

Artur POŚWIATA, Zbigniew SZWAST

e-mail: poswiata@ichip.pw.edu.pl

Wydział Inżynierii Chemicznej i Procesowej, Politechnika Warszawska, Warszawa

## Optimalizacja ogrzewania fluidalnego z dyspersyjnym przepływem ciała stałego

### Wstęp

W dotychczasowych pracach [Poświata i Szwast, 2009; Poświata i Szwast, 2010] poświęconych optymalizacji procesu ogrzewania rozdrobnionego ciała stałego w dwufazowym złożu fluidalnym autorzy zajmowali się dwoma granicznymi – idealnymi – rodzajami przepływu rozdrobnionego ciała stałego. W pierwszym z nich ciało stałe było idealnie wymieszane, zaś w drugim przepływ rozdrobnionego ciała stałego był przepływem tłokowym. W rzeczywistych procesach przepływ cząstek ciała stałego mieści się pomiędzy tymi dwoma. Jednym ze sposobów uwzględnienia rzeczywistych warunków przepływu jest wprowadzenie pojęcia dyspersji i przepływu dyspersyjnego. Uwzględnia się dzięki temu częściowe mieszanie się ciała stałego wzdłuż aparatu.

W niniejszej pracy pokazano jak można uwzględnić wpływ dyspersji na optymalne warunki prowadzenia procesu. Wprowadzenie dyspersji w równaniach bilansowych powoduje wzrost rzędowości równań różniczkowych, co zdecydowanie komplikuje obliczenia optymalizacyjne. Ponadto zmieniają się też warunki brzegowe, które w przypadku procesu z idealnym wymieszaniem oraz z przepływem tłokowym mają prostą postać; określają one wartość temperatury początkowej i końcowej ciała stałego, natomiast w przypadku przepływu dyspersyjnego temperatura początkowa jest nieznaną (warunki Danckwerts).

### Wskaźnik jakości

W rozważanym problemie optymalizacji procesu ogrzewania rozdrobnionego ciała stałego w złożu fluidalnym, jako wskaźnik jakości przyjęto całkowity koszt takiego procesu. Całkowity koszt procesu składa się z kosztu inwestycyjnego, czyli koszt zakupu nowej aparatury oraz kosztu eksploatacyjnego w skład, którego wchodzi koszt przetłaczania gazu przez złożo fluidalne oraz koszt zużytego gazu ogrzewającego. Zatem całkowity koszt procesu przypadający na jednostkowy przepływ ciała stałego można opisać wyrażeniem [Berry i in., 2000]:

$$K_e = \left( \frac{\tilde{z}}{\tau_m} + \beta_r \right) \frac{J}{\tau_u S} + \frac{e_e \Delta P G_k}{\eta \rho_g S} + \int_0^{G_k} c_g [T_g(G)] S^{-1} dG \quad (1)$$

gdzie:  $\tilde{z}$  – czynnik opisujący zamrożenie kapitału,  $\tau_m$  – nominalny czas zwrotu kapitału,  $\tau_u$  – czas pracy w ciągu roku,  $\beta_r$  – współczynnik remontów,  $J$  – nakład inwestycyjny,  $e_e$  – cena energii elektrycznej,  $\Delta P$  – spadek ciśnienia w złożu fluidalnym,  $\rho_g$  – gęstość gazu,  $G_k$  – całkowity przepływ gazu,  $\eta$  – sprawność przetłaczania,  $c_g$  – cena gazu o temperaturze  $T_g$ ,  $S$  – przepływ ciała stałego. Ponieważ wartości wielkości ekonomicznych obecnych w wyrażeniu (1) są trudne do przewidzenia, a ponadto podlegają lokalnym i czasowym fluktuacją, powyższy ekonomiczny wskaźnik jakości może zostać przekształcony do postaci opisującej koszt procesu, ale wyrażony w jednostkach egzergii, która służy za termodynamiczną miarę ekonomicznej wartości strumieni materii. Dokładne wyprowadzenie egzergetycznego wskaźnika jakości dla procesu ogrzewania fluidalnego można znaleźć w literaturze [Berry i in., 2000]. Końcową postać wskaźnika jakości użytego w obliczeniach dana jest wyrażeniem

$$I = \int_0^{t_k} \left[ \frac{1}{2} A (T_g - T_a)^2 + \kappa \right] dt \quad (2)$$

gdzie:  $T_a$  – temperatura otoczenia;  $A$  – iloraz średniego ciepła właściwego gazu i temperatury otoczenia;  $t_k$  – całkowity bezwymiarowy przepływ gazu zdefiniowany jako stosunek przepływu gazu do przepływu

ciała stałego;  $\kappa$  – egzergetyczny współczynnik kosztów inwestycyjnych i przetłaczania gazu, określony wyrażeniem

$$\kappa = \left( \frac{\tilde{z}}{\tau_m} + \beta_r \right) \frac{p}{\tau_u \rho_g u_g e} + \frac{e_e \Delta P}{\eta \rho_g e} \quad (3)$$

gdzie:  $e$  – cena jednostki egzergii;  $p$  – cena jednostki dna sitowego w aparacie fluidalnym, związana ze zmienną częścią nakładu inwestycyjnego, proporcjonalną do wielkości aparatu.

### Transformacje stanu

W teorii optymalizacji funkcje nazywane transformacjami stanu opisują zmianę zmiennych stanu w czasie procesu. Transformacje stanu wyprowadzane są z matematycznego modelu procesu. W rozważanym przypadku ogrzewania fluidalnego zmienną stanu jest temperatura ciała stałego,  $T$ .

Różniczkowy bilans entalpowy dla ciała stałego w układzie z dyspersją osiową ma postać:

$$A_f u_s \rho_s c_s \frac{dT}{dl} - A_f D \rho_s c_s \frac{d^2 T}{dl^2} - q(l) = 0 \quad (4)$$

gdzie:  $A_f = yz$  – powierzchnia poprzecznego przekroju złoża,  $u_s$  – prędkość ciała stałego,  $\rho_s$  i  $c_s$  – odpowiednio gęstość i średnie ciepło właściwe ciała stałego,  $D$  – współczynnik dyspersji,  $q(l)$  – ilość ciepła dostarczana do ciała stałego przez gaz w objętości złoża o różniczkowej długości  $dl$ .

Ilość ciepła dostarczana przez gaz do ciała stałego,  $q(l)$ , wyznaczona została z bilansu entalpowego gazu i równań kinetycznych opisujących szybkość wymiany ciepła pomiędzy gazem i ciałem stałym oraz pomiędzy fazami gęstą i pęcherzową w złożu fluidalnym na podstawie dwufazowego modelu złoża fluidalnego [Kunii i Levenspiel, 1991; Poświata i Szwast, 2008].

$$q(l) = c_g u_g \rho_g y \beta (T_g - T) \quad (5)$$

gdzie:  $y$  i  $u_g$  – odpowiednio szerokość złoża fluidalnego i prędkość pozorna gazu,  $\beta$  – współczynnik opisujący wymianę ciepła pomiędzy gazem i ciałem stałym i przyjmujący wartości od 0 do 1. W przypadku  $\beta$  równego 1 transport ciepła jest nieskończenie szybki i dochodzi do równowagi termodynamicznej pomiędzy ciałem stałym i gazem opuszczającym złożo, mówimy wtedy o złożu idealnym. Uwzględniając równ. (5) w równ. różniczkowym (4), wprowadzając bezwymiarowy przepływ gazu,  $t = G/S$  oraz temperaturę zastępczą zdefiniowaną przez temperatury nad temperaturą otoczenia,  $\tau = T - T_a$ , równ. (4) może być przedstawione w następującej formie:

$$\frac{d^2 \tau}{dt^2} - P \frac{d\tau}{dt} + PK\beta(\tau_g - \tau) = 0 \quad (6)$$

W powyższym równaniu  $K = c_g/c_s$ , zaś  $P$  jest definiowane następująco:

$$P = \frac{Pe}{t_k} = \frac{u_s^2 \rho_s z}{Du_g \rho_g} \quad (7)$$

Ponieważ w przypadku algorytmu optymalizacyjnego ciągłej zasady maksimum transformacje stanu muszą być opisane równaniami różniczkowymi zwyczajnymi pierwszego rzędu, z równ. (6) otrzymuje się dwa następujące równania transformacji stanu

$$\frac{d\tau}{dt} = \vartheta \quad (8)$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = P\vartheta - PK\beta(\tau_g - \tau) \quad (9)$$

dla dwóch zmiennych stanu, którymi są temperatura ciała stałego,  $\tau$ , oraz pochodna temperatury ciała stałego,  $\vartheta$ .

### Obliczenia optymalizacyjne

Optymalizację rozważanej minimalizacji kosztów procesu ogrzewania rozdrobnionego ciała stałego w złożu fluidalnym prowadzono stosując ciągle algorytm zasady maksimum. Dla przedstawionego problemu hamiltonian przyjmuje następującą postać

$$H(T, \vartheta, \tau_g, z_\tau, z_\vartheta) = \frac{1}{2} A \tau_g^2 + \kappa + z_\tau \vartheta + z_\vartheta [P\vartheta - PK\beta(\tau_g - \tau)] \quad (10)$$

gdzie:  $z_\tau$  i  $z_\vartheta$  – zmienne sprzężone. Warunkiem wystąpienia optymalnej temperatury gazu, będącej zmienną decyzyjną, przy braku ograniczeń jest zerowanie się pierwszej pochodnej hamiltonianu po tej temperaturze, zatem

$$\frac{\partial H}{\partial \tau_g} = A \tau_g - z_\vartheta PK\beta = 0 \quad (11)$$

Oprócz różniczkowych równań transformacji stanu (8) i (9) występują jeszcze dwa równania różniczkowe opisujące zmianę wartości zmiennych sprzężonych wzdłuż trajektorii optymalnej tzw. równania sprzężone. Równania te uzyskuje się różniczkując hamiltonian po zmiennych stanu, stąd otrzymuje się:

$$\frac{dz_\tau}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \tau} = -z_\vartheta PK\beta \quad (12)$$

$$\frac{dz_\vartheta}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \vartheta} = -z_\tau - z_\vartheta P \quad (13)$$

W pełnym opisie algorytmu pojawia się również równanie opisujące zmianę hamiltonianu, jednakże w rozważanym przypadku analizowany proces jest autonomiczny tzn. hamiltonian nie zależy jawnie od  $t$ , jest on zatem stały wzdłuż całej trajektorii optymalnej.

Dla analizowanego problemu równ. (8) – (13) stanowią kanoniczny układ równań, który musi być spełniony dla procesu optymalnego. Musi być on jednak uzupełniony o warunki brzegowe dla zmiennych stanu, zmiennych sprzężonych oraz hamiltonianu.

#### Warunki brzegowe

W przypadku procesu bez dyspersji wzdłużnej warunki brzegowe dla zmiennych stanu przyjmują prostą postać, określając początkową i końcową temperaturę ciała stałego. Przyjmując za warunki brzegowe dla procesu z dyspersją warunki *Danckwerts*a nie można określić temperatury na początku procesu, warunek ten przyjmuje postać następującej zależności:

$$\tau(0) - \frac{1}{P} \vartheta(0) = 0 \quad (14)$$

Natomiast na końcu procesu warunki te określają w jawnej postaci końcowe wartości zmiennych stanu:

$$\tau(t_k) = \tau_k \quad \vartheta(t_k) = 0 \quad (15)$$

Ponadto, jeżeli końcowy czas procesu jest swobodny, hamiltonian na końcu procesu musi być równy 0. W rozważanym przypadku rolę czasu pełni bezwymiarowy przepływ gazu,  $t$ , i tak będzie on nazywany w teorii optymalizacji. Biorąc to pod uwagę, jeżeli całkowity przepływ gazu jest swobodny hamiltonian na końcu procesu jest równy 0, a uwzględniając fakt, że proces jest autonomiczny, hamiltonian jest równy zero wzdłuż całej trajektorii optymalnej.

Z warunków transwersalności [Sieniutycz, 1991] wynika, że jeżeli zmienna stanu jest zadana to odpowiednia wartość zmiennej sprzężonej jest swobodna, a zatem na końcu procesu zmienne sprzężone  $z_\tau$  i  $z_\vartheta$  są nieokreślone. Natomiast dla początku procesu z warunków transwersalności wynika następujący warunek dla zmiennych sprzężonych:

$$z_\vartheta(0) + \frac{1}{P} z_\tau(0) = 0 \quad (16)$$

Przystępując do obliczeń optymalizacyjnych należy założyć nieznaną wartość zmiennych stanu i zmiennych sprzężonych na jednym z końców trajektorii optymalnej, a następnie po przeprowadzeniu obliczeń wzdłuż całej trajektorii sprawdzić, czy otrzymane wartości spełniają warunki brzegowe na drugim końcu.

#### Początek i koniec trajektorii optymalnej

Po uwzględnieniu warunków brzegowych dla zmiennych sprzężonych na początku procesu i zmiennych stanu na końcu procesu okazuje się, że w tych dwóch punktach równania układu kanonicznego redukują się do postaci takiej jak dla problemu bez dyspersji. Stanowi to zdecydowane ułatwienie w obliczeniach optymalizacyjnych, ponieważ w znacznym stopniu pozwala ograniczyć liczbę zmiennych, dla których należy zakładać nieznaną wartości. W poprzednich pracach [Poświata i Szwast, 2009; Poświata i Szwast, 2010] otrzymano rozwiązania dla procesu z tłokowym przepływem ciała stałego. Z rozwiązań tych wynika, że optymalna temperatura gazu jest równa:

$$\hat{\tau}_g = \tau + \sqrt{\tau^2 + \frac{2\kappa}{A}} \quad (17)$$

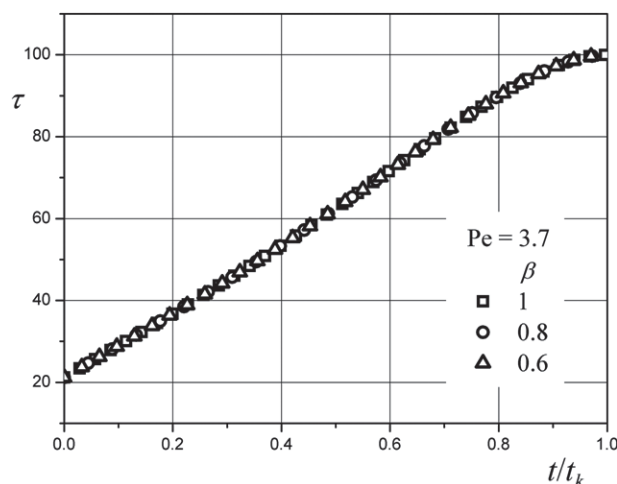
Można zatem z powyższej zależności wyznaczyć optymalną temperaturę gazu na początku i końcu procesu z dyspersją znając temperaturę ciała stałego. Wynika stąd, że zakładając temperaturę ciała stałego na początku procesu,  $\tau(0)$ , można wyznaczyć wartość zmiennej  $\vartheta(0)$  z warunku brzegowego (14) i wartość optymalnej temperatury z równania (17), następnie z równ. (11) wartość zmiennej sprzężonej  $z_\vartheta(0)$  oraz z warunku (16) wartość drugiej zmiennej sprzężonej  $z_\tau(0)$ . Jak pokazano, w celu rozpoczęcia obliczeń optymalizacyjnych wystarcza założenie jedynie początkowej temperatury ciała stałego.

Biorąc pod uwagę fakt, że na końcu procesu znane są wartości obu zmiennych stanu, można wyznaczyć optymalną temperaturę gazu, a następnie wartość zmiennej  $z_\vartheta(t_k)$  z równania (11), natomiast wartość zmiennej  $z_\tau(t_k)$  musi być założona.

### Wyniki obliczeń optymalizacyjnych

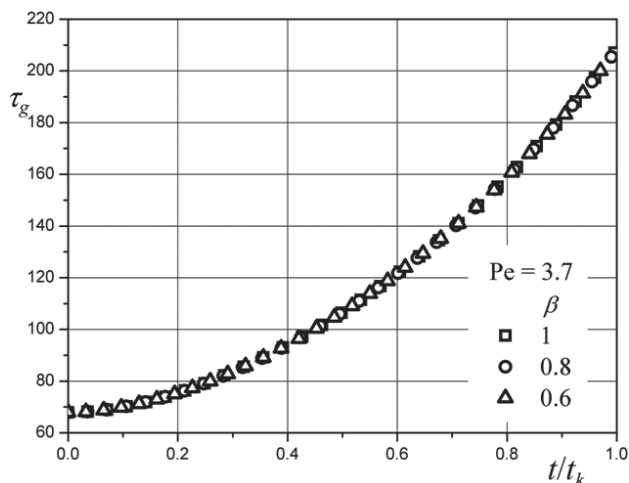
Przeprowadzono szereg obliczeń optymalizacyjnych dla różnych wartości współczynnika  $\beta$  opisującego kinetykę wymiany ciepła i hydrodynamikę złoża fluidalnego i dla stałej wartości liczby *Pecleta*. Profile optymalnej temperatury ciała stałego przedstawione dla znormalizowanego czasu, zdefiniowanego przez iloraz czasu bieżącego do czasu końcowego ( $t/t_k$ ), pokazano na rys. 1.

Z wykresu na rys. 1 wynika, że przy stałej wartości liczby *Pe* profil optymalnej temperatury ciała stałego przedstawiony w funkcji znormali-



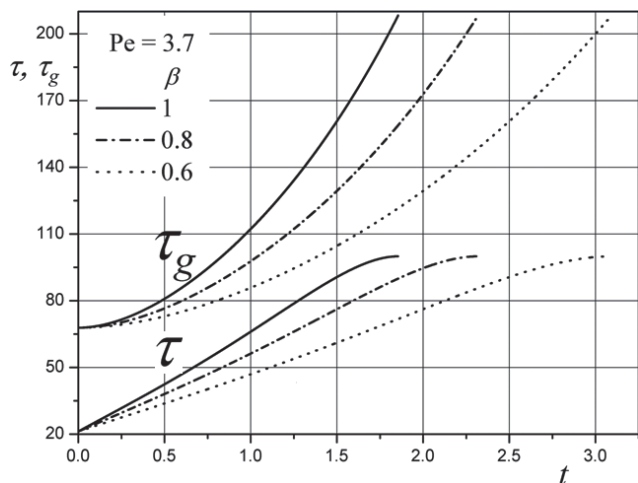
Rys. 1. Profile optymalnej temperatury ciała stałego w funkcji znormalizowanego czasu dla różnych wartości współczynnika  $\beta$  i liczby  $Pe = 3,7$

lizowanego czasu nie zależy od wartości współczynnika  $\beta$ , a zatem nie zależy od hydrodynamiki złoża fluidalnego oraz od kinetyki wymiany ciepła. Zgodnie z tym, co napisano powyżej temperatura optymalna gazu na początku i na końcu procesu zależy jedynie od temperatury ciała stałego, więc również ona jest niezależna od hydrodynamiki i kinetyki procesu. Jednak jak pokazuje wykres na rys. 2 temperatura optymalna gazu nie zależy od wartości współczynnika  $\beta$  wzdłuż całej optymalnej trajektorii.



Rys. 2. Profile optymalne temperatury gazu ogrzewającego w funkcji znormalizowanego czasu dla różnych wartości współczynnika  $\beta$  i liczby  $Pe = 3,7$

Profile temperatur na rys. 1 i 2 są niezależne od wartości współczynnika  $\beta$ , jeśli przedstawi się je dla czasu znormalizowanego. Natomiast dla czasu rzeczywistego profile te będą różniły się, gdyż różne są optymalne czasy końcowe, co pokazuje rys. 3.



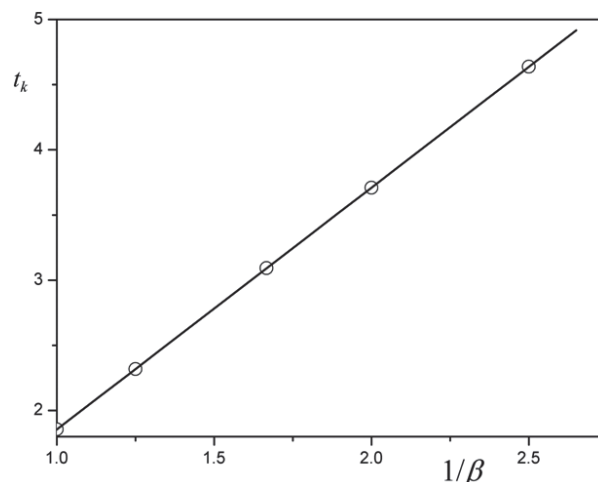
Rys. 3. Optymalne profile zastępczej temperatury gazu ogrzewającego i ciała stałego w funkcji czasu dla różnych wartości współczynnika  $\beta$  i liczby  $Pe = 3,7$

Jak widać z wykresu na rys. 3 optymalny czas końcowy rośnie, gdy spada wartość współczynnika  $\beta$ , jednocześnie maleje szybkość wzrostu temperatury ciała stałego, ponieważ pogarszają się warunki transportu ciepła. Zależność czasu końcowego,  $t_k$  od współczynnika  $\beta$  pokazuje wykres na rys. 4.

Należy zauważyć, że zależność optymalnego czasu końcowego od odwrotności współczynnika  $\beta$  jest liniowa. Analizując wyniki obliczeń optymalizacyjnych dla różnych parametrów można wykazać, że zależność optymalnego czasu procesu od współczynnika  $\beta$  opisuje równanie

$$\hat{t}_k = \hat{t}_{k(\beta=1, K=1)} K^{-1} \beta^{-1} \quad (18)$$

gdzie:  $\hat{t}_{k(\beta=1, K=1)}$  jest optymalnym czasem końcowym, gdy współczynnik  $\beta$  oraz stosunek ciepł właściwych gazu i ciała stałego,  $K$ , są równe



Rys. 4. Zależność czasu końcowego od wartości współczynnika  $\beta$  dla liczby  $Pe = 3,7$

1. Znając zatem optymalną wartość czasu końcowego procesu dla jednych warunków hydrodynamicznych i kinetyki procesu, można łatwo wyznaczyć optymalny czas końcowy dla innych warunków hydrodynamicznych i kinetycznych. Następnie, znając optymalny profil temperatury dla zredukowanego czasu możemy wyznaczyć optymalny profil dla rzeczywistych wartości czasu (bezwymiarowego przepływu gazu).

## Wnioski

Podsumowując wyniki obliczeń optymalizacyjnych dla procesu ogrzewania fluidalnego z dyspersyjnym przepływem ciała stałego należy stwierdzić, że:

- ponieważ przepływ dyspersyjny opisany jest równaniami różniczkowymi rzędu drugiego, dwukrotnie wzrasta wymiarowość problemu optymalizacyjnego w stosunku do problemu z przepływem tłokowym, zmieniają się również warunki brzegowe dla zmiennych sprzężonych;
- analiza układu równań kanonicznych dla ciągłego algorytmu optymalizacyjnego Pontryagina wskazuje, że na brzegach trajektorii optymalnej problem sprowadza się do problemu jak z przepływem tłokowym, co pozwala na początku obliczeń optymalizacyjnych zredukować liczbę zakładanych wartości dla nieznanymi zmiennymi stanu lub zmiennymi sprzężonych;
- dla stałej wartości liczby Pecleta profile temperatury ciała stałego dla procesu optymalnego i dla znormalizowanego czasu nie zależą od hydrodynamiki i kinetyki procesu wymiany ciepła, również profil optymalnej temperatury gazu nie zależy od kinetyki wymiany ciepła;
- kinetyka wymiany ciepła przejawia się natomiast w optymalnym czasie trwania procesu; dla stałej wartości liczby Pecleta zależność optymalnego czasu procesu od odwrotności współczynnika  $\beta$  (opisującego hydrodynamikę złoża i kinetykę procesu wymiany ciepła) jest liniowa.

## LITERATURA

- Berry R.S., Kazakov V., Sieniutycz S., Szwaszt Z., Tsirlin A.M., 2000. *Thermodynamic Optimization of Finite Time Processes*, Wiley, New York
- Kunii D., Levenspiel O., 1991. *Fluidization Engineering*, Butterworth-Heinemann, Boston
- Poświata A., Szwaszt Z., 2008. Optimization of horizontal fluidized heat exchanger. *18<sup>th</sup> International Congress of Chemical and Process Engineering CHISA 2008*, Praha, Czech Republic, 24-28 August 2008, on CD, paper 0408
- Poświata A., Szwaszt Z., 2009. Egzergetyczna optymalizacja poziomego fluidalnego wymiennika ciepła z uwzględnieniem dwufazowego modelu złoża. *Inż. Ap. Chem.* **48**, nr 6, 156-157
- Poswiata A., Szwaszt Z., 2010. Minimum of Exergy Consumption in a Horizontal Fluidized Heat Exchanger. *Heat Transfer Research*, 41, nr 3, 265-282. DOI: 10.1615/HeatTransRes.v41.i3.50
- Sieniutycz S., 1991. *Optymalizacja w inżynierii procesowej*, WNT, Warszawa