

Stefan Jan KOWALSKI

e-mail: stefan.j.kowalski@put.poznań.pl

Instytut Technologii i Inżynierii Chemicznej, Wydział Technologii Chemicznej, Politechnika Poznańska, Poznań

## Uogólniony opis transportu masy i ciepła w procesach suszenia

### Wstęp

Właściwa identyfikacja mechanizmów transportu ciepła i masy w wilgotnych materiałach kapilarno-porowatych poddanych procesowi suszenia i ich precyzyjne modelowanie matematyczne stanowią podstawę adekwatnego projektowania optymalnych procesów suszenia na drodze symulacji numerycznych. Proces suszenia jest z natury złożony, a jego pełny opis trudny. Wynika to ze zmieniających się w trakcie suszenia mechanizmów transportu ciepła i masy zależnie od zawartości wilgoci i rodzaju jej wiązania z materiałem suszonym, np. z transportu kapilarnego w okresie stałej prędkości suszenia na dyfuzyjny w okresie spadającej prędkości suszenia.

W pracy przedstawiono podstawowe równania termo-hydro-mechanicznego modelu suszenia oraz dyskusję sposobów opisu transportu masy i ciepła dla suszenia konwekcyjnego, mikrofalowego i z użyciem promieni podczerwonych.

Prezentowany model powstał na bazie mechaniki ośrodków ciągłych i termodynamiki procesów nieodwracalnych. Dla suszenia mikrofalowego należy sformułować objętościowe źródło ciepła. Natomiast przy opisie suszenia promieniami podczerwonymi należy uwzględnić efekt promieniowania w warunkach brzegowych.

### Termo-hydro-mechaniczny model suszenia

Przedstawiony model oparty jest na następujących założeniach:

- dotyczy materiału izotropowego o jednorodnej strukturze porowatej i porach wypełnionych w sposób ciągły cieczą i gazem,
- materiał w trakcie suszenia odkształca się zarówno odwracalnie (sprężyste) jak i nieodwracalnie (lepkosprężyste, plastycznie),
- materiał ma właściwości dielektryczne, a jedynym efektem działania mikrofal jest generowanie ciepła,
- temperatura wszystkich składników jest lokalnie taka sama,
- w równaniach pomija się wszelkie człony dynamiczne ze względu na quasi-stacynarny charakter procesu suszenia.

Rozkład wilgoci i jej zmiany w materiale suszonym określa się z równania ciągłości masy w postaci [1]

$$\rho^s \dot{X}^\alpha = -\nabla \cdot \mathbf{J}^\alpha + \hat{\rho}^\alpha \quad (1)$$

gdzie  $X^\alpha = \rho^\alpha / \rho^s$  określa stosunek masy składnika  $\alpha$  do masy materiału suchego,  $\mathbf{J}^\alpha$  określa strumień masy,  $\hat{\rho}^\alpha$  szybkość przemiany fazowej składnika  $\alpha = \{l(\text{ciecz}), v(\text{para})\}$ , a kropka nad symbolem oznacza pochodną po czasie.

Z nierówności termodynamicznej wynika następujące równanie transportu wilgoci w materiale porowatym [1, 2]:

$$\mathbf{J}^\alpha = -L^\alpha (\nabla \mu^\alpha - \mathbf{g}) \quad (2)$$

gdzie  $\mu^\alpha$  oznacza potencjał chemiczny składnika  $\alpha$  w porowatym materiale, a  $\mathbf{g} = -\nabla \mu^{\text{grav}}$  jest siłą grawitacji na jednostkę objętości.

Potencjały chemiczne dla cieczy i gazu w porach mają postać:

$$\mu^l = \mu^l + (p^s + p^{\text{cap}}) / \rho^l - s^l T = \mu^{\text{chem}} + \mu^{\text{cap}} \quad (3a)$$

$$\mu^v = \mu^v + p^v / \rho^v - s^v T = \mu^\ominus(p^s, T) + R^v T \ln(p^v / p^s) \quad (3b)$$

gdzie  $\mu^{\text{cap}} = p^{\text{cap}} / \rho^l$  jest potencjałem kapilarnym, a  $p^s$  ciśnieniem powietrza wilgotnego.

Równanie określające prędkość przemian fazowych cieczy w parę wewnątrz porów materiału suszonego ma postać:

$$\hat{\rho}^l = -\hat{\rho}^v = -\varpi(\mu^l - \mu^v) \quad (4)$$

gdzie  $\varpi$  jest współczynnikiem intensywności przemian fazowych.

Strumień ciepła składa się ze strumieni wynikających z przewodzenia i konwekcji ciepła wraz ze strumieniem masy [1]:

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T - T \sum_\alpha s^\alpha \mathbf{J}^\alpha \quad (5)$$

gdzie  $\lambda$  jest współczynnikiem przewodzenia,  $T$  i  $s^\alpha$  oznacza temperaturę i entropię, a  $T s^\alpha$  ciepło związane ze składnikiem  $\alpha$ .

Równanie różniczkowe opisujące rozkład i zmiany w czasie temperatury materiału suszonego wynika z bilansu energii i po uwzględnieniu tożsamości *Gibbsa* ma postać [2]:

$$\rho^s s T = -\text{div}(\mathbf{q} + T \sum_\alpha s^\alpha \mathbf{J}^\alpha) + \mathfrak{R} \quad (6)$$

gdzie  $s = s(T, \varepsilon, X^l, X^v) = s^s + X^l s^l + X^v s^v$  oznacza entropię materiału suszonego zależną od: temperatury  $T$ , odkształcenia  $\varepsilon$  oraz zawartości cieczy  $X^l$  i pary  $X^v$ .

We wzorze (6)  $\mathfrak{R}$  oznacza objętościowe źródło ciepła w przypadku suszenia mikrofalowego. Źródło to opisane jest wzorem [2]:

$$\mathfrak{R} = (\mathfrak{R}_0 + \mathfrak{R}_l X^l) \exp(-2\delta \mathbf{x} \cdot \mathbf{n}) \quad (7)$$

gdzie  $\mathfrak{R}_0$  i  $\mathfrak{R}_l$  określają intensywność generowania ciepła w materiale suchym i w cieczy, a  $\delta$  oznacza współczynnik tłumienia mikrofal wraz z odległością jej wnikania w materiał suszony  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}$ .

Naprężenia  $\sigma_{ij}$  powstałe w materiale suszonym wskutek nierównomiernego skurczu spełniają następujący warunek równowagi:

$$\sigma_{ij,j} + \rho g_i \approx 0 \quad (8)$$

gdzie  $\rho g_i$  oznacza siłę grawitacji na jednostkę objętości, a przecinek między indeksami oznacza pochodną cząstkową naprężenia względem zmiennej przestrzennej (tu: względem  $x_j$ ).

Gdy materiał suszony ma właściwości lepkosprężyste, to związek między naprężeniami a odkształceniami, temperaturą i zawartością wilgoci jest następujący (model *Maxwella*) [1]:

$$\dot{s}_{ij} = \frac{M}{\eta} s_{ij} = 2M \dot{e}_{ij}, \quad \dot{\sigma} + \frac{K}{\kappa_v} \sigma = K(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^{\text{TX}}) \quad (9)$$

gdzie  $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}$  oraz  $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - (\varepsilon/3) \delta_{ij}$  oznaczają deviatory naprężenia i odkształcenia,  $M$  i  $K$  są modułami sprężystości postaciowej i objętościowej,  $\eta$  i  $\kappa_v$  są odpowiednio modułami lepkościowymi dla ścinania i zmian objętości, natomiast  $\dot{\varepsilon}^{\text{TX}}$  oznacza odkształcenie spowodowane zmianą temperatury i wilgotności:

$$\dot{\varepsilon}^{\text{TX}} = 3[\kappa^T (T - T_r) + \kappa^X (X^l - X_r^l)] \quad (10)$$

gdzie  $\kappa^T$  i  $\kappa^X$  są współczynnikami liniowej rozszerzalności termicznej i wilgotnościowej.

Aby uczynić przedstawiony wyżej zestaw równań termo-hydro-mechanicznego modelu suszenia przydatnym do obliczeń numerycznych konkretnych problemów suszarniczych należy uzupełnić go o szczegółowe zależności współczynników materiałowych i współczynników transportu masy i ciepła od zawartości wilgoci, zmiennej w trakcie procesu suszenia oraz sformułować warunki początkowe i brzegowe.

### Warunki brzegowe i początkowe

Warunki brzegowe dla wymiany ciepła i masy wynikają z żądania ciągłości strumieni masy i ciepła na powierzchni brzegowej  $\partial B$ , tj.

$$\mathbf{J}^j \big|_{\partial B^+} = \mathbf{J}^j \big|_{\partial B^-} \quad \text{oraz} \quad \mathbf{q} \big|_{\partial B^+} = \mathbf{q} \big|_{\partial B^-} \quad (11)$$

gdzie znaki + i – odnoszą się do obszarów z fazą ciekłą i gazową.

Po wykorzystaniu wzorów na strumienie masy (2) i ciepła (5) otrzymuje się

$$-\Lambda^l(\nabla\mu^l - \mathbf{g})|_{\partial B^+} = h^v(\mu^v|_{\partial B^+} - \mu^a) \quad (12)$$

$$-\lambda\nabla T|_{\partial B^+} = h_T(T|_{\partial B^+} - T_a) - L_v J^v|_{\partial B^+} \quad (13)$$

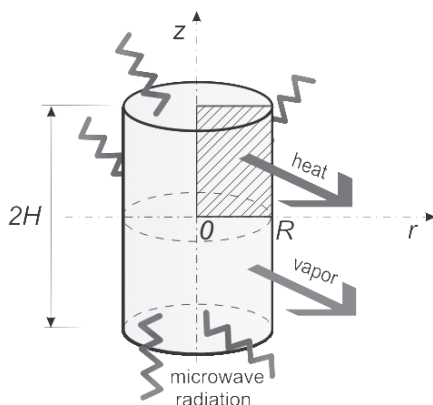
W warunkach (12) i (13) gradienty potencjału chemicznego i temperatury w fazie gazowej zastąpiono różnicami skończonymi, przy czym  $h^v$  i  $h_T$  są współczynnikami konwekcyjnej wymiany masy i ciepła, a  $L_v = (s^v - s^l)T$  oznacza utajone ciepło parowania (indeks  $a$  odnosi się do otaczającego powietrza).

Warunki brzegowe przy opisie stanu mechanicznego materiału suszonego stanowią zerowe wartości naprężeń na powierzchniach brzegowych, jako że naprężenia nie pochodzą od sił zewnętrznych, lecz są generowane wewnątrz materiału wskutek nierównomiernego skurczu. Ponadto, zależnie od sytuacji, formułuje się inne warunki, np. brak przemieszczeń lub warunki symetrii.

Warunki początkowe opisują wyjściowy stan termo-hydro-mechaniczny materiału suszonego, czyli początkową temperaturę, zawartość wilgoci i stan naprężenia lub odkształcenia.

### Przykład suszenia konwekcyjno-mikrofalowego

Poniżej przedstawiono przykład wykorzystania powyższych równań do opisu procesu suszenia konwekcyjno-mikrofalowego próbki w kształcie walca (Rys. 1).



Rys. 1. Cylinder suszony konwekcyjnie-mikrofalowo

Po wstawieniu do równania (6) pochodnej entropii po czasie z odpowiednio zdefiniowanymi pochodnymi cząstkowymi oraz strumienia ciepła (5) otrzymuje się równanie różniczkowe dla temperatury, sprzężone z równaniem na rozkład wilgoci oraz równaniem opisującym deformację materiału suszonego

$$\rho^s c_v \dot{T} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) - \varpi(\mu^l - \mu^v)l + \mathfrak{R} \quad (14)$$

gdzie  $c_v = c^s + c^l X^l + c^v X^v$  oznacza ciepło właściwe materiału suszonego.

Z rozważań termodynamicznych i równania *Gibbsa-Duhema* wynika, że potencjały chemiczne cieczy i pary wewnątrz porów są od siebie zależne, czyli  $\mu^v = \kappa\mu^l$ , gdzie  $0 \leq \kappa \leq 1$  jest współczynnikiem proporcjonalności ( $\kappa = 1$  dla równowagi termodynamicznej).

Równanie opisujące zmiany wilgoci ma postać

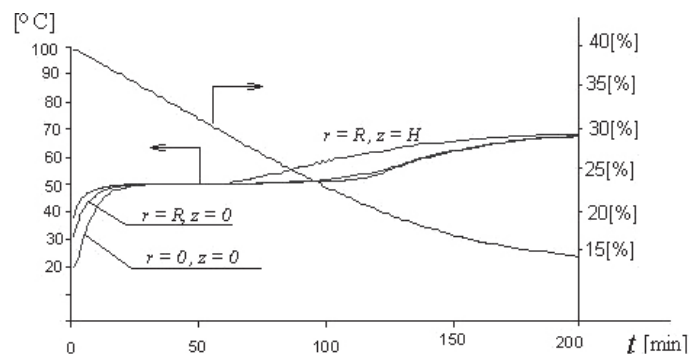
$$\rho^s \dot{X}^l = \nabla \cdot (\Lambda^l \nabla \mu^l) - \varpi(1 - \kappa)\mu^l \quad (15)$$

Równanie to opisuje zmiany wilgoci tylko w stanie ciekłym, gdyż ta wilgość decyduje o stanie mechanicznym materiału suszonego.

Z doświadczeń wynika, że potencjał chemiczny cieczy w porach materiału suszonego jest zdominowany przez potencjał kapilarny, który można wrazić jako funkcję zawartości wilgoci i temperatury stosując

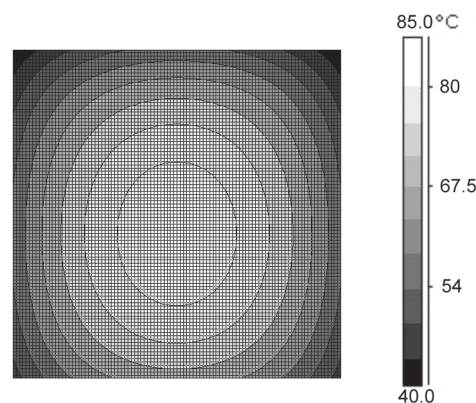
półempiryczną funkcję *Levereta* [1]. W ten sposób powstaje układ równań różniczkowych sprzężonych opisujących zarówno kinetykę suszenia jak i stan mechaniczny materiału suszonego, wyrażony przez związki fizyczne (9) i równanie równowagi mechanicznej (8). Przykładowe zależności współczynników transportu ciepła i masy oraz mechanicznych współczynników materiałowych od zawartości wilgoci i temperatury materiału suszonego przedstawiono w pracach [3] i [4].

Rys. 2 przedstawia numeryczną symulację kinetyki dla całego procesu suszenia konwekcyjnego [4].



Rys. 2. Kinetyka suszenia konwekcyjnego

Rys. 3 przedstawia symulację numeryczną rozkładu temperatury w walcu suszonym mikrofalowo [3].



Rys. 3. Rozkład temperatury w walcu suszonym mikrofalowo

Przy suszeniu mikrofalowym najwyższa temperatura jest generowana w środku walca. Ten numerycznie symulowany obraz potwierdzony został doświadczalnie za pomocą kamery termowizyjnej [3].

### Wnioski

Na gruncie zasad mechaniki ośrodków ciągłych i termodynamiki procesów nieodwracalnych uzyskuje się uogólnione równania transportu masy i ciepła oraz równania opisujące stan mechaniczny materiału suszonego. Dla opisu pełnego procesu suszenia konieczne jest doświadczalne wyznaczenie zależności współczynników materiałowych i transportu ciepła i masy od zmiennego w czasie stanu termo-hydro-mechanicznego materiału suszonego.

### LITERATURA

- [1] S. J. Kowalski: Thermomechanics of drying processes. Springer Verlag, Heidelberg, Berlin 2003.
- [2] S. J. Kowalski: Continuous thermo-hydro-mechanical model using the theory of mixtures, in Modern Drying Technology (Eds: E. Tsotsas, A. S. Mujumdar), WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim 2007.
- [3] S. J. Kowalski, G. Musielak, J. Banaszak: AIChE, **56**, nr 1, 24 (2010).
- [4] S. J. Kowalski, A. Rybicki: Transport in Porous Media. **66**, nr 1, 2 (2007).

Praca została wykonana w ramach projektu DS. 32-127/10 finansowanego przez Politechnikę Poznańską.