Prosimy cytować jako: Inż. Ap. Chem. 2009, 48, 6, 90-91

ALBERT PODGÓRSKI
ANNA JACKIEWICZ

Wydział Inżynierii Chemicznej i Procesowej, Politechnika Warszawska, Warszawa

Filtracja aerozoli w strukturalnie niehomogenicznych filtrach włókninowych. Część I. Sformułowanie modeli

Wprowadzenie

Zgodnie z klasyczną teorią filtracji wgłębnej aerozoli w filtrach włókninowych, penetracja, P cząstek przez filtr o grubości L, złożony z włókien o średnicy d_F i mający gęstość upakowania α wynosi: $P = \exp[-4\alpha LE/\pi(1-\alpha)d_F]$, gdzie E oznacza całkowitą sprawność pojedynczego włókna, obliczaną zwykle addytywnie w oparciu o sprawności cząstkowe E_m dla poszczególnych mechanizmów depozycji: $E = \sum_m E_m$. Dla filtrów mechanicznych (przy braku oddziaływań elektrostatycznych) mechanizmami tymi są: dyfuzja brownowska ($m = D$), bezpośrednie zaczepienie ($m = R$), bezwładność ($m = I$) oraz sprzężenie pomiędzy dyfuzją i konwekcją ($m = DR$), zaś sprawności pojedynczego włókna dla tych mechanizmów wyznaczyć można z korelacji: $E_D = 2{,}9[(1-\alpha)/Ku]^{1/3}Pe^{-2/3}$, $E_R = (1-\alpha)NR^2/[Ku(1+NR)]$, $E_I = Stk[(29{,}6-28\alpha^{0,62})NR^2 + -27{,}5NR^{2,8}]/2Ku^2$ dla $NR < 0{,}4$, $E_I = Stk/Ku^2$ dla $NR \geq 0{,}4$, $E_{DR} = 1{,}24NR^{2/3}/(KuPe)^{1/2}$. Powyższe równania zawierają następujące liczby kryterialne: $Ku = -0{,}5\ln\alpha - 0{,}75 - 0{,}25\alpha^2 + \alpha$ – liczba *Kuwabary*, $Pe = U_0 d_F/D$ – liczba *Pecleta*, $Stk = = \rho_P d_P^2 C_C U_0/18\mu d_F$ – liczba *Stokesa* oraz $NR = d_P/d_F$ – parametr zaczepienia. Znaczenie pozostałych symboli jest następujące: U_0 – średnia prędkość pozorna gazu w filtrze, d_P – średnica, D – współczynnik dyfuzji, ρ_P – gęstość i C_C – współczynnik poprawkowy *Cunninghama* na poślizg dla cząstki aerozolowej, μ – lepkość gazu. Wykorzystanie powyższych zależności w celu teoretycznego obliczenia penetracji cząstek aerozolowych nie nastręcza trudności dla filtra złożonego z włókien o jednakowej średnicy d_F. Wszelako rzeczywiste filtry włókninowe cechują się zwykle dość znacznym rozkładem średnic włókien i zastosowanie naszkicowanej powyżej klasycznej teorii nie jest jednoznaczne. Najczęściej spotykana w literaturze, aprioryczna metoda wykorzystująca klasyczną teorię w odniesieniu do średniej średnicy włókna, prowadzić może do bardzo dużych rozbieżności w stosunku do danych doświadczalnych. Stąd też celem niniejszej pracy jest opracowanie teoretycznie uzasadnionych modeli filtracji aerozoli w polidyspersyjnych filtrach włókninowych, uwzględniających pełny rozkład średnic włókien. Jak pokazuje analiza danych literaturowych oraz badania strukturalne filtrów własnej produkcji rozkład średnic włókien dla większości filtrów włókninowych można precyzyjnie aproksymować za pomocą rozkładu logarytmiczno-normalnego, którego funkcja gęstości, $g(d_F)$, dana jest wzorem:

$$g(d_F) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, d_F \ln\sigma_{gd_F}} \exp\left[-\frac{\ln^2(d_F/d_{Fg})}{2\ln^2\sigma_{gd_F}}\right] \tag{1}$$

gdzie d_{Fg} oznacza średnią geometryczną średnicę włókna, zaś σ_{gd_F} – geometryczne odchylenie standardowe tego rozkładu.

Sformułowanie modeli i dyskusja wyników

W celu oszacowania dolnej możliwej wartości penetracji cząstek aerozolowych przez polidyspersyjny filtr włókninowy proponujemy model przepływu doskonale wymieszanego, PMFM (*Perfectly Mixed Flow Model*), który zakłada, że włókna o różnych średnicach są losowo rozłożone w całej objętości filtra i dobrze wzajemnie wymieszane, prędkości przepływu powietrza przez komórki *Kuwabary*, zawierające włókna o różnych średnicach, są takie same w mezoskali. A zatem penetracja aerozolu przez filtr, P_{PMFM}, dla modelu *PMFM* może być wyznaczona przez uśrednienie (dla każdego z m mechanizmów depozycji) ilorazu $E_m(d_F)/d_F$ dla całego rozkładu wielkości włókien $g(d_F)$:

$$P_{PMFM} = \exp\left[\frac{-4\alpha L}{\pi(1-\alpha)}\left(\sum_m \int_0^\infty \frac{E_m(d_F)}{d_F} g(d_F)\,\mathrm{d}d_F\right)\right] = \exp\left[\frac{-4\alpha L}{\pi(1-\alpha)}\left(\sum_m \frac{E_m(d_{Fg})}{d_{Fg}}\Phi_m\right)\right] \tag{2}$$

gdzie przez Φ_m oznaczono poprawkę dla m-tego mechanizmu, przez którą należy przemnożyć wyrażenie $E_m(d_{Fg})/d_{Fg}$ (czyli jak dla filtra monodyspersyjnego, złożonego z włókien o średnicy równej średniej średnicy geometrycznej rozważanego filtra polidyspersyjnego, d_{Fg}), aby uzyskać poprawny wynik dla modelu *PMFM* stosując klasyczne równania dla d_{Fg}:

$$\Phi_m = \int_0^\infty \frac{E_m(d_F)\, d_{Fg}}{E_m(d_{Fg})\, d_F} g(d_F)\,\mathrm{d}d_F \tag{3}$$

Dla rozkładu logarytmiczno-normalnego danego równaniem (1), poprawki te, dla dyskutowanych wcześniej mechanizmów depozycji, mogą być obliczone z równania (3); dla trzech mechanizmów (D, DR, I) znaleziono dokładne rozwiązania analityczne:

$$\Phi_D = \exp\left(\frac{25}{18}\ln^2\sigma_{gd_F}\right) \tag{4}$$

$$\Phi_{DR} = \exp\left(\frac{169}{72}\ln^2\sigma_{gd_F}\right) \tag{5}$$

$$\Phi_I = \frac{1}{J_1 - J_2}\left\{J_1 e^{8\ln^2\sigma_{g_{dF}}}\left[\frac{1}{2} - {}_1F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2,}, -\pi S_1^2\right)S_1\right] - \right.$$
$$-J_2 e^{\frac{4{,}8^2}{2}\ln^2\sigma_{g_{dF}}}\left[\frac{1}{2} - {}_1F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\pi S_2^2\right)S_2\right] + \tag{6}$$
$$\left. +2e^{2\ln^2\sigma_{g_{dF}}}\left[\frac{1}{2} + {}_1F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\pi S_3^2\right)S_3\right]\right\}, \quad \text{dla } NR_g < 0{,}4$$

$$\Phi_I = \frac{1}{2}\left\{J_1 e^{8\ln^2\sigma_{g_{dF}}}\left[\frac{1}{2} - {}_1F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2,}, -\pi S_1^2\right)S_1\right] - \right.$$
$$-J_2 e^{\frac{4{,}8^2}{2}\ln^2\sigma_{g_{dF}}}\left[\frac{1}{2} - {}_1F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\pi S_2^2\right)S_2\right] + \tag{7}$$
$$\left. +2e^{2\ln^2\sigma_{g_{dF}}}\left[\frac{1}{2} + {}_1F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\pi S_3^2\right)S_3\right]\right\}, \quad \text{dla } NR_g > 0{,}4$$

Symbol ${}_1F_1(a, b, c)$ w równaniach (6) i (7) oznacza specjalną funkcję matematyczną trzech argumentów, zwaną konfluentną, hipergeometryczną funkcją *Kummera* pierwszego rodzaju, która łatwo może być obliczona, np. za pomocą programu *Mathematica* lub *MathCad*; ponadto, zastosowano następującą notację: $J_1 = \left(29{,}6 - 28\alpha^{0{,}62}\right)NR_g^2$, $J_2 = 27{,}5NR_g^{2{,}8}$, $S_1 = (\ln(5NR_g/2) + 4\ln^2\sigma_{g_{dF}})/\sqrt{2\pi}\ln\sigma_{g_{dF}}$, $S_2 = (\ln(5NR_g/2) + 4{,}8\ln^2\sigma_{g_{dF}})/\sqrt{2\pi}\ln\sigma_{g_{dF}}$, $S_3 = (\ln(5NR_g/2) + 5\ln^2\sigma_{g_{dF}})/\sqrt{2\pi}\ln\sigma_{g_{dF}}$ dla skrócenia zapisu w równaniach (6)–(7).

Dla mechanizmu bezpośredniego zaczepienia ($m = R$) równanie (3) nie ma dokładnego analitycznego rozwiązania. Znaleziono jednak przybliżone rozwiązanie o bardzo dobrej dokładności poprzez interpolację dyskretnych rozwiązań numerycznych uzyskanych dla różnych wartości NR_g i $\sigma_{g_{dF}}$:

$$\Phi_R = \exp\left[\left(\frac{1 + 2bNR_g}{\frac{2}{9} + bNR_g}\right)\ln^2\sigma_{g_{dF}}\right] \tag{8}$$

gdzie $b = 0{,}50273 - 0{,}40676\sigma_{g_{dF}} + 0{,}22949\sigma_{g_{dF}}^2$.

Opisany powyżej model *PMFM* przewiduje zawsze niższą penetrację cząstek aerozolowych niż ta, która zostałaby wyznaczona w oparciu o klasyczną teorię filtracji zastosowaną dla średniej średnicy włókna.

Drugi z modeli granicznych, który proponujemy, to model przepływu całkowicie segregowanego, FSFM (*Fully Segregated Flow Model*), którego celem jest oszacowanie maksymalnej możliwej penetracji cząstek aerozolowych przez strukturalnie niehomogeniczne filtry włókninowe. Zakłada on, iż transport cząstek aerozolowych przez sekwencję różnych komórek *Kuwabary*, zawierających włókna o różnych średnicach, jest całkowicie segregowany i, że spadek ciśnienia na jednostkę grubości filtra wzdłuż tych różnych ścieżek transportu jest identyczny. Innymi słowy, model *FSFM* stanowi reprezentację rozważanego filtra niehomogenicznego za pomocą szeregu różnych monodyspersyjnych filtrów połączonych równolegle, mających łącznie taki sam rozkład włókien, jak rozważany filtr polidyspersyjny, i cechujących się identycznymi spadkami ciśnienia; ten ostatni warunek implikuje wszakże, że pozorne prędkości przepływu, $U_0(d_F)$, przez ścieżki, zawierające włókna o odmiennych średnicach są różne i wynoszą one (dla logarytmiczno-normalnego rozkładu średnic włókien):

$$U_0(d_F) = \frac{U_0 d_F^2}{d_{Fg}^2\exp(2\ln^2\sigma_g)} \tag{9}$$

Penetrację P_{FSFM} cząstek aerozolowych przez polidyspersyjny filtr o logarytmiczno-normalnych rozkładzie średnic włókien można obliczyć ze wzoru:

$$P_{FSFM} = \frac{\int_0^\infty d_F P(d_F)\exp\left[-\frac{\ln^2(d_F/d_{Fg})}{2\ln^2\sigma_{g_{dF}}}\right]\mathrm{d}d_F}{\sqrt{2\pi}\ln\sigma_{g_{dF}}\, d_{Fg}^2\exp(2\ln^2\sigma_g)} = \tag{10}$$
$$= \frac{\int_0^\infty d_F\exp\left\{-\frac{4\alpha L}{\pi(1-\alpha)}\frac{\sum_m E_m[d_F, U_0(d_F)]}{d_F}\right\}\exp\left[\frac{\ln^2(d_F/d_{Fg})}{2\ln^2\sigma_{g_{dF}}}\right]\mathrm{d}d_F}{\sqrt{2\pi}\ln\sigma_{g_{dF}}\, d_{Fg}^2\exp(2\ln^2\sigma_g)}$$

Niestety model *FSFM*, w odróżnieniu od modelu *PMFM*, nie może być rozwiązany analitycznie, a wyznaczenie wartości P_{FSFM} wymaga każdorazowo numerycznego całkowania równania (10). Przedstawiony model *FSFM* przewiduje zawsze wyższą wartość penetracji, niż ta, której należałoby oczekiwać z klasycznej teorii zastosowanej do średniej średnicy włókna; naturalnie rozbieżność ta jest tym większa, im wyższy jest stopień polidyspersyjności filtra mierzony wartością $\sigma_{g_{dF}}$.

Opisane graniczne modele – *PMFM* i *FSFM* – stanowią oszacowanie – odpowiednio z dołu i z góry – oczekiwanego zakresu penetracji cząstek aerozolowych w filtrach polidyspersyjnych. Rzeczywista wartość penetracji dla konkretnego filtra o danym stopniu wymieszania włókien o różnych średnicach powinna zawierać się więc pomiędzy P_{PMFM} a P_{FSFM} i zależeć od stopnia segregacji przepływu aerozolu w filtrze wokół włókien o odmiennych rozmiarach. Stąd też ostatecznie proponujemy ogólny model przepływu częściowo segregowanego, PSFM (*Partially Segregated Flow Model*) jako kombinację liniową modeli granicznych:

$$P_{PSFM} = sP_{FSFM} + (1-s)P_{PMFM} \tag{11}$$

gdzie $0 \le s \le 1$ jest bezwymiarowym, empirycznym parametrem, który nazwaliśmy stopniem segregacji, a który wyznaczony być musi w oparciu o dane doświadczalne. Model *PSFM* może opisywać zarówno przypadki, gdy penetracja aerozolu jest większa, jak też i gdy jest mniejsza, niż przewiduje to klasyczna teoria bazująca jedynie na średniej średnicy włókna. Wyniki weryfikacji doświadczalnej zaproponowanego ogólnego modelu filtracji cząstek aerozolowych o dowolnych średnicach przez polidyspersyjne filtry włókninowe oraz sposób wyznaczania wartości parametru s i wpływ prędkości filtracji na jego wartość przedstawiono w naszym drugim artykule [1].

LITERATURA

1. *A. Jackiewicz, A. Podgórski*: Inż. Ap. Chem. **48**, nr 6, 92 (2009).

Praca wykonana w ramach grantu MEiN nr T09C 014 30. Udział A. Jackiewicz jest współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego, projekt „Program Rozwojowy Politechniki Warszawskiej".