Ruch obrotowy zespołu: wirnik silnika elektrycznego – sprzęgło – wirnik pompy powoduje, że pracy pompy towarzyszą drgania. Są one także wynikiem oddziaływania wymuszeń hydraulicznych powstających na skutek przepływu cieczy w pompie.

W przypadku złożonych układów dynamicznych, takich jak w rozważanym przypadku, analiza prowadzona jest pod kątem m. in. obrotów krytycznych, wyważenia czy poziomu dynamicznych obciążeń łożysk i konstrukcji wsporczych. Natomiast drgania takich maszyn mogą być wynikiem np. niewyważenia wirnika, jego wygięcia, niewspółosiowości wałów, owalności czopów itp. [Gryboś, 2009].

Charakterystyka badanego obiektu

Badany obiekt jest wykorzystywany do tłoczenia wody wstępnie oczyszczonej w zakładzie przemysłu chemicznego. Posadowiony jest na dwóch stropach: górnym – na którym zainstalowano silnik elektryczny

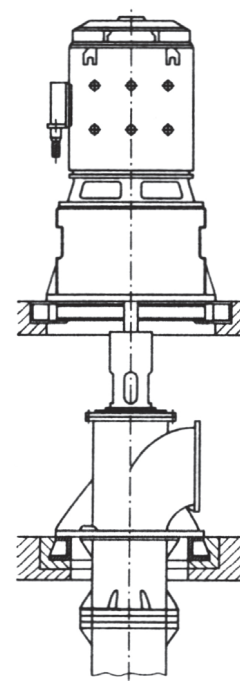
(Rys. 4) oraz dolnym – z zamocowanym na nim układem wylotowym oraz pompą właściwą zanurzoną w zbiorniku z wodą (Rys. 6). Zarówno zamocowanie silnika elektrycznego (Rys. 5), jak i układu wylotowego oraz pompy na fundamentach jest sztywne. Prędkość obrotowa wirnika pompy jest stała i wynosi 740 min^{-1} .



Rys. 4. Zamocowanie silnika do płyty



Rys. 5. Zamocowanie płyty do ramy fundamentowej



Rys. 6. Dwustopniowe podparcie zespołów pompy [Jędrał, 2001]

Podstawowe dane charakterystyczne agregatu zamieszczono w tab. 1.

Tab. 1. Dane agregatu pompowego oraz obciążenie stropów

Dane charakterystyczne agregatu pompowego		
Wydajność	Q	$5000 \text{ m}^3 \text{ h}^{-1}$
Wysokość podnoszenia	H	60 m.sł.w.
Prędkość obrotowa	n	740 min^{-1}
Moc silnika	N	1250 kW
Obciążenie stropów		
Strop górny		~14710 kG
Strop dolny		~6802 kG

Modelowanie

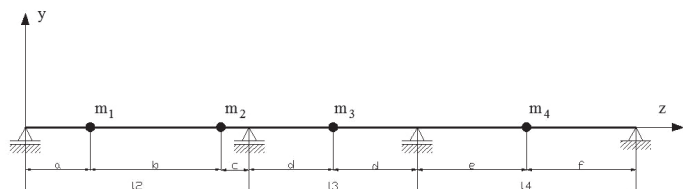
Celem pracy jest analiza drgań giętych wirnika przedstawionego na rys. 1, prowadzona z wykorzystaniem modelowania dyskretnego. Opis ruchu układu dyskretnego można wykonać za pomocą liniowych, bądź nieliniowych równań różniczkowych zwyczajnych.

Alternatywą dla modeli dyskretnych są modele ciągłe, dla których ruch opisuje się cząstkowymi równaniami różniczkowymi lub równaniami całkowymi. Z uwagi na trudności natury matematycznej oraz

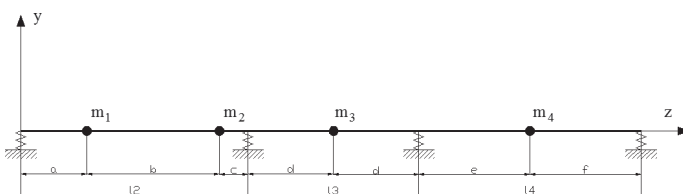
konieczność uproszczeń w rozważanych modelach spowodowały, że modele ciągłe nie znajdują powszechnego zastosowania [Gryboś, 2009; Szolc, 2003]. Postanowiono utworzyć i rozwiązać trzy modele (Rys. 7–9), różniące się między sobą sposobem podparcia wirnika:

- wirnik I posadowiony na podporach sztywnych,
- wirnik II posadowiony na podporach o sztywności k ,
- wirnik III na podporach o sztywności k i tłumieniu c .

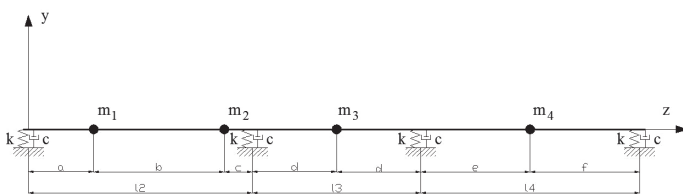
Ma to na celu wyeliminowanie błędów przy skomplikowanych obliczeniach oraz pokazanie wpływu posadowienia wirnika na wyniki obliczeń.



Rys. 7. Czteromasowy, dyskretny model I wirnika na sztywnych podporach



Rys. 8. Model II wirnika na podporach o sztywności k



Rys. 9. Model III wirnika na podporach o sztywności k oraz tłumieniu c

Dyskretyzację przedstawionych modeli przeprowadzono z wykorzystaniem metody energetycznej *Rayleigha*. Równania ruchu swobodnego dla przedstawionych modeli sformułowano w oparciu o metodę sił [Bogusz, 2007]. Dla modelu I przedstawionego na rys. 7 przyjęły one postać:

$$\begin{aligned} \delta_{11}m_1\ddot{y}_1 + \delta_{12}m_2\ddot{y}_2 + \delta_{13}m_3\ddot{y}_3 + \delta_{14}m_4\ddot{y}_4 + y_1 &= 0 \\ \delta_{21}m_1\ddot{y}_1 + \delta_{22}m_2\ddot{y}_2 + \delta_{23}m_3\ddot{y}_3 + \delta_{24}m_4\ddot{y}_4 + y_2 &= 0 \\ \delta_{31}m_1\ddot{y}_1 + \delta_{32}m_2\ddot{y}_2 + \delta_{33}m_3\ddot{y}_3 + \delta_{34}m_4\ddot{y}_4 + y_3 &= 0 \\ \delta_{41}m_1\ddot{y}_1 + \delta_{42}m_2\ddot{y}_2 + \delta_{43}m_3\ddot{y}_3 + \delta_{44}m_4\ddot{y}_4 + y_4 &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie

- δ_{ij} – współczynniki wpływu *Maxwella*,
- m_i – masy zredukowane,
- y_i – przewidywane rozwiązania ruchu.

Zapis macierzowy równ. (1) można przedstawić w postaci:

$$AM\ddot{Y} + EY = Q \quad (2)$$

gdzie

- $A = [\delta_{ij}]$ – macierz współczynników,
- M – macierz masowa,
- $Y = Y(t)$ – macierz kolumnowa,
- E – macierz jednostkowa,
- Q – macierz kolumnowa wymuszeń (zerowa).

Dla modelu II przedstawionego na rys. 8 wykorzystano równ. (1), lecz inaczej zdefiniowano współczynniki δ_{ij} . W tym celu zastosowano ogólny wzór *Maxwella-Mohra*, który dla rozważanego przypadku przyjmuje uproszczoną postać:

$$\delta'_{ia} = \sum_z \int \frac{M_i M_a}{EI} ds + \sum \frac{R_i R_a}{k} \quad (3)$$

gdzie

- δ'_{ia} – przemieszczenie układu podstawowego w punkcie i pod wpływem siły jednostkowej przyłożonej w punkcie a ,
- M_i, M_a – momenty zginające powodowane działaniem sił jednostkowych przyłożonych w punktach i oraz a ,
- R_i, R_a – reakcje więzów na obciążenie siłami jednostkowymi przyłożonymi w punktach i oraz a ,
- I – moment bezwładności przekroju poprzecznego,
- E – moduł *Younga*.

Wartości momentów zginających M_i, M_a oraz reakcji więzów R_i oraz R_a wyznaczono z odpowiednich układów równań statyki.

Równania ruchu dla modelu III (Rys. 9) przyjmują postać:

$$\begin{aligned} \delta'_{11}m_1\ddot{y}_1 + \delta'_{12}m_2\ddot{y}_2 + \delta'_{13}m_3\ddot{y}_3 + \delta'_{14}m_4\ddot{y}_4 + \delta'_{11}c_1\dot{y}_1 + \\ + \delta'_{12}c_2\dot{y}_2 + \delta'_{13}c_3\dot{y}_3 + \delta'_{14}c_4\dot{y}_4 + y_1 &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \delta'_{21}m_1\ddot{y}_1 + \delta'_{22}m_2\ddot{y}_2 + \delta'_{23}m_3\ddot{y}_3 + \delta'_{24}m_4\ddot{y}_4 + \delta'_{21}c_1\dot{y}_1 + \\ + \delta'_{22}c_2\dot{y}_2 + \delta'_{23}c_3\dot{y}_3 + \delta'_{24}c_4\dot{y}_4 + y_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta'_{31}m_1\ddot{y}_1 + \delta'_{32}m_2\ddot{y}_2 + \delta'_{33}m_3\ddot{y}_3 + \delta'_{34}m_4\ddot{y}_4 + \delta'_{31}c_1\dot{y}_1 + \\ + \delta'_{32}c_2\dot{y}_2 + \delta'_{33}c_3\dot{y}_3 + \delta'_{34}c_4\dot{y}_4 + y_3 &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \delta'_{41}m_1\ddot{y}_1 + \delta'_{42}m_2\ddot{y}_2 + \delta'_{43}m_3\ddot{y}_3 + \delta'_{44}m_4\ddot{y}_4 + \delta'_{41}c_1\dot{y}_1 + \\ + \delta'_{42}c_2\dot{y}_2 + \delta'_{43}c_3\dot{y}_3 + \delta'_{44}c_4\dot{y}_4 + y_4 &= 0 \end{aligned}$$

Zapis macierzowy powyższego równania jest następujący:

$$A'M\ddot{Y} + A'CY + EY = Q \quad (6)$$

gdzie:

C – macierz diagonalna tłumienia.

Po podstawieniu danych liczbowych obliczono częstotliwości drgań własnych wirnika, które zamieszczono w tab. 2.

Tab. 2. Wyniki obliczeń dla analizowanych modeli

Częstotliwości drgań	Wirnik na sztywnych podporach	Wirnik na podporach sprężystych	Wirnik na podporach uwzględniających k oraz c
f_1 , Hz	40,63	18,55	36,78
f_2 , Hz	82,67	37,19	48,86
f_3 , Hz	126,84	48,78	110,68
f_4 , Hz	264,73	125,96	126,08

Wnioski

1. Analiza matematyczna drgań giętych wirników wielopodporowych stanowi złożone zagadnienie wymagające nieustannej weryfikacji.
2. Zaletą prezentowanych modeli matematycznych jest prosta struktura i widoczne powiązania poszczególnych składników równań.
3. Uzyskane wyniki zgodne są z przebiegiem zjawisk fizycznych. Wprowadzenie sztywności k spowodowało obniżenie częstości drgań własnych w stosunku do podpór sztywnych, natomiast łączne uwzględnienie k oraz c spowodowało, że częstotliwości drgań wzrosła.
4. Uproszczenie modelu obliczeniowego wirnika polegające na nieuwzględnieniu współczynników podparć k oraz c , prowadzi do zbyt dużych różnic między przyjętym modelem a układem rzeczywistym.

LITERATURA

- Bogusz J. 2007. *Metoda sił*. Wyd. Pol. Krakowskiej, Kraków
- Gryboś R. 2009. *Drgania maszyn*. Wyd. Pol. Śląskiej, Gliwice
- Jędrał W., 2001. *Pompy wirowe*. WNT, Warszawa
- Szolc T., 2003. Analiza dynamiczna złożonych, dyskretno-ciągłych układów dynamicznych. Praca habilitacyjna. *Prace IPPT PAN*, nr 2