

ALEKSANDER SULKOWSKI

Wydział Mechaniczno-Energetyczny, Politechnika Wroclawska, Wrocław

# Geometryczny model zastępczy projekcyjnego obrazu cząstki ciała stałego

## Uwagi wstępne

Kształt cząstki ciała stałego jest jednym z najistotniejszych parametrów warunkujących przebieg procesów technologicznych wykorzystujących materiały ziarniste [1]. Liczne przykłady potwierdzają tezę, iż niewielka korekta w zakresie rozmiaru czy kształtu cząstek powodować może istotne zmiany własności fizykochemicznych otrzymywanych produktów. Każda metoda charakteryzacji kształtu cząstki jest pewnym rozwiązaniem kompromisowym, w którym ceną jaką płaci się za czytelność formy opisu, jest utrata pewnej części informacji dotyczących cech geometrycznych badanego obiektu. W niniejszej pracy założono, że kształt cząstki trójwymiarowej można scharakteryzować na podstawie analizy cech geometrycznych jej dwuwymiarowego obrazu projekcyjnego. U podstaw zaproponowanej metody opisu cech geometrycznych powierzchni cząstki, leży koncepcja porównania jej kształtu z kształtem pewnego geometrycznego modelu zastępczego, morfologicznie związanego z projekcyjnym obrazem rozważanego obiektu.

## Objaśnienia podstawowych pojęć

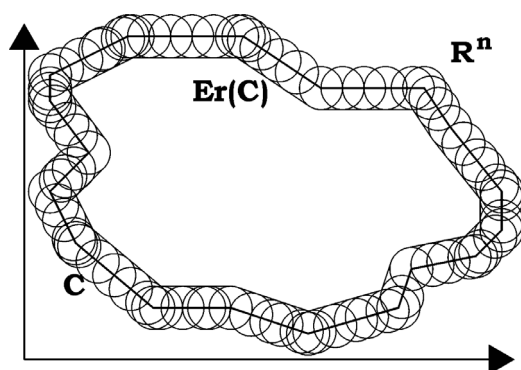
Z uwagi na przejrzystość prowadzonych rozważań celowe będzie przypomnienie niektórych pojęć z zakresu geometrii i morfologii matematycznej.

**Cząstka** [4]. Pojęcie to oznaczać będzie pewien obiekt materialny, którego geometrycznym modelem jest zwarty i spójny [2] podzbiór  $C$  przestrzeni  $R^3$ , posiadający niepuste wnętrze.

**Zbiór wypukły** [2]. Zbiór  $C$  nazywany będzie wypukłym jeżeli wraz z każdymi dwoma swoimi punktami  $P, Q$  zawiera on również łączący te punkty odcinek  $[P, Q]$ .

**Powłoka wypukła** [2]. Pod pojęciem powłoki wypukłej zbioru  $C$ , oznaczanej symbolem  $Conv(C)$ , rozumieć będziemy najmniejszy zbiór wypukły zawierający zbiór  $C$ .

**Obraz projekcyjny** [4]. Obrazem projekcyjnym trójwymiarowego zbioru  $C$  nazywany będzie jego rzut ortogonalny na ustaloną dwuwymiarową podprzestrzeń przestrzeni  $R^3$ .

Rys. 1. Erozja zbioru  $C$ 

**Erozja** [3]. Erozją zwartego zbioru  $C$ , oznaczaną symbolem  $E_r(C)$ , generowaną przez element strukturalny jakim jest kula o środku w punkcie  $x$  i promieniu  $r$  ( $K(x, r)$ ), nazywa się różnicę mnogościową tego zbioru oraz zbioru wszystkich kul o ustalonym promieniu  $r$ , których środki są punktami brzegowymi zbioru  $C$ . Tak więc

$$E_r(C) = C - \bigcup_{x \in \delta(C)} K(x, r) \quad (1)$$

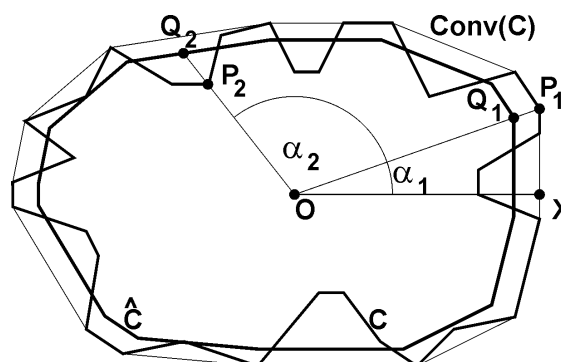
gdzie  $\delta(C)$  oznacza brzeg zbioru  $C$ . Wartość liczbowa długości promienia  $r$  nazywać będziemy głębokością erozji. Operację erozji ilustruje rys. 1.

## Geometryczny model zastępczy projekcyjnego obrazu cząstki

Geometryczną aproksymację projekcyjnego obrazu cząstki  $C$  stanowić będzie pewien obiekt zastępczy  $\hat{C}$ , który powstaje w wyniku zastosowania morfologicznej operacji erozji w odniesieniu do powłoki wypukłej zbioru  $C$ , przy założeniu że głębokość erozji  $r_0$  jest tak dobrana aby pole powierzchni zbioru  $\hat{C}$  było równe polu powierzchni projekcyjnego obrazu cząstki  $C$ . Tak więc rozważany obiekt zastępczy  $\hat{C}$  jest zbiorem postaci

$$\hat{C} = E_{r_0}(Conv(C)) \quad (2)$$

Ilustracja (Rys. 2) przedstawia położenie zbioru  $\hat{C}$  w stosunku do obrazu  $C$  oraz jego powłoki wypukłej  $Conv(C)$ .

Rys. 2. Geometryczny model zastępczy  $\hat{C}$  projekcyjnego obrazu cząstki  $C$ 

## Funkcja konturowa

Zasadniczym elementem, prezentowanej w niniejszej pracy, metody oceny kształtu projekcyjnego obrazu cząstki  $C$ , jest procedura opisu „oscylacji” jego linii brzegowej wokół linii brzegowej obiektu zastępczego  $\hat{C}$ . Dla celu modelowania wzajemnego położenia obu rozważanych linii brzegowych służyć będzie zdefiniowana poniżej funkcja  $\Phi_C(\alpha)$ .

*Funkcja konturowa.* Niech dany będzie projekcyjny obraz cząstki  $C$ , jego powłoka wypukła  $Conv(C)$  oraz obiekt zastępczy  $\hat{C}$ . Załóżmy, że wybrany został pewien punkt centralny „O” w zbiorze  $C$ . Rozważaną sytuację ilustruje rys. 2. Funkcją konturową zbioru  $C$ , oznaczaną symbolem  $\Phi_C(\alpha)$ , nazywać będziemy funkcję daną wzorem

$$\Phi_C(\alpha) = \frac{R_C(\alpha)}{R_{\hat{C}}(\alpha)} \quad (3)$$

która wyraża stosunek długości promienia wodzącego  $R_C(\alpha)$  punktu brzegowego zbioru  $C$  do długości promienia wodzącego  $R_{\hat{C}}(\alpha)$  punktu brzegowego obiektu zastępczego  $\hat{C}$ . Można wykazać [4], że funkcja konturowa  $\Phi_C(\alpha)$  ma następujące właściwości:

- 1)  $\Phi_C(\alpha): [0, 2\pi] \rightarrow R^+$ .
- 2)  $\Phi_C(\alpha)$  jest funkcją ciągłą i okresową o okresie  $2\pi$ .
- 3)  $\Phi_C(\alpha) > 1 \Leftrightarrow$  gdy punkt brzegowy projekcyjnego obrazu cząstki wyznaczony przez promień wodzący  $R_C(\alpha)$ , leży na zewnątrz obszaru  $\hat{C}$ .
- 4)  $\Phi_C(\alpha) < 1 \Leftrightarrow$  gdy punkt brzegowy projekcyjnego obrazu cząstki wyznaczony przez promień wodzący  $R_C(\alpha)$ , leży wewnątrz obszaru  $\hat{C}$ .
- 5)  $\Phi_C(\alpha) = 1 \Leftrightarrow$  gdy punkt brzegowy projekcyjnego obrazu cząstki  $C$ , wyznaczony przez promień wodzący  $R_C(\alpha)$ , jest jednocześnie punktem brzegowym zbioru  $\hat{C}$ , co w tym przypadku oznacza, że linie brzegowe zbiorów  $C$  oraz  $\hat{C}$  przecinają się.

#### Współczynniki kształtu

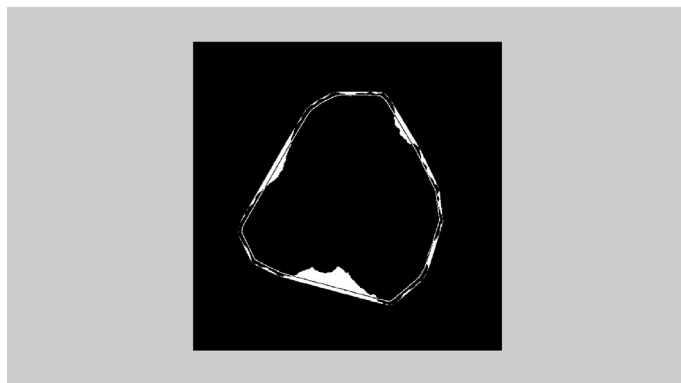
Liczbowa ocenę położenia obrazu cząstki  $C$  względem jego powłoki wypukłej oraz obiektu zastępczego umożliwiającą współczynniki kształtu  $\Psi_1(C)$  oraz  $\Psi_2(C)$  dane wzorami

$$\Psi_1(C) = \frac{\lambda(\hat{C})}{\lambda(Conv(C))}, \quad \Psi_2(C) = \frac{\lambda[(C - \hat{C}) \cup (\hat{C} - C)]}{\lambda(Conv(C))} \quad (4)$$

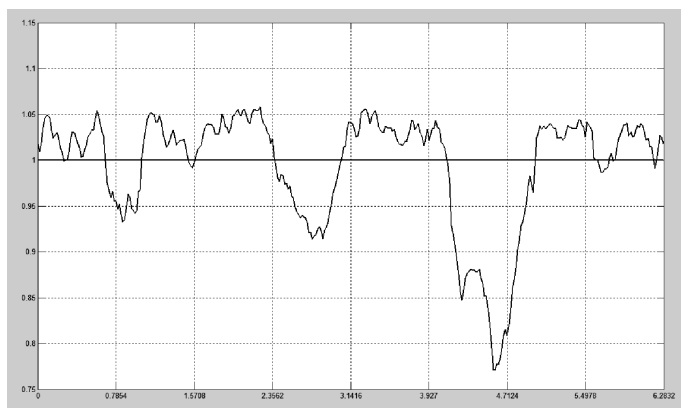
Współczynnik deficytu wypukłości  $\Psi_1(C)$  wyraża stosunek miary pola obiektu zastępczego, do miary pola powłoki wypukłej projekcyjnego obrazu cząstki, natomiast współczynnik dyspersji obszaru  $\Psi_2(C)$  wyraża stosunek pola różnicy symetrycznej zbiorów  $C$  oraz  $\hat{C}$ , do miary pola powłoki wypukłej projekcyjnego obrazu cząstki.

#### Wyniki obliczeń wg prezentowanej metody

Na kolejnych dwóch ilustracjach (Rys. 3. i 4) przedstawiono wyniki funkcjonowania stosownej procedury numerycznej



Rys. 3. Powłoka wypukła i geometryczny model zastępczy obrazu cząstki rzeczywistej



Rys. 4. Funkcja konturowa projekcyjnego obrazu cząstki rzeczywistej z rys. 3

umożliwiającej wyznaczenie obiektu zastępczego jak również graficznej postaci funkcji konturowej dla projekcyjnego obrazu cząstki rzeczywistej.

#### LITERATURA

1. *K.S. Sztaba*: Niektóre własności geometryczne zbiorów ziarn mineralnych. Zeszyty Naukowe Akademii Górniczo-Hutniczej, Rozprawy 25, Kraków, 1964.
2. *W. Rudin*: Functional Analysis. Mc. Graw-Hill Book Company, New York, 1973.
3. *J. Serra*: Image Analysis and Mathematical Morphology. Academic Press, London, 1982.
4. *A. Sulkowski*: Algorytm wyznaczania kształtu zastępczego projekcyjnego obrazu cząstki ciała stałego. Raport SPR 13/08, I-22/W-9. Politechnika Wroclawska, 2008.