Prosimy cytować jako: Inż. Ap. Chem. 2011, 50, 1, 23-24

Tomasz KILJAŃSKI

e-mail: kiljan@wipos.p.lodz.pl

Katedra Inżynierii Chemicznej, Wydział Inżynierii Procesowej i Ochrony Środowiska, Politechnika Łódzka, Łódź

Przepływ masy czekoladowej w szczelinie między płaską powierzchnią a walcem w procesie konszowania czekolady

Wstęp

W wielu procesach spotykanych zarówno w przemyśle chemicznym, jak i w przetwórstwie spożywczym, zachodzi konieczność dokładnego wymieszania ziarn stałych w ciekłym nośniku, czasem z równoczesnym rozdrobnieniem ziarn. Proces taki realizuje się m.in. za pomocą walcarek. Zasadniczą częścią walcarki są dwa równoległe walce o równych średnicach, oddzielone wąską szczeliną. Walce obracają się z równą lub różną prędkością w przeciwnych kierunkach, w wyniku czego obrabiany materiał jest wciągany w szczelinę. W wyniku ścinania w przestrzeni między walcami materiał ulega mieszaniu. W szczelinie występują duże naprężenia styczne, sprzyjające rozdrobnieniu cząstek. Dlatego obróbkę na walcarkach stosuje się przy produkcji niektórych artykułów spożywczych, dla których osiągnięcie odpowiedniej konsystencji jest warunkiem dobrej jakości. Podobny przepływ występuje podczas toczenia walca po płaskim dnie naczynia. Taki przepływ spotyka się m.in. podczas konszowania czekolady.

Stopiona czekolada, jak również półprodukt podczas obróbki jest to nienewtonowski płyn plastycznolepki, posiadający tzw. granicę płynięcia τ_y. Przy naprężeniach stycznych poniżej τ_y substancja nie ulega przepływowi, zachowując się jak ciało stałe [1]. Charakterystyczną cechą przepływów takich substancji w kanałach jest występowanie w pobliżu osi obszaru, w którym naprężenie jest niższe od granicy płynięcia i który porusza się ze stałą prędkością w całym przekroju. Przepływ takich płynów w rozpatrywanej geometrii nie jest dostatecznie zbadany.

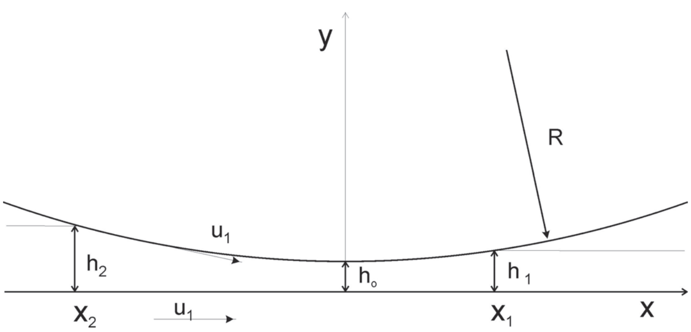
Do opisu przepływów płynu nienewtonowskiego konieczna jest znajomość równania reologicznego, opisującego zależność naprężenia stycznego od szybkości ścinania, czyli krzywą płynięcia. Jednym z częściej stosowanych i wygodnych w użyciu równań, opisujących krzywą płynięcia płynów plastycznolepkich jest równanie *Herschela-Bulkleya* [2]

$$\tau = \tau_y + (k\dot{\gamma})^{1/n} \quad \text{dla} \quad \tau > \tau_y \tag{1}$$

Równanie (1) zastosujemy do opisu własności stopionej czekolady. W dalszej części wyprowadzone zostaną równania opisujące rozkład ciśnienia w szczelinie oraz zapotrzebowanie mocy do napędu walca.

Opis przepływu w szczelinie

Rozpatrzmy przepływ płynu opisanego równaniem (1) między obracającym się walcem i płaszczyzną, która przesuwa się z taką samą prędkością liniową, jak powierzchnia walca (Rys.1). Taki model odpowiada toczeniu się walca po nieruchomej płaszczyźnie.



Rys. 1 Schemat szczeliny między walcem i płaszczyzną

Ruch powierzchni walca i płaszczyzny powoduje przepływ wleczony płynu, czyli wciąganie go w szczelinę, której szerokość zmienia się w kierunku przepływu. Na skutek tego powstaje gradient ciśnienia, wywołujący przepływ ciśnieniowy, nakładający się na przepływ wleczony, wywołany ruchem walca.

Potraktujmy dla uproszczenia opisu poszczególne odcinki szczeliny o długościach dx jako odcinki kanału płaskiego. Wtedy, przy pominięciu sił bezwładności, różniczkowe równanie ruchu dla kierunku x uprości się do postaci

$$\frac{d\tau}{dy} = \frac{dp}{dx} \tag{2}$$

W rozpatrywanym przypadku równych prędkości obu powierzchni, profil prędkości jest symetryczny względem środka szczeliny. Oznacza to, że w połowie szerokości szczeliny naprężenie styczne jest równe zeru:

$$\tau = 0 \quad \text{dla} \quad y = \frac{h}{2}$$

Dla powyższego warunku rozwiązanie równ. (2) ma postać

$$\tau = \frac{dp}{dx}\left(y - \frac{h}{2}\right) \tag{3}$$

W celu wyznaczenia rozkładu ciśnienia i prędkości w szczelinie naprężenie w równ. (3) opiszemy równaniem *Herschela-Bulkleya* (1). Równ. (1) opisuje jednak naprężenie w prostym ścinaniu i nie uwzględnia znaku naprężenia. W przypadku przepływu z nałożonym przepływem ciśnieniowym znak naprężenia zależy od znaku gradientu ciśnienia i położenia punktu. Wobec symetrii profilu prędkości ograniczymy rozważania do górnej połowy szczeliny ($y > h/2$). Równanie (1) zapiszemy dla takiego przypadku jako

$$\tau = \mp\tau_y \mp \left(\mp k\frac{du}{dy}\right)^{1/n} \quad \text{dla} \quad |\tau| > \tau_y \tag{4}$$

gdzie znak górny dotyczy przypadku $\frac{dp}{dx} < 0$, a dolny $\frac{dp}{dx} > 0$.

Przyrównując prawe strony równań (3) i (4), otrzymujemy

$$\mp\tau_y \mp \left(\mp k\frac{du}{dy}\right)^{1/n} = \frac{dp}{dx}\left(y - \frac{h}{2}\right) \tag{5}$$

Prędkość płynu na powierzchni walca jest taka sama, jak prędkość tej powierzchni.

$$u = u_1 \quad \text{gdy} \quad y = h$$

Wobec powyższego warunku brzegowego rozwiązanie równania (5) przyjmuje postać

$$u = u_1 + \frac{1}{k(n+1)\frac{dp}{dx}}\left\{\left[\left|\frac{dp}{dx}\right|\left(y - \frac{h}{2}\right) - \tau_y\right]^{n+1} - \left(\left|\frac{dp}{dx}\right|\frac{h}{2} - \tau_y\right)^{n+1}\right\} \tag{6}$$

Równanie to, podobnie jak równ. (1), obowiązuje tylko w strefie płynnej, w której naprężenie styczne przekracza granicę płynięcia: $|\tau| > \tau_y$. W obszarze, w którym $|\tau| < \tau_y$, nie następuje ścinanie płynu i prędkość jest tam stała w całym przekroju. Z równ. (3) wynika, że obszar ten rozciąga się

$$\text{od} \quad y_1 = \frac{h}{2} - \frac{\tau_y}{\left|\frac{dp}{dx}\right|} \quad \text{do} \quad y_2 = \frac{h}{2} + \frac{\tau_y}{\left|\frac{dp}{dx}\right|}$$

Prosimy cytować jako: Inż. Ap. Chem. 2011, 50, 1, 23-24

Prędkość ruchu w tym obszarze można wyznaczyć z równ. (6) dla $y = y_2$

$$u_o = u_1 - \frac{\left(\left|\frac{dp}{dx}\right|\frac{h}{2} - \tau_y\right)}{k(n+1)\frac{dp}{dx}} \tag{7}$$

Rozkład prędkości w całym przekroju można więc opisać jednym równaniem

$$u = u_1 + \frac{f_{(y)}^{n+1} - f_{(h)}^{n+1}}{k(n+1)\frac{dp}{dx}} \tag{8}$$

gdzie: $$f_{(y)} = \left|\frac{dp}{dx}\right|\left(y - \frac{h}{2}\right) - \tau_y \quad \text{gdy} \quad \left|\frac{dp}{dx}\right|\left(y - \frac{h}{2}\right) - \tau_y \geq 0 \tag{9}$$

$$f_{(y)} = 0 \quad \text{gdy} \quad \left|\frac{dp}{dx}\right|\left(y - \frac{h}{2}\right) - \tau_y \leq 0$$

zaś $f_{(h)}$ oznacza wartość funkcji $f_{(y)}$ dla $y = h$

Równanie (8) pozwala wyznaczyć rozkład prędkości w dowolnym przekroju szczeliny między płaszczyzną a walcem, jeśli znane są wartości szerokości szczeliny h i gradientu ciśnienia dp/dx w tym przekroju.

W celu wyznaczenia dp/dx przyrównajmy objętościowe natężenie przepływu w przekroju dowolnym i wylotowym, w którym warstwa płynu odrywa się od powierzchni walca. Ze względu na założenie, że poszczególne odcinki szczeliny o długościach dx traktujemy jako odcinki kanału płaskiego, znów ograniczymy się tylko do „górnej" połowy szerokości szczeliny ($y > h/2$).

$$Q = bh_1u_1 = 2b\int_{h/2}^{h} u\,dy \tag{10}$$

Podstawiając prędkość lokalną u z równ. (8), otrzymuje się

$$h_1u_1 = 2\int_{h/2}^{h}\left[u_1 + \frac{f_{(y)}^{n+1} - f_{(h)}^{n+1}}{k(n+1)\frac{dp}{dx}}\right]dy \tag{11}$$

Całkę w powyższym równaniu można wyznaczyć, korzystając z definicji $f_{(y)}$ – równ. (9), uzyskując zależność (12)

$$u_1(h_1 - h) + h\frac{f_{(h)}^{n+1}}{k(n+1)\frac{dp}{dx}} = \frac{1}{k(n+1)(n+2)\frac{dp}{dx}\left|\frac{dp}{dx}\right|}\left(\left|\frac{dp}{dx}\right|\frac{h}{2} - \tau_y\right)^{n+2} \tag{12}$$

Biorąc pod uwagę, że szerokość szczeliny h uzależniona jest od współrzędnej x zgodnie z równ. (13)

$$h = h_o + R - \sqrt{R^2 - x^2} \tag{13}$$

równanie (12) można wykorzystać do obliczenia gradientu ciśnienia wzdłuż osi x, a przez numeryczne całkowanie – również do obliczenia rozkładu ciśnienia.

W równaniu (12) występuje wielkość h_1, będąca szerokością szczeliny w przekroju wylotowym. Jest ona zależna od wysokości warstwy cieczy na wlocie do szczeliny h_2. Dla przypadku płynu newtonowskiego zależność h_1 od h_2 została wyznaczona analitycznie [3]. W miarę, jak szerokość szczeliny w przekroju wlotowym h_2 wzrasta od h_o (najwęższy przekrój szczeliny) do nieskończoności, h_1 asymptotycznie zmienia się od wartości h_o do 1,225 h_o. W praktyce przestrzeń między walcem a płaszczyzną jest z reguły wypełniona w wystarczająco dużym stopniu, aby można było przyjąć wartość h_1 jako równą 1,225 h_o. W przypadku płynu nienewtonowskiego wartość h_1 zależy również od jego właściwości reologicznych i może być wyznaczona numerycznie. Jest to taka wartość, przy której obliczone ciśnienie w przekroju wlotowym w którym $h = h_2$, jest równe ciśnieniu otoczenia.

Występującą we wzorach szerokość szczeliny w najwęższym miejscu h_o można uważać za stałą, gdy walec jest umocowany na danej wysokości. Jeśli ma on możliwość unoszenia się, jego położenie ustala się na takim poziomie, by siła parcia ze strony płynu w szczelinie równoważyła ciężar walca F.

$$b\int_{x_2}^{x_1}(p - p_{at})dx = F \tag{14}$$

W takim wypadku należy więc powtarzać obliczenia rozkładu ciśnienia aż do uzyskania rozkładu spełniającego powyższy warunek.

Znajomość rozkładu gradientu ciśnienia umożliwia obliczenie mocy potrzebnej do napędu walca

$$N = \omega bR\int_{x_2}^{x_1}\tau_w dx \tag{15}$$

Naprężenie styczne przy ściance τ_w można wyznaczyć z równ. (3) dla $y = h$.

Tok obliczeń przy założeniu niezmiennej wartości h_o powinien więc być następujący:

1. Założenie $h_1 = 1{,}225\ h_o$
2. Obliczenie rozkładu gradientu ciśnienia z równ. (12) i (13)
3. Wyznaczenie rozkładu ciśnienia przez całkowanie gradientu ciśnienia wzdłuż szczeliny od x_2 do x_1
4. Powtarzanie obliczeń przy kolejnych wartościach h_1, aż obliczone ciśnienie w przekroju wylotowym będzie równe atmosferycznemu.
5. Obliczenie zapotrzebowania mocy z równ. (15)

Tok obliczeń przy zmiennej wartości h_o powinien być następujący:

1. Założenie h_o
2. Założenie h_1
3. Obliczenie rozkładu gradientu ciśnienia
4. Wyznaczenie rozkładu ciśnienia przez całkowanie gradientu ciśnienia
5. Powtarzanie obliczeń wg p. 3 i 4 przy kolejnych wartościach h_1, aż obliczone ciśnienie w przekroju wylotowym będzie równe atmosferycznemu
6. Powtarzanie obliczeń wg p. 2, 3 i 4 przy kolejnych wartościach h_o, aż spełniony będzie warunek (14)
7. Obliczenie zapotrzebowanie mocy

Oznaczenia

b – długość walca
$f_{(y)}$ – funkcja zdefiniowana równaniem (9)
h – szerokość szczeliny
h_o – minimalna szerokość szczeliny (Rys. 1)
h_1, h_2 – szerokość szczeliny w przekroju wylotowym i wlotowym
k, n – stałe w równ. (1)
N – moc
p – ciśnienie
R – promień walca
u – prędkość lokalna w płynie
u_1 – prędkość powierzchni walca
x, y – współrzędne (Rys. 1)
x_1, x_2 – współrzędna wylotu i wlotu płynu do szczeliny (rys. 1)
$\dot{\gamma}$ – szybkość ścinania
τ – naprężenie styczne
τ_y – granica płynięcia

LITERATURA

[1] *M. Dziubiński, T. Kiljański, J. Sęk:* Podstawy reologii i reometrii płynów, Wyd. Politechniki Łódzkiej, Łódź 2009.
[2] *J. Ferguson, Z. Kembłowski:* Reologia stosowana płynów, Wyd. Marcus. Łódź 1995.
[3] *F. Mc Kelvey:* Polymer Processing, Wiley, N.Y., 1962.