

Maciej STASZAK, Piotr WESOŁOWSKI, Krzysztof ALEJSKI

e-mail: staszak@rose.man.poznan.pl

Instytut Technologii i Inżynierii Chemicznej, Wydział Technologii Chemicznej, Politechnika Poznańska, Poznań

Jakościowa oraz ilościowa weryfikacja własnego algorytmu liczącego zapotrzebowanie mocy w modelu CFD dla procesu mieszania

Wstęp

CFD jest coraz szerzej stosowanym narzędziem symulacji oraz projektowania w wielu dziedzinach techniki. Będąc jej fundamentem metoda elementu skończonego daje duże możliwości w zakresie opisu problemu, określania geometrii układu oraz związanych z nią odpowiednich warunków brzegowych. Ponieważ z numerycznego punktu widzenia proces mieszania w zbiorniku stanowi złożony problem matematyczny modelowanie takiego procesu natrafia na spore trudności natury obliczeniowej. W tradycyjnym ujęciu całą złożoność procesu zamykano w odpowiednich korelacjach wyznaczanych na podstawie badań eksperymentalnych odpowiednio dobranych układów mieszających. Korelacje takie stanowią jednak pewien rodzaj czarnej skrzynki, których użycie w innych warunkach, innym procesie lub układzie o innej geometrii obciążone jest zawsze dużym, często nie do przyjęcia, błędem. CFD bazuje na rozwiązywaniu układu równań różniczkowych cząstkowych *Naviera-Stokesa* obowiązujących w dowolnych warunkach przepływu i geometrii wraz z nałożonymi warunkami brzegowymi sformułowanymi odpowiednio dla danego problemu.

Technika CFD

Poszukiwanie rozwiązania równań mechaniki płynów stanowi poważne zagadnienie numeryczne ze względu na naturę modelowanego problemu. Model CFD posługuje się metodą elementów skończonych zdefiniowanych w odniesieniu do objętości płynu. Klasyczne różniczkowe równania cząstkowe *Naviera-Stokesa* opisujące ewolucję pola prędkości \mathbf{v} , wiążąc je z gradientem ciśnienia ∇p , naturą płynu opisywaną tensorem naprężeń $\boldsymbol{\tau}$ oraz polem sił zewnętrznych F

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + F, \quad (1)$$

zostają zdyskretyzowane na przestrzeni dając w rezultacie układ równań algebraicznych dla przypadków ustalonych oraz układ równań różniczkowych zwyczajnych dla przypadków nieustalonych. Dostateczną dokładność odwzorowania przepływu o charakterze turbulentnym, a z takim mamy do czynienia podczas procesów mieszania, można teoretycznie uzyskać dopiero przy dyskretyzacji na bardzo małe, w stosunku do dziedziny, skończone elementy objętościowe. Rozmiary najmniejszych, istotnych z punktu widzenia hydrodynamiki ruchu burzliwego wirów oddaje w przybliżeniu skala *Kolmogorowa*, przy czym biorąc pod uwagę pierwszą hipotezę podobieństwa zaproponowaną przez *Kolmogorowa* [1] zależność

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad (2)$$

daje dla typowych przepływów wody w rurociągach (dla burzliwej dysypacji energii $\varepsilon = 500 \text{ J/m}^3\text{s}$) skalę wielkości η równą w przybliżeniu 10^{-5} m. Uwzględnienie komórek objętościowych o tak małych rozmiarach, dla przestrzeni w aparacie o typowych przemysłowych wymiarach może dać w rezultacie 10^{12} do 10^{15} komórek. Jest to ilość przekraczająca obecne możliwości większości komputerów, głównie ze względu na zapotrzebowanie na pamięć operacyjną oraz szybkość obliczeń. Należy także zaznaczyć, że wierne odtworzenie wirowości przepływu wymagałoby zastosowania odpowiednio mniejszej wielkości elementów objętościowych niż prezentowana wyżej skala.

Rozwiązaniem powyższego problemu jest zastosowanie modeli pomocniczych aproksymujących proces turbulencji w modelach zbudowanych ze skończonych elementów objętościowych o dużo większych niż skala *Kolmogorowa* wymiarach. Unika się w efekcie koniecz-

ności stosowania olbrzymiej liczby elementów skończonych kosztem uwzględnienia w modelu dodatkowych bilansowanych wielkości charakteryzujących turbulencję.

Do testów zaproponowanej własnej metody szacowania mocy mieszania wybrano tzw. model laminarny (nie uwzględniający wielkości turbulentnych) oraz powszechnie stosowany model turbulencji k - ε , który w ogólności w zapisie dla pojedynczej i -tej współrzędnej kartezjańskiej

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho k v_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + G_k + G_b - \rho \varepsilon - Y_M + S_k, \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \varepsilon v_j) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} (G_k + C_{3\varepsilon} G_b) - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} + S_\varepsilon,$$

wiąże energię kinetyczną k związaną z ruchem turbulentnym oraz szybkość turbulentnej dysypacji energii ε w sensie zdefiniowanym przez *Taylor* [2] z polem prędkości \mathbf{v} . W powyższych równaniach G_k oznacza szybkość tworzenia się energii kinetycznej wynikającą ze średniego gradientu prędkości, G_b oznacza szybkość generowania energii kinetycznej turbulencji wynikającą z istnienia sił wyporu, Y_M jest udziałem burzliwości wynikającej ze ściśliwości płynu w całkowitej energii burzliwej. Wielkości σ_k oraz σ_ε są liczbami *Prandla* dla przepływu turbulentnego natomiast $C_{1\varepsilon}$, $C_{2\varepsilon}$ oraz $C_{3\varepsilon}$ są stałymi. S_k i S_ε są członami oznaczającymi źródło/upust odpowiednio energii oraz dysypacji burzliwej. Wartości powyższych stałych przyjęto za pracą *Laundera* i *Spaldinga* [3].

Ze względu na fakt, że istotnym czynnikiem podczas procesu mieszania jest kształtowanie się powierzchni gaz/ciecz uwzględniono dodatkowo model opisujący dynamikę powierzchni międzyfazowej – *Volume Of Fluid*. Model ten jest jedną z wielu powszechnie stosowanych propozycji rekonstrukcji powierzchni międzyfazowej oparty o bilansowanie dodatkowo przyjętej wielkości – ułamka zawartości faz α . Funkcja α jest funkcją skalarną przyjmującą wartości od 0 do 1 w zależności od objętościowej ilości danej fazy f , której dynamika zmienia się zgodnie z ewolucją pola prędkości \mathbf{v}

$$\frac{\partial \alpha_f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \alpha_f = 0, \quad (5)$$

Uwzględnienie istnienia powierzchni międzyfazowej niesie dodatkowe konsekwencje ze względu na bilansowanie pędu za pomocą równania (1). Czynnikiem definiującym powierzchnię pomiędzy fazami f i g w sensie bilansowania sił jest wynikający z ich natury wkład w postaci napięcia powierzchniowego. W równaniu (1) jest to realizowane za pomocą członu źródłowego F .

$$F = \frac{\sigma_{fg} \rho_k \nabla \alpha_f}{\rho_{fg}}. \quad (6)$$

Przy czym lokalne zakrzywienie powierzchni κ definiowane jest klasycznie jako laplasjan z funkcji α i wyznaczone jako dywergencja z gradientu α . W oparciu o znajomość rozwiązania równania (5) czyli rozkładu wartości oraz gradientu α w przestrzeni rekonstruuje się faktyczną powierzchnię definiowaną jako warstwa funkcji o wartości ułamka równej $\frac{1}{2}$, zakładając przy tym arbitralnie, że wartość ta najlepiej przybliży położenie granicy międzyfazowej. Spośród szeregu dostępnych algorytmów rekonstrukcji tej powierzchni wybrany został algorytm oparty o liniową interpolację wartości α zwany schematem rekonstrukcji geometrycznej. Polega on w pierwszym etapie na wyznaczeniu położenia punktów warstwicznych na krawędziach elementów skończonych za pomocą interpolacji liniowej. Drugi etap polega na

wyznaczeniu powierzchni w oparciu o algorytm *marching cubes*. Algorytm ten, szeroko wykorzystywany w zagadnieniach grafiki w przestrzeni trójwymiarowej, pozwala na szybkie i efektywne wyznaczenie powierzchni z dokładnością ograniczoną do wielkości pojedynczego elementu skończonego. Powstała w ten sposób, składająca się z trójkątów, struktura geometryczna przybliża faktyczną geometrię powierzchni międzyfazowej.

Moc mieszania

Zaproponowany model służący do obliczania mocy mieszania wypracowany został w oparciu o analizę fenomenologiczną zjawiska przekazywania energii od powierzchni mieszadła do objętości płynu. Zakładając, że cała energia mechaniczna poruszającego się mieszadła przekłada się na energię odebraną przez poruszany płyn proponuje się zależność

$$P = \iint_S \frac{\rho \omega^2 \omega_{\perp}}{2} dS \quad (7)$$

która wiąże parametry hydrodynamiczne płynu panujące na powierzchni S mieszadła z mocą przekazywaną do objętości płynu w kierunku składowej ω_{\perp} . Całkowanie odbywa się po wszystkich powierzchniach mieszadła – łopatek, piasty oraz fragmentu wału.

Badania eksperymentalne

Badania doświadczalne przeprowadzono w technicznej skali w mieszalniku o średnicy $D = 0,575$ m. Mieszalnik posiadał cztery płaskie przegrody o szerokości $B = 0,1 D$. Jako mieszadło stosowano standardową turbinę *Rushtona* o średnicy $d = 0,200$ m ($D/d = 3$). Medium mieszanym była woda wodociągowa o temperaturze $t = 18^{\circ}\text{C}$, wypełniająca mieszalnik do wysokości $H = D$. Mieszadło zawieszono na wysokości $h = 1/3 H$ ($h/d = 1$). Częstość obrotów mieszadła zmieniano płynnie falownikiem częstotliwości *Varispeed V7*. Pracę falownika kontrolowano on-line za pomocą oprogramowania *CX-Drive* firmy *OMRON*. Pomiar momentu wykonano przy pomocy momentomierza tensometrycznego *MT-10*. Oprogramowanie momentomierza pozwalało rejestrować uśredniane z dziesięciu pomiarów wartości momentu M w zależności od zadawanej częstości obrotów mieszadła n . Moc mieszania P , przy zadawanej częstości obrotów, wyznaczano w oparciu o pomiary momentu skracającego wał mieszadła.

Znajomość mocy pozwoliła, dla badanej turbiny *Rushtona*, wyznaczyć zależność wiążącą moc mieszania P ze bieżącymi obrotami mieszadła:

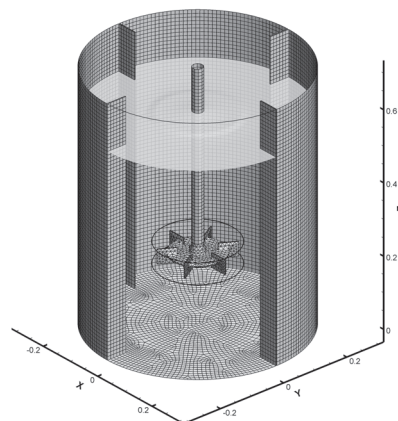
$$P = an^b, \quad (8)$$

Na podstawie wykonanych eksperymentów wyznaczono wartości stałych w powyższym równaniu.

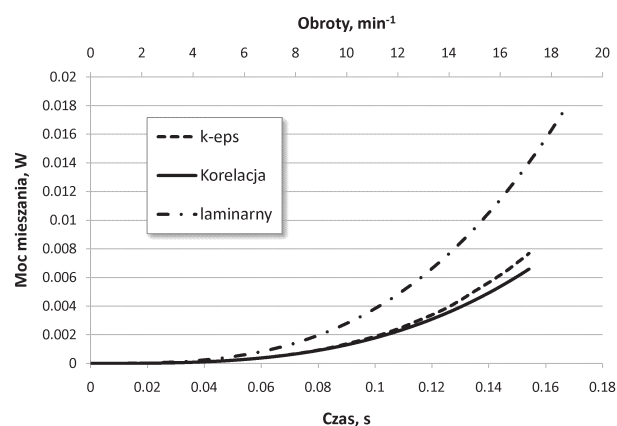
Modelowanie procesu

Opisany powyżej układ eksperymentalny został przedstawiony w formie elementów skończonych na rys. 1. Ze względu na zastosowaną technikę modelowania ruchu mieszadła przestrzeń zbiornika podzielona została na dwa obszary. Zewnętrzny obszar, zbudowany z elementów heksaedrycznych dających lepsze warunki zbieżności dla stosowanego podczas obliczeń modelu VOF oraz wewnętrzny obszar dynamicznie modyfikowanej siatki (*dynamic mesh*) zgodnie z bieżącym położeniem elementów mieszadła. Całkowita ilość elementów objętościowych wynosiła prawie 220 000. Obliczenia wykonane zostały za pomocą komercyjnego oprogramowania *Ansys/Fluent* z dołączonymi własnymi procedurami (*User Defined Functions*) programowanymi i skompilowanymi w języku C. Funkcje UDF stanowią narzędzie pozwalające na budowę własnych modeli w powiązaniu z równaniami *Naviera-Stokesa* (1).

Przedstawiono rozwiązania otrzymane z dwóch modeli – laminarnego oraz *k-ε*. Przez model laminarny rozumie się bezpośrednie rozwiązanie równań (1) bez uwzględnienia dodatkowych charakterystyk turbulencji. Oznacza to przyjęcie założenia, że cała energia mechaniczna płynu podlega jedynie dyssypacji lepkościowej. Przez model *k-ε* rozumie się model, w którym dodatkowo uwzględnia się równania (3)



Rys. 1. Model zbiornika z turbiną *Rushtona*



Rys. 2. Porównanie krzywych modelowych z korelacją eksperymentalną

oraz (4). Wprowadza się zatem założenie, że część energii płynu jest dodatkowo przenoszona i rozpraszana zgodnie z mechanizmem transportu burzliwego.

Z porównania pokazanego na rys. 2 wynika, że obliczenia modelu uproszczonego, laminarnego dają w efekcie spore odchylenie od krzywej korelowanej na podstawie eksperymentu. Uwzględnienie charakterystyk turbulencji czyli energii kinetycznej burzliwości oraz burzliwej dyssypacji energii pozwala na znaczące przybliżenie się do przebiegu eksperymentalnego. W tab. 1 przedstawiono wartości odpowiednich współczynników korelacyjnych policzonych dla eksperymentu jak i obu modeli.

Tab. 1. Wyznaczone współczynniki korelacyjne dla równania (8) – porównanie

	Eksperyment	Model <i>k-ε</i>	Model laminarny
<i>a</i>	1,87	3,24	$2,80 \cdot 10^{-6}$
<i>b</i>	3,02	3,23	3,00

Wnioski

Zaproponowana metoda obliczeń, wykorzystująca równanie (7), daje poprawne i zgodne z eksperymentem wyniki. Istotnym elementem jest prawidłowy dobór podejścia matematycznego oraz uwzględnienie turbulentnego mechanizmu transportu. W oparciu o powyższe wyniki zauważa się, że zwiększenie dokładności obliczeń można uzyskać poprzez dobór stałych modelu *k-ε* na podstawie dopasowania do inwariantów geometrycznych układu mieszadło-zbiornik.

LITERATURA

- [1] *A. Kolmogorow*: Mat. Akad. Nauk ZSRR, **30**, (1941), przedruk: Proc. R. Soc. Lond. A, **434**, (1991).
- [2] *G.I. Taylor*: Proc. R. Soc. Lond. A, **151**, (1935).
- [3] *B.E. Launder, D.B. Spalding*: Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **3**, 269 (1974).

Pracę zrealizowano w ramach 32-267/2010-DS.