OCHRONA ŚRODOWISKA

Vol. 34 2012 Nr 2

Andrzej Bielski

Adwekcyjny transport zanieczyszczeń w rzece z uwzględnieniem dyfuzji dwukierunkowej w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku przepływu

Zanieczyszczenia w środowisku wodnym ulegają rozprzestrzenianiu w wyniku różnych procesów, takich jak adwekcja, dyfuzja molekularna, czy dyfuzja turbulentna. Dodatkowo na rozproszenie zanieczyszczeń wpływa dyspersja masy, wynikająca z nierównomiernego rozkładu prędkości w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku przepływu wody w rzece. Równaniem uwzględniającym te procesy jest równanie adwekcji–dyfuzji w stanach nieustalonych [1–6]. Rozwiązanie takiego równania w przypadku ogólnym jest możliwe tylko metodami numerycznymi. Jednak wystarczającą informację o sposobie rozprzestrzeniania się zanieczyszczeń można uzyskać z analitycznych rozwiązań równania, w pewnych szczególnych przypadkach rozkładu ich ilości w czasie i przestrzeni, w przypadku prostej geometrii ośrodka, w którym występuje przepływ wody. Rozwiązania analityczne pozwalają na szybkie uzyskanie przybliżonej informacji o czasie wystąpienia określonej zawartości danego zanieczyszczenia w przekroju pomiarowo-kontrolnym, oszacowanie czasu trwania zanieczyszczenia przewyższającego wartość uznaną za bezpieczną, wyznaczenie stopnia wymieszania zanieczyszczeń z wodą w rzece itp.

W pracy przeanalizowano przypadek adwekcyjnego transportu zanieczyszczeń z uwzględnieniem dwukierunkowej dyspersji poprzecznej w rzece o korycie prostokątnym. Wyniki uzyskane metodami numerycznymi, przeznaczonymi do rozwiązywania równań różniczkowych, mogą być obciążone wieloma błędami numerycznymi. Rozwiązanie analityczne równania transportu masy, co prawda uzyskane tylko w pewnych przypadkach rozprzestrzeniania się zanieczyszczeń, pozbawione jest jednak takich błędów i może być dodatkowo wykorzystane do oceny jakości wyników uzyskanych metodami numerycznymi.

Model transportu masy

Ogólna postać równania różniczkowego, opisującego adwekcyjno-dyspersyjny transport masy w stanach nieustalonych, jest następująca [1–3, 7–18]:

$$\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{\partial (V_x c)}{\partial x}+\frac{\partial (V_y c)}{\partial y}+\frac{\partial (V_z c)}{\partial z}= \tag{1}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(D_x\frac{\partial c}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(D_y\frac{\partial c}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(D_z\frac{\partial c}{\partial z}\right)+r(c)$$

Dr inż. A. Bielski: Politechnika Krakowska, Wydział Inżynierii Środowiska, Katedra Wodociągów, Kanalizacji i Monitoringu Środowiska, ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków, *abielski@riad.usk.pk.edu.pl*

W dalszych rozważaniach przyjęto następujące założenia:

– prędkości poprzeczna i pionowa są zerowe (V_y=0, V_z=0),

– prędkość V_x jest stała i nie zależy od czasu t i współrzędnych x, y, z,

– zanieczyszczenia transportowane są w kierunku osi x w wyniku adwekcji (D_x=0),

– współczynniki dyfuzji D_y i D_z są stałe i nie zależą od czasu i współrzędnych x, y, z,

– szybkość procesu przemiany zanieczyszczeń może być opisana mechanizmem jednocząsteczkowym pierwszego rzędu r(c)=–kc [1, 4, 19].

Przy tych założeniach równanie transportu zanieczyszczeń, wynikające z równania (1), przyjmie postać:

$$\frac{\partial c}{\partial t}+V_x\frac{\partial c}{\partial x}=D_y\frac{\partial^2 c}{(\partial y)^2}+D_z\frac{\partial^2 c}{(\partial z)^2}-kc \tag{2}$$

Rozwiązanie równania transportu zanieczyszczeń

Przed przystąpieniem do rozwiązania równania (2) należy dokonać jego przekształcenia do postaci niezależnej od współrzędnej x. W tym celu wprowadzono tzw. współrzędną ruchomą (x_1) daną wzorem:

$$x_1 = x - V_x t \tag{3}$$

oraz trzy nowe współrzędne (t_1, y_1, z_1):

$$t_1 = t;\ y_1 = y;\ z_1 = z \tag{4}$$

które umożliwiają zapisanie równania (2) w następującej formie równoważnej, przy czym czas (t) w tym równaniu odnosi się do ilości zanieczyszczeń w przekroju x=V_xt (transport adwekcyjny):

$$\frac{\partial c}{\partial t}=D_y\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}+D_z\frac{\partial^2 c}{\partial z^2}-kc \tag{5}$$

Rozwiązanie równania (5) można przedstawić w postaci iloczynu trzech funkcji:

$$c = Y(y)\,Z(z)\,T(t) \tag{6}$$

które są zależne tylko od jednej współrzędnej, odpowiednio y, z, t. Postać analityczną każdej z tych funkcji można otrzymać w podobny sposób do tego, jaki przedstawiono w pracy [4].

W celu wyznaczenia całki szczególnej równania (5) konieczne jest podanie:

– warunku początkowego w przykładowej postaci:

$$c(y,z,t) = 0, \text{ przy } t{=}0,\ y\in<0;2S>,\ z\in<0;2H> \tag{7}$$

– warunku brzegowego w przykładowej postaci:

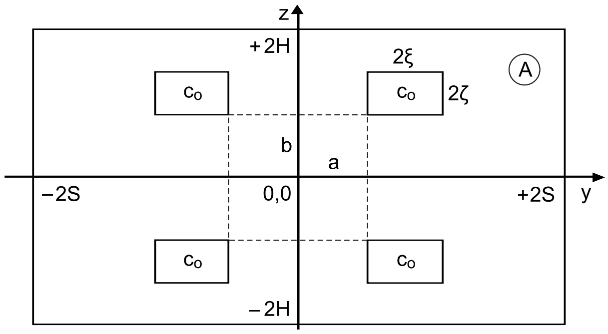
$$c(y,z,t) = c_o(y,z) \tag{8}$$

przy t=0 lub t≥0, $y\in<0;2S>$, $z\in<0;2H>$

– warunków dotyczących pochodnych zawartości zanieczyszczeń ($\partial c/\partial y$, $\partial c/\partial z$) na granicy ośrodków woda/dno rzeki. W przypadku koryta o przekroju prostokątnym (rys. 1):

$$\partial c/\partial y = 0, \text{ przy } y{=}(\pm 2S, 0),\ t\geq 0,\ z\in<0,2H> \tag{9}$$

$$\partial c/\partial z = 0, \text{ przy } z{=}(\pm 2S, 0),\ t\geq 0,\ y\in<0,2S> \tag{10}$$



Rys. 1. Schemat przekroju poprzecznego rzeki (koryto prostokątne) z zaznaczonym rozkładem zawartości zanieczyszczeń $c_o(y,z)$ (c_o ma stałą wartość w obszarze prostokąta (2ξ, 2ζ); na zewnątrz prostokąta c_o=0; prostokąt jest przesunięty na odległość a od lewego brzegu rzeki oraz znajduje się na wysokości b nad dnem rzeki; rzeczywista rzeka o szerokości 2S oraz głębokości 2H reprezentowana jest przez ćwiartkę A układu współrzędnych)

Fig. 1. Cross-section of the river (rectangular bed) with indicated distribution of pollutant concentrations $c_o(y,z)$

Przyjęcie warunków (9) i (10) oznacza, że granica ośrodków woda/dno rzeki jest w przypadku zanieczyszczeń dyfuzyjnie nieprzenikliwa.

Rozwiązanie równania (5) w postaci całki szczególnej (6), w przypadku rozkładu zawartości zanieczyszczeń przedstawionych na rysunku 1, ma następującą postać:

$$\begin{aligned} c(y,z,t) = \Bigg\{ & c_o\frac{\xi\zeta}{SH} + \sum_{m=1}^{m=+\infty} c_o \frac{4\xi}{Sm\pi}\cos\left(\frac{m\pi(b+\zeta)}{2H}\right) \\ & \sin\left(\frac{m\pi\zeta}{2H}\right)\cos\left(\frac{m\pi}{2H}z\right)\exp\left(-\frac{m^2\pi^2 D_z}{4H^2}t\right) + \sum_{n=1}^{n=+\infty} c_o\frac{4\zeta}{Hn\pi} \\ & \cos\left(\frac{n\pi(a+\xi)}{2S}\right)\sin\left(\frac{n\pi\xi}{2S}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{2S}y\right)\exp\left(-\frac{n^2\pi^2 D_y}{4S^2}t\right) + \\ & + \sum_{n=1}^{n=+\infty}\sum_{m=1}^{m=+\infty}\Bigg[c_o\frac{16}{mn\pi^2}\cos\left(\frac{m\pi(b+\zeta)}{2H}\right)\sin\left(\frac{m\pi\zeta}{2H}\right) \\ & \cos\left(\frac{n\pi(a+\xi)}{2S}\right)\sin\left(\frac{n\pi\xi}{2S}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{2S}y\right)\cos\left(\frac{m\pi}{2H}z\right) \\ & \exp\left(-\left(\frac{n^2\pi^2 D_y}{4S^2} + \frac{m^2\pi^2 D_z}{4H^2}\right)t\right)\Bigg]\Bigg\}\exp(-kt) \end{aligned} \tag{11}$$

Uzyskanie powyższego rozwiązania wymagało zastosowania twierdzenia o najlepszej aproksymacji kwadratowej funkcji oraz twierdzeń o ciągach ortogonalnych [20].

Równanie (11) wykorzystano następnie do obliczeń rozkładu zawartości zanieczyszczeń w różnych przekrojach rzeki, których lokalizację określa czas (t).

Przykładowe rozwiązania

W celu graficznego zobrazowania przykładowych rozkładów ilości zanieczyszczeń w czasie i przestrzeni przeprowadzono obliczenia z wykorzystaniem równania (11) zakładając następujące wartości: c_o=100 g/m^3, a=20 m, ξ=5 m, S=50 m, b=0,5 m, ζ=0,5 m, H=1,5 m, D_y=0,05 m^2/s, D_z=0,0005 m^2/s, M=4000, N=4000, k=0. Ewolucję rozprzestrzeniania się zanieczyszczeń w przekroju poprzecznym rzeki w kolejnych chwilach t={100 s, 500 s, 1000 s, 2000 s, 5000 s, 10000 s} zilustrowano na rysunku 2.

Z przedstawionych wykresów wynika, że maksima zawartości zanieczyszczeń przesuwały się zawsze w kierunku bliższych krawędzi przekroju poprzecznego – w tym wypadku dna rzeki (z=0) i jej lewego brzegu (x=0). Z uwagi na brak dyspersji wzdłużnej masa zanieczyszczeń zgromadzonych w danym przekroju, wyznaczona za pomocą całki powierzchniowej c(y, z, t) w czasie t, była zawsze taka sama. Oznaczało to, że w każdym przekroju poprzecznym rzeki średnia zawartość zanieczyszczeń była taka sama i wynosiła w tym przypadku $c_{śr}=c_o(\xi\zeta/SH)$=3,33(3) g/m^3. Wraz z upływem czasu zmieniało się natomiast średnie odchylenie zawartości zanieczyszczeń (σ) od wartości średniej ($c_{śr}$). Wartość tego odchylenia można obliczyć z zależności:

$$\sigma(t) = \sqrt{\frac{1}{4SH}\int_0^{2H}\int_0^{2S}\left(c(y,z,t) - c_{śrd}\right)^2 dydz} \tag{12}$$

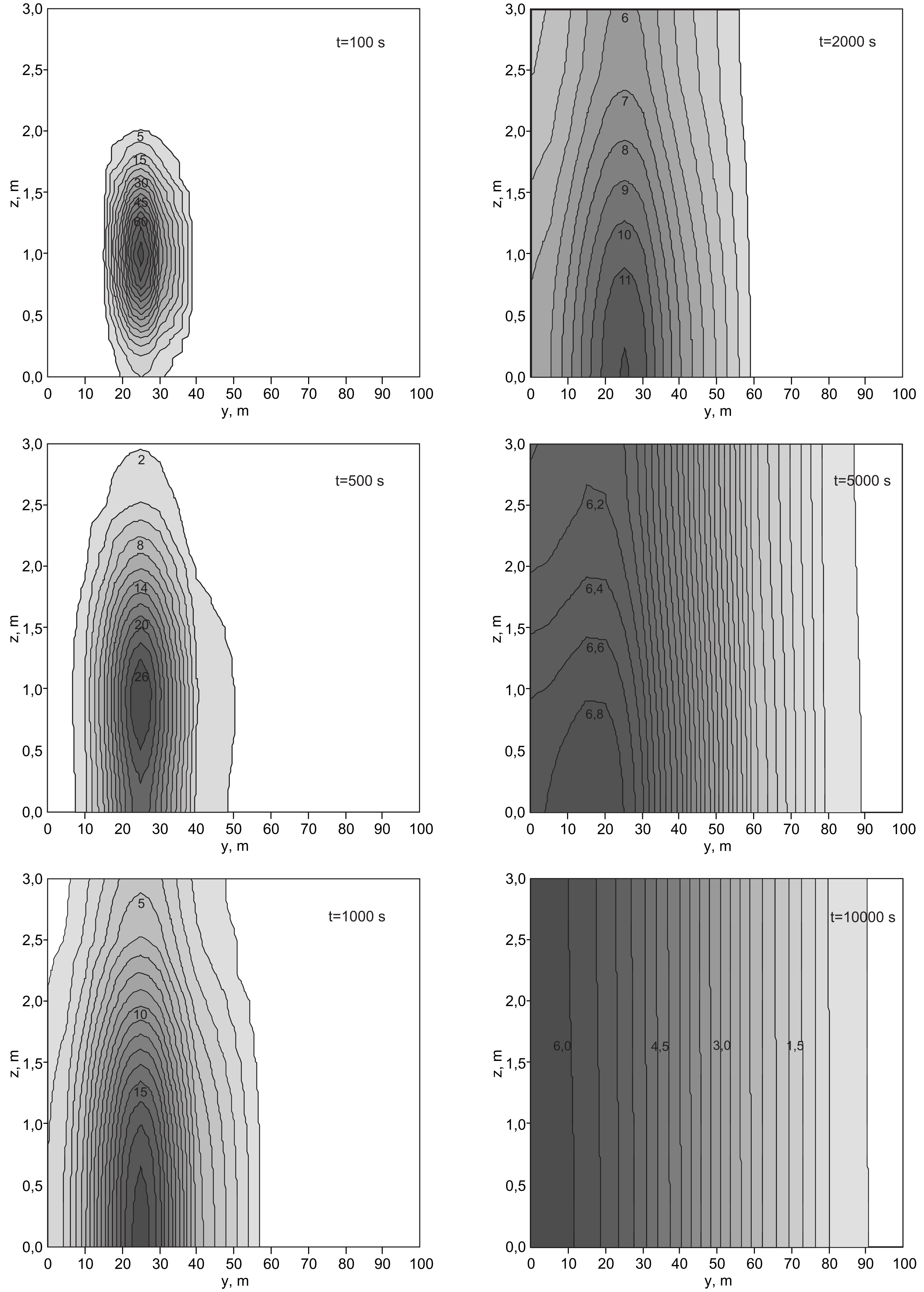
Udział ν odchylenia σ w wartości $c_{śr}$, opisany wzorem:

$$\nu(t) = \frac{\sigma(t)}{c_{śrd}} \tag{13}$$

jest współczynnikiem zmienności zawartości zanieczyszczeń w przekroju rzeki. Współczynnik ten charakteryzuje stopień wymieszania zanieczyszczeń z wodą w rzece (przy ν=0 zanieczyszczenia są wymieszane całkowicie – roztwór homogeniczny).

Przebieg zmian wartości współczynnika zmienności (ν) przedstawiono na rysunku 3. Całkę (12) obliczono metodą Simpsona. Początkowe zmiany wartości tego współczynnika były duże (do chwili t≈20000 s), natomiast później zmiany były wolne, prawie liniowe. W przekroju, któremu odpowiadał współczynnik zmienności ν≈0,1 (lub mniejszy) nastąpiło praktycznie całkowite wymieszanie zanieczyszczeń z wodą w rzece. W tym wypadku przekrój ten znajdował się w odległości od źródła, której odpowiadał czas przepływu około 48223 s. Przy ν=0,01 (1% odchylenie zawartości zanieczyszczeń w przekroju od wartości średniej) czas t≈98052 s.

Z uwagi na błędy analityki chemicznej oraz błędy związane z poborem reprezentatywnej próbki wody w określonym punkcie przekroju rzeki, teoretyczne 10% odchylenie zawartości zanieczyszczeń od wartości średniej można uznać za całkowity błąd pomiaru. Z tego względu wartości ν≈0,1 odpowiadał czas praktycznie całkowitego wymieszania zanieczyszczeń z wodą w rzece. Oczywiście z teoretycznego punktu widzenia całkowite (idealne) wymieszanie zanieczyszczeń z wodą w rzece wystąpi po nieskończenie



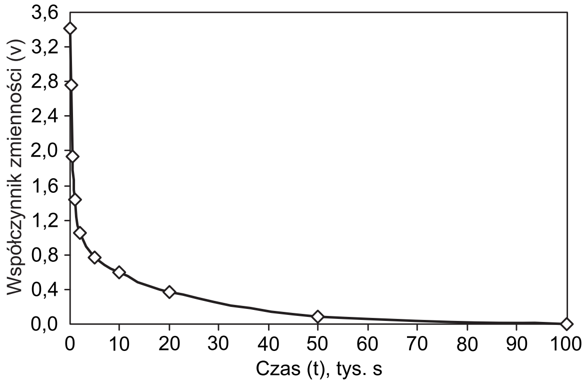
Rys. 2. Rozkład zawartości zanieczyszczeń w przekroju poprzecznym rzeki po danym czasie
Fig. 2. Distribution of pollutant concentrations in the river cross-section after the time given

długim czasie. Przybliżone wzory [21], umożliwiające oszacowanie czasu (t_m) praktycznie całkowitego wymieszania zanieczyszczeń z wodą w rzece, nie dają informacji o stopniu wymieszania zanieczyszczeń, a więc nie jest znana informacja o odchyleniu zawartości zanieczyszczeń od wartości średniej w przekroju rzeki. Ogólna postać takiego wzoru jest następująca (D oznacza odpowiedni współczynnik dyfuzji – D_y w przypadku szerokości, D_z w przypadku głębokości) [3]:

$$t_m = \frac{l^2}{2D} \tag{14}$$

W analizowanym przykładzie czas pełnego wymieszania w przekroju pionowym na podstawie wzoru (14) wynosił $t_m^V=(2H)^2/2D_z=9000$ s, natomiast czas pełnego wymieszania w kierunku poprzecznym $t_m^{tH}=(2S)^2/2D_y=100000$ s. Czas mieszania zanieczyszczeń odczytany z rysunku 3 przy $\nu=0,01$ był zbliżony do czasu związanego z mieszaniem w kierunku poprzecznym. Równanie (14) nie dało jednak żadnej informacji o stopniu wymieszania zanieczyszczeń. Dopiero analiza rozkładu ich zawartości w przekroju poprzecznym rzeki może dać informację o zmienności zawartości zanieczyszczeń, a więc o jakości wymieszania.

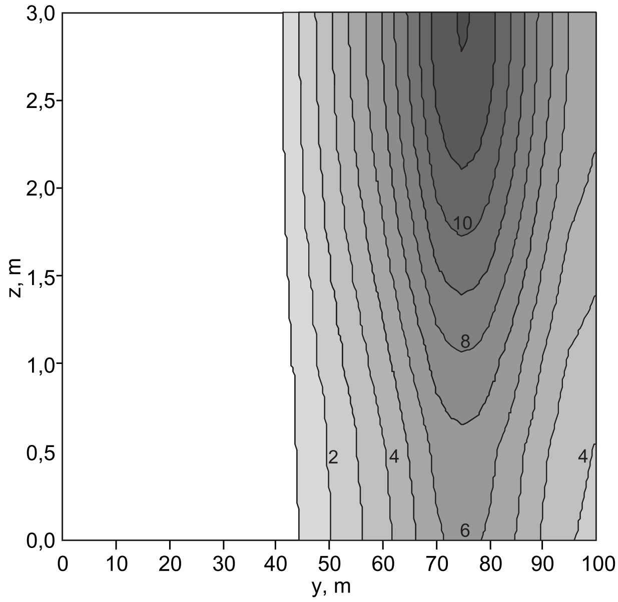
Po czasie mieszania $t_m^V=9000$ s istotnie nie wystąpiły lokalne maksima zawartości zanieczyszczeń w przekroju pionowym, co wynikało z rozkładu zanieczyszczeń sporządzonego po czasie 10000 s (rys. 2). Po czasie krótszym, np. 5000 s, wystąpiło lokalne maksimum ilości zanieczyszczeń w odległości około 15 m od lewego brzegu rzeki i znaczne zróżnicowanie w przekroju pionowym, co oznaczało, że nie nastąpiło jeszcze praktycznie całkowite wymieszanie zanieczyszczeń w tym kierunku. Po czasie 10000 s stopień wymieszania zanieczyszczeń w przekroju rzeki był niewielki, ponieważ współczynnik zmienności $\nu=0,60$ (60% odchylenie zawartości zanieczyszczeń w przekroju od wartości średniej) (rys. 3).



Rys. 3. Przebieg współczynnika zmienności w czasie ($x=V_x t$)
Fig. 3. Change in coefficient of variation with time ($x= V_x t$)

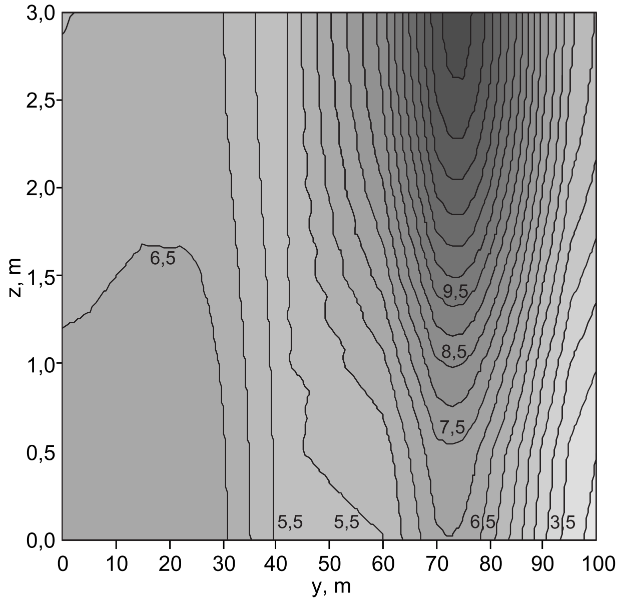
Superpozycja rozkładów zawartości zanieczyszczeń

Równanie różniczkowe (5) jest liniowe. W takim wypadku, jeżeli istniałyby szczególne rozwiązania tego równania, to kombinacja liniowa tych szczególnych rozwiązań również byłaby rozwiązaniem równania (5). Przyjęto, że poniżej pierwszego źródła zanieczyszczenia, o wcześniej podanych parametrach, znajdowało się drugie źródło, do którego czas dopływu wynosił 3000 s. Założone parametry modelu (11) dotyczące drugiego źródła były następujące: $c_o=100$ g/m^3, a=70 m, $\xi=5$ m, S=50 m, b=1,5 m, $\zeta=0,5$ m, H=1,5 m, $D_y=0,05$ m^2/s, $D_z=0,0005$ m^2/s, M=4000, N=4000, k=0. Rozkład zawartości zanieczyszczeń pochodzących tylko z drugiego źródła po czasie 2000 s zilustrowano na rysunku 4.



Rys. 4. Rozkład zawartości zanieczyszczeń w przekroju poprzecznym rzeki w przypadku drugiego źródła zanieczyszczeń (t=2000 s)
Fig. 4. Distribution of pollutant concentrations in the river cross-section in the case of a second pollution source (t=2000 s)

Korzystając z liniowości równań różniczkowych zsumowano rozkłady zawartości zanieczyszczeń pochodzących z pierwszego źródła po czasie 5000 s i drugiego źródła po czasie 2000 s (czas przepływu między tymi źródłami wynosił 3000 s). W ten sposób otrzymano wypadkową mapę rozkładu zawartości zanieczyszczeń pochodzących z obu źródeł (rys. 5).



Rys. 5. Superpozycja dwóch rozkładów zawartości zanieczyszczeń w rzece
Fig. 5. Superposition of two distributions of pollutant concentrations

Podsumowanie

Przedstawione rozwiązanie równania (5) w postaci formuły (11) umożliwiło wyznaczenie rozkładu zawartości zanieczyszczeń w przekrojach poprzecznych rzeki. Wykazano, że ich wartości maksymalne, w coraz dalszych przekrojach, przemieszczały się zawsze w kierunku bliższych krawędzi przekroju poprzecznego rzeki. Taka sytuacja mogła zaistnieć tylko wtedy, gdy zanieczyszczenia nie były wprowadzane w środku symetrii przekroju rzeki. W związku z tym próbki wody powinny być pobierane w pobliżu miejsc wystąpienia maksymalnych zawartości zanieczyszczeń określonych za pomocą równania (11). Pobór próbek w niewłaściwym miejscu może prowadzić do błędnego wniosku o zawartości zanieczyszczeń, a tym samym do błędnych decyzji dotyczących zarządzania jakością wody w rzece. Dysponując rozkładem zawartości zanieczyszczeń w przekrojach poprzecznych rzeki można określić zależność współczynnika zmienności od czasu. Umożliwia to wyznaczenie czasu niezbędnego do wymieszania zanieczyszczeń z wodami rzeki w odpowiednim stopniu.

Wyniki obliczeń uzyskane za pomocą wzoru (11) można wykorzystać do testowania jakości wyników otrzymanych za pomocą algorytmów numerycznych i jakości samych algorytmów. Z doświadczeń numerycznych wynika, że liczba składników wziętych do sumowania w równaniu (11) powinna być dość duża (np. 2000, 4000) w celu zapewnienia zadowalającej dokładności obliczeń. Funkcje sinus i cosinus, bez względu na wartości m oraz n, mogą być bliskie np. 1, –1 , a jedynymi czynnikami tłumiącymi ich wartości są funkcja wykładnicza i liczby m, n oraz iloczyn m·n. W związku z tym maksymalne wartości m oraz n przy sumowaniu powinny być tak dobrane, aby iloraz wartości odpowiedniej funkcji wykładniczej i maksymalnej liczby m lub n (lub iloczynu m·n) nie spowodował zmiany obliczanej zawartości zanieczyszczeń większej od zadanej dokładności.

Oznaczenia

a – odległość od brzegu rzeki do źródła zanieczyszczenia w kierunku y, m
b – odległość od brzegu rzeki do źródła zanieczyszczenia w kierunku y, m
c – zawartość zanieczyszczeń, g/m^3
c_o – zawartość zanieczyszczeń w przekroju początkowym rzeki, g/m^3
$c_{śrd}$ – średnia zawartość zanieczyszczeń, g/m^3
D_x , D_y , D_z – współczynniki dyfuzji w kierunkach x, y, z, m^2/s
k – stała szybkości procesu, 1/s
l – wymiar liniowy rzeki (szerokość 2S lub głębokość 2H), m
m – stała
M – maksymalna wartość m
n – stała
N – maksymalna wartość n
r(c) – szybkość procesu chemicznego lub biochemicznego, g/m^3s
t, t_1 – czas, s
t_m – czas mieszania, s
$t_m{}^V$ – czas mieszania w kierunku pionowym, s
$t_m{}^{tH}$ – czas mieszania w kierunku poziomym poprzecznym, s
V_x, V_y, V_z – składowe prędkości przepływu w kierunkach x, y, z, m/s
Y, Z, T – funkcje składowe zawartości zanieczyszczeń
x – współrzędna pozioma w kierunku przepływu rzeki, m
x_1 – współrzędna ruchoma, m
y, y_1 – współrzędna pozioma w kierunku prostopadłym do osi x, m
z, z_1 – współrzędna pionowa, m
2ξ – szerokość strefy dopływających zanieczyszczeń, m
2ζ – wysokość strefy dopływających zanieczyszczeń, m
σ – odchylenie zawartości zanieczyszczeń od wartości średniej, g/m^3
ν – współczynnik zmienności

LITERATURA

1. A. BIELSKI, A. GOŃKA: Wyznaczanie drogi mieszania zanieczyszczeń w ciekach wodnych. *Archiwum Ochrony Środowiska* 2001, vol. 27, nr 1, ss. 19–43.
2. E. BOEKER, R. van GRONDELLE: Fizyka środowiska. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2002.
3. K. RUP: Procesy przenoszenia zanieczyszczeń w środowisku naturalnym. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 2006.
4. A. BIELSKI: Adwekcja z dwukierunkową dyspersją zanieczyszczeń w stanach nieustalonych w środowisku wodnym. *Czasopismo Techniczne* 2003, z. 7.
5. A. BIELSKI: Modelling of mass transport in watercourses considering mass transfer between phases in unsteady states. Part II. Mass transport during absorption and adsorption processes. *Environment Protection Engineering* 2011, Vol. 37, No. 4, pp. 71–89.
6. A. BIELSKI: Modelling of mass transport in watercourses considering mass transfer between phases in unsteady states. Part I. Mass transfer process for periodic and aperiodic changes of concentration. *Environment Protection Engineering* 2011, Vol. 37, No. 1, pp. 35–51.
7. W. CZERNUSZENKO: Rozprzestrzenianie się zanieczyszczeń w rzekach i kanałach. Instytut Meteorologii i Gospodarki Wodnej, Warszawa 1983.
8. W. CZERNUSZENKO: Naturalne mieszanie w rzekach. *Archiwum Hydrotechniki* 1986, z. 1–2.
9. Z. KEMBŁOWSKI, S. MICHAŁOWSKI, G. STRUMIŁŁO, R. ZARZYCKI: Podstawy teoretyczne inżynierii chemicznej i procesowej. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1985.
10. C. ZOPPOU, J.H. KNIGHT: Analytical solution of a spatially variable coefficient advection–diffusion equation in up to three dimensions. *Applied Mathematical Modelling* 1999, Vol. 23, pp. 667–685.
11. M. DRAGO, B. CESCON, L. IOVENITTI: A three-dimensional numerical model for eutrophication and pollutant transport. *Ecological Modelling* 2001, Vol. 145, No. 1, pp. 17–34.
12. J.M. SAWICKI: Migracja zanieczyszczeń. Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, Gdańsk 2003.
13. G.L. BOWIE, W.B. MILLS, D.B. PORCELLA, C.L. CAMPBELL, J.R. PAGENKOPF, G.L. RUPP, K.M. JOHNSON, P.W.H. CHAN, S.A. GHERINI, C.E. CHAMBERLIN: Rates, Constants, and Kinetics Formulations in Surface Water Quality Modeling. EPA-600/3-85/040, U.S. EPA, Athens, GA 1985.
14. J.L. MARTIN, S.C. McCUTCHEON: Hydrodynamics and Transport for Water Quality Modeling. CRC Press 1999.
15. S.C. CHAPRA: Surface Water Quality Modeling. Waveland Press 2008.
16. P. WESSELING: Principles of Computational Fluid Dynamics. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg 2001.
17. N. SU: Generalisation of various hydrological and environmental transport models using the Fokker-Planck equation. *Environmental Modelling & Software* 2004, Vol. 19, pp. 345–356.
18. P.M. ROWIŃSKI: Modelowanie transportu zanieczyszczeń w rzekach na przykładzie rzeki Narwi. Instytut Geofizyki Polskiej Akademii Nauk, Warszawa 2005.
19. J. SZARAWARA, J. SKRZYPEK: Podstawy inżynierii reaktorów chemicznych. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1980.
20. W. ŻAKOWSKI, W. KOŁODZIEJ: Matematyka. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 2003.
21. J. BOUCHEZ, E. LAJEUNESSE, J. GAILLARDE, C. FRANCE-LANORD, P. DUTRA-MAIA, L. MAURICE, C. GUALTIERI: Discussion: Turbulent mixing in the Amazon River: The isotopic memory of confluences. *Earth and Planetary Science Letters* 2010, Vol. 290, pp. 37–43; *Earth and Planetary Science Letters* 2011, Vol. 311, No. 3–4, pp. 448–450.

Bielski, A. Advection Transport of River Pollutants with Bi-directional Diffusion in the Plane Perpendicular to the Direction of Flow. *Ochrona Srodowiska* 2012, Vol. 34, No. 2, pp. 19–24.

Abstract: The paper presents an analytical solution of the differential equation that describes advection mass transport with bi-directional diffusion in the plane perpendicular to flow under conditions of unsteady state. The solution obtained makes it possible to define the distribution of pollutant concentrations in the river cross-section and determine the coefficient of variation in the concentrations of the pollutants. Knowledge of the coefficient of variation offers the possibility for determining (up to the extent desired) the time during which the pollutants and riverine water become intermixed. To visualize the method proposed, an example was presented of time-related evolution of the pollutant concentration map, and a method was suggested, which shows how to produce such maps in the case of several pollution sources.

Keywords: River pollution, advection, bi-directional diffusion, unsteady state.