

Jarosław Sobota, Ryszard Szetela

## Jednowymiarowe modele natężenia i jakości ścieków dopływających do oczyszczalni komunalnych

W zagadnieniach projektowania i optymalizacji, a także sterowania procesami jednostkowymi i układami oczyszczania ścieków, bardzo istotną rolę odgrywa informacja o natężeniu i jakości ścieków dopływających do oczyszczalni, czyli tzw. wejściach procesu [1]. Stworzenie matematycznego modelu, opisującego charakterystykę zmienności wejść oczyszczalni ścieków, daje możliwość prognozowania ich wartości, a co za tym idzie – wcześniejszego przygotowania obiektu i nastaw układu sterowania procesami oczyszczania pod kątem spodziewanych wskaźników jakości ścieków surowych. Takie przewidywanie wartości natężenia dopływu i wartości wskaźników jakości wejść stwarza możliwość znacznej poprawy skuteczności i ekonomiki pracy oczyszczalni ścieków [2].

W niniejszej pracy przedstawiono wyniki badań nad wyborem najlepszego modelu opisującego wartości wskaźników jakości ścieków surowych dopływających do oczyszczalni komunalnych. Na podstawie przeprowadzonych analiz oraz wyników wcześniejszych prac [3,4] stwierdzono, że klasyczny sezonowy model autoregresji [5] w postaci:

$$\nabla_{24}Z_t = \varphi_1 \nabla_{24}Z_{t-1} + a_t \quad (1)$$

opisuje zmienność zarówno natężenia dopływu ścieków, jak i wartości wskaźników tlenowych (BZT<sub>5</sub>, ChZT), lepiej niż niesezonowe modele autoregresji. Przy praktycznym zastosowaniu tego modelu okazało się jednak, że nie daje on zadowalających prognoz dla wskaźników nie mających dokładnej dobowej powtarzalności.

W niniejszej pracy zaproponowano zmodyfikowany model w postaci:

$$Z_t = \varphi_1 Z_{t-1} + \varphi_2 Z_{t-24} + \varphi_3 Z_{t-25} + a_t \quad (2)$$

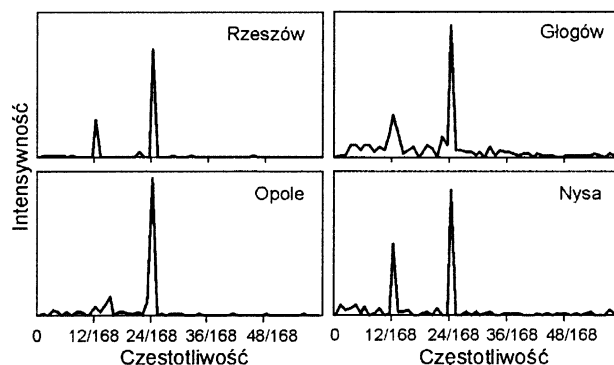
który inaczej uwzględni dobową sezonowość, dzięki czemu jakość prognoz uległa znacznej poprawie.

Celem pracy było porównanie zmodyfikowanych modeli sezonowych i klasycznego modelu sezonowego Boxa-Jenkinsa do opisu zmienności i prognozowania szeregów czasowych natężenia i wartości wskaźników jakości ścieków dopływających do oczyszczalni komunalnych. W badaniach wykorzystano dane z oczyszczalni ścieków w Głogowie, Rzeszowie, Nysie i Opolu. Ze względu na dobową powtarzalność wartości większości wskaźników ścieków surowych, szczególny nacisk położono na uwzględnienie ich sezonowości 24-godzinnej.

### Modelowanie wartości natężenia dopływu ścieków

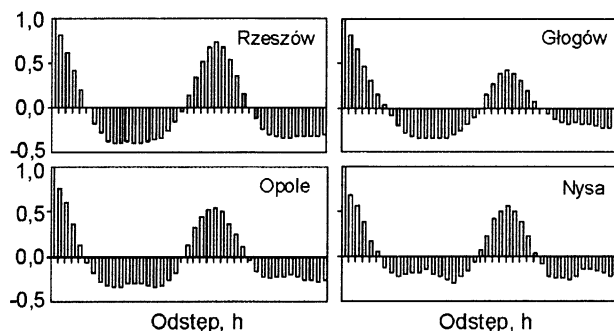
Na potrzeby badań wprowadzono następujące oznaczenia:  
 $\bar{z}$  – średnia arytmetyczna szeregu surowego, –  
 $\sigma_z^2$  – wariancja szeregu surowego, –  
 $\Delta\varphi$  – błędy estymatorów (odchylenia standardowe), –  
 $\sigma_a^2$  – wariancja resztowa modelu, –  
 $R$  – współczynnik determinacji ( $R = \sqrt{1 - \sigma_a^2 / \sigma_z^2}$ ), –  
 $SQ$  – charakterystyka opisująca stopień usunięcia autokorelacji z szeregu reszt modelu (porównywana z rozkładem  $\chi^2$ ), –  
 $AIC$  (Akaike's Information Theoretic Criterion) – kryterium porównawcze modeli, uwzględniające stopień złożoności modelu ( $AIC = \log[(1 + 2p/N)\sigma_a^2]$ ), –  
 $p$  – liczba parametrów autoregresji, –  
 $N$  – liczba pomiarów użytych do estymacji, –

Szeregi czasowe wartości natężenia dopływu ścieków do oczyszczalni w Głogowie, Rzeszowie, Nysie i Opolu miały charakter okresowy, przy czym w periodogramach (rys. 1) zauważalna była dobowa powtarzalność wartości dopływu w poszczególnych godzinach doby [6,10].



Rys. 1. Periodogramy natężenia dopływu ścieków do oczyszczalni

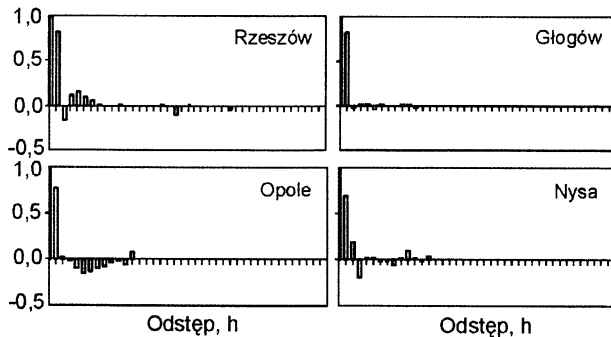
Istnienie sezonowości dobowej stwarza możliwość zastosowania modeli zawierających w swojej strukturze 24-godzinną powtarzalność. Wykresy autokorelacji (rys. 2) wykazały



Rys. 2. Autokorelacje natężenia dopływu ścieków do oczyszczalni

istnienie istotnej korelacji pomiędzy kolejnymi pomiarami, co sugeruje zastosowanie modelu autoregresji. Stwierdzono także istotne skorelowanie wartości odległych od siebie o 24 godz.

Wykresy autokorelacji cząstkowych (rys. 3), praktycznie wygaszające się po pierwszym wstępie wstecz pokazały, że właściwie tylko pierwsza korelacja wstecz była istotna. Dlatego optymalnego modelu, opisującego natężenie dopływu ścieków do oczyszczalni, należy poszukiwać wśród modeli autoregresji pierwszego stopnia.



Rys. 3. Autokorelacje cząstkowe natężenia dopływu ścieków do oczyszczalni

Do dalszej analizy wybrano dwa modele w postaci:

– model niesezonowy (M1):

$$(1 - \phi B)Z_t = a_t \rightarrow Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + a_t \quad (3)$$

– model z różnicowaniem sezonowym (M2):

$$(1 - \phi B)\nabla_{24}Z_t = a_t \rightarrow \nabla_{24}Z_t = \phi_1 \nabla_{24}Z_{t-1} + a_t \quad (4)$$

w których:

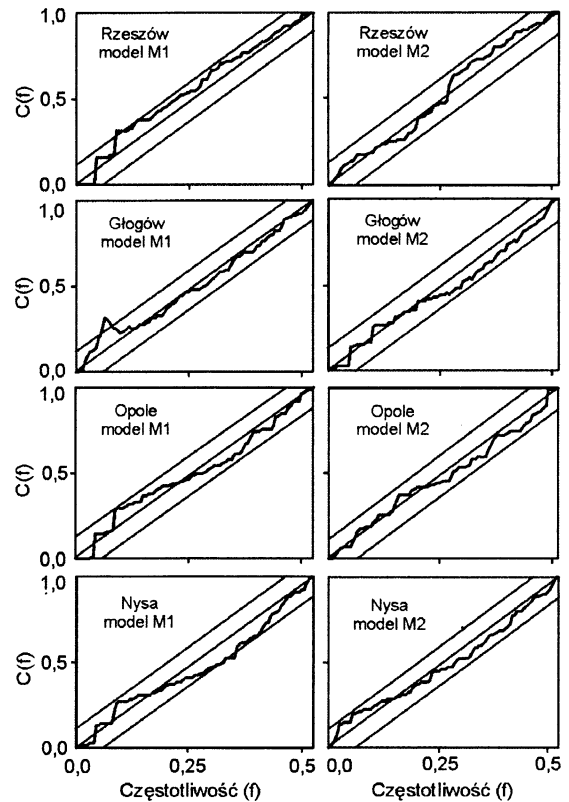
B – operator przesunięcia wstecz ( $BZ_t = Z_{t-1}$ ),

Po uwzględnieniu, że  $\nabla_{24}Z_t = Z_t - Z_{t-24}$ , model M2 przyjmuje postać:

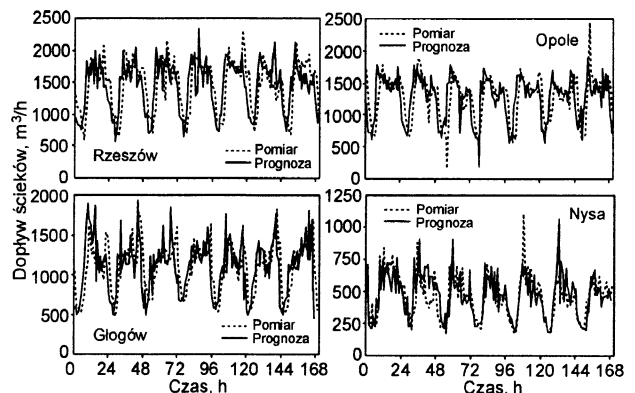
$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + Z_{t-24} - \phi_1 Z_{t-25} + a_t \quad (5)$$

Jeżeli z szeregu  $Z_t$  nie zostanie usunięta wartość średnia ( $\bar{z}$ ), to w modelu M1 pojawi się człon stały  $b_0$ . Odejmowanie średniej nie wpłynie jednak na wartości estymowanych parametrów modelu. W modelu M2 operacja różnicowania spowoduje usunięcie wartości średniej. Oba modele są modelami autoregresji pierwszego rzędu o takiej samej liczbie estymowanych parametrów. Modele te dopasowano do szeregów czasowych natężenia dopływu ścieków do poszczególnych oczyszczalni (168 pomiarów w odstępie 1 godz. dla modelu M1 i 192 dla modelu M2) [5,11,12]. Reszty modeli poddano sprawdzeniu diagnostycznemu testem istotności na dostateczne wyeliminowanie autokorelacji oraz periodogramem skumulowanym, pod kątem podobieństwa szeregu reszt do białego szumu. Model niesezonowy M1 okazał się nieadekwatny dla wszystkich analizowanych oczyszczalni, zarówno według testu istotności autokorelacji, jak i pod względem periodogramu skumulowanego. Odchylenia periodogramu reszt modelu M1 w okolicach częstotliwości 1/24 (rys. 4) świadczyły o obecności sezonowości w resztach, natomiast model M2 skutecznie taką sezonowość eliminował.

Na tej podstawie model M1 uznano za nieadekwatny, zatem nie nadający się do prognozowania. Prognozy na jeden krok w przód dla modelu M2 przedstawiono na rysunku 5 (do prognozy wykorzystano kolejne 168 pomiarów – inne niż do estymacji parametrów modelu).



Rys. 4. Periodogramy skumulowane reszt modeli M1 i M2 dla natężenia dopływu ścieków do oczyszczalni



Rys. 5. Prognoza natężenia dopływu ścieków do oczyszczalni na 1 krok w przód modelem M2

Periodogramy skumulowane reszt modelu M2 (nie pokazane w pracy) potwierdziły adekwatność modelu. Jak widać na wykresach prognozy przepływu, model M2 był bardzo wrażliwy na wszelkie zakłócenia. Wystąpienie takiego zakłócenia, np. opadu deszczu lub doby o nietypowym przypływie (np. chwilowy nietypowo wysoki lub niski przepływ), powodowało automatyczne przeniesienie przez model tej anomalii do kolejnej doby, gdyż model M2 zawiera w swej strukturze bardzo silną powtarzalność dobową. W celu osłabienia tej powtarzalności model M2 zmodyfikowano do postaci M3, przez dodanie współczynników  $\phi_2$  i  $\phi_3$ :

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-24} - \phi_3 Z_{t-25} + a_t \quad (6)$$

Model ten, zgodnie z metodologią Boxa i Jenkinsa, można zapisać w postaci:

$$\Phi(1 - B)\nabla_{24}Z_t = a_t \quad (7)$$

w której  $\Phi = [1, \phi_1, \phi_2, \phi_3]$  – wektor współczynników modelu, –

Jeżeli od szeregu  $Z_t$  nie zostanie odjęta wartość średnia ( $\bar{z}$ ), to w modelu M3 pojawi się człon stały  $b_0$ . Odjęcie średniej, podobnie jak w modelu M1, nie wpłynęło na wartości estymowanych parametrów modelu. Wstępne oszacowanie parametrów modelu M3 dokonano na podstawie obliczonych autokorelacji według wzorów:

$$\varphi_1 = r_1 \tag{8}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & r_{24} \\ r_{24} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{24} \\ r_{25} \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \varphi_2 = \frac{r_{24}(1 - r_{25})}{1 - r_{24}^2}, \quad \varphi_3 = \frac{r_{25} - r_{24}^2}{1 - r_{24}^2}$$

Estymację parametrów przeprowadzono za pomocą algorytmu Marquardta [5,11]. Okazało się, że szacowanie wartości członu stałego ( $b_0$ ) ze wzoru Boxa-Jenkinsa [5]:

$$b_0 = \mu \left( 1 + \sum_{i=1}^p \varphi_i \right) \tag{10}$$

przy małych wartościach  $\varphi_1$  (praktycznie dla  $\varphi_1 < 0,65$ ) powodowało jego zawyżenie, a w konsekwencji – przesunięcie wykresu prognozy w górę. Jako środek zaradczy zaproponowano podstawianie w modelu M3 dokładnej wartości  $b_0$ , obliczonej ze wzoru:

$$b_0 = \frac{1}{n-s-1} \sum_{t=s+2}^n [Z_t - (\varphi_1 Z_{t-1} + \varphi_2 Z_{t-s} - \varphi_3 Z_{t-s-1})] \tag{11}$$

w którym:

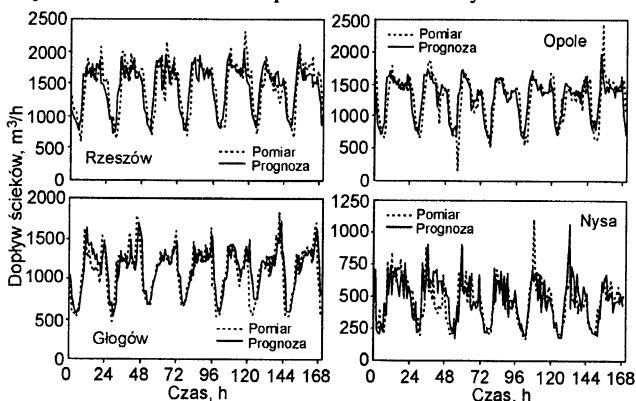
$s$  – wartość sezonowości,

Przy takim podejściu średnia reszt modelu była równa zeru. Dla analizowanych szeregów czasowych natężenia dopływu wyestymowano parametry modeli M3 i wykonano sprawdzenie ich adekwatności. Wartości parametrów podano w tabeli 1. Sprawdzenie adekwatności dało wynik pozytywny.

Z uwagi na małe wartości i stosunkowo duże błędy współczynnika  $\varphi_3$  został on usunięty z modelu. Tym sposobem model M3 został uproszczony do postaci M3a:

$$Z_t = \varphi_1 Z_{t-1} + \varphi_2 Z_{t-24} + a_t \tag{12}$$

Prognozy natężenia dopływu ścieków na jeden krok w przód dla modelu M3a przedstawiono na rysunku 6.

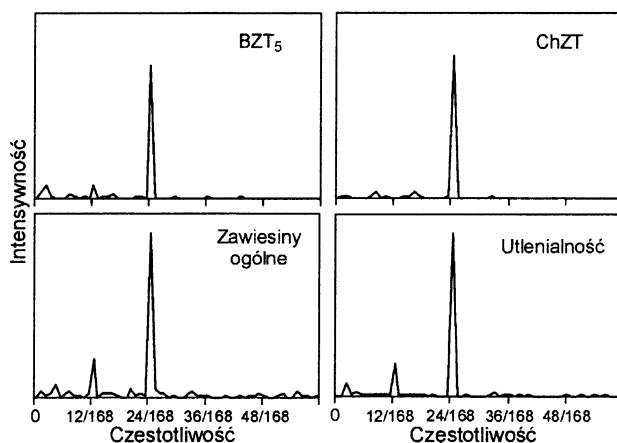


Rys. 6. Prognoza natężenia dopływu ścieków do oczyszczalni na 1 krok w przód modelem M3a

Porównując prognozy otrzymane za pomocą modeli M2 (rys. 5) i M3a (rys. 6) można stwierdzić, że model M3a wykazał mniejszą wrażliwość na zakłócenia niż model M2. Dlatego model M3a lepiej nadawał się do prognozowania wartości natężenia dopływu ścieków. Za wyborem modelu M3a przemawiały również niższe wariancje resztowe ( $\sigma_a^2$ ) i wyższe współczynniki determinacji (R). Wartości kryterium AIC [13] także wskazywały na przewagę modelu M3a.

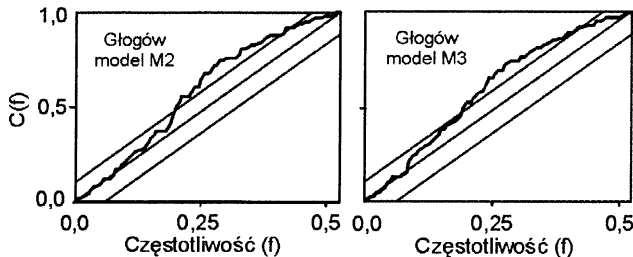
### Zastosowanie modeli sezonowych do prognozowania wartości wskaźników jakości ścieków

Podobnie jak w wypadku natężenia przepływu, również szeregi czasowe wskaźników jakości ścieków wykazały charakter okresowy, na co wskazuje wyraźnie charakter periodogramów (rys. 7). Dlatego także w tym wypadku możliwe było zastosowanie modeli sezonowych.



Rys. 7. Periodogramy wskaźników jakości ścieków w dopływie do oczyszczalni w Głogowie

Do szeregów czasowych BZT<sub>5</sub>, ChZT i utlenialności oraz zawartości zawiesin ogólnych i azotu amonowego dopasowano modele M2 i M3. Do estymacji wykorzystano 192 pomiary w odstępie 1-godzinny. Parametry modeli zestawiono w tabeli 2. Periodogramy skumulowane reszt modeli wszystkich wskaźników, z wyjątkiem azotu amonowego (rys. 8), wskazały na adekwatność modeli. Dla BZT<sub>5</sub> i utlenialności, ze względu na małą wartość i duży błąd współczynnika  $\varphi_3$ , przyjęto model M3a.



Rys. 8. Periodogramy skumulowane reszt modeli M2 i M3 dla zawartości azotu amonowego w ściekach dopływających do oczyszczalni w Głogowie

Na rysunku 9 przedstawiono prognozy na 1 krok w przód, generowane przez model M2, a na rysunku 10 przez model M3 (M3a). Podobnie jak w wypadku natężenia dopływu ścieków, do prognozowania wykorzystano 192 kolejne pomiary (inne niż do estymacji parametrów modeli).

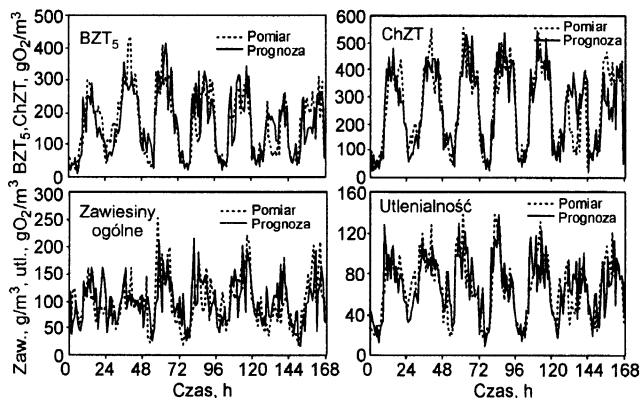
Model M3 (M3a) wykazał większą eliminację komponenty autokorelacyjnej z szeregu czasowego (świadczyły o tym

Tabela 1. Zestawienie parametrów modeli wartości natężenia dopływu ścieków do oczyszczalni

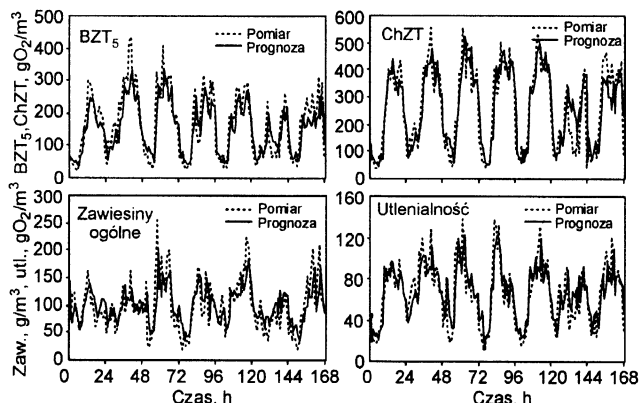
Oczyszczalnia ścieków	Model M2 (1 - φB)∇ <sub>24</sub> Z <sub>t</sub> = a <sub>t</sub>	Model M3 Φ(1 - B)∇ <sub>24</sub> Z <sub>t</sub> = a <sub>t</sub>	Model M3a Φ(1 - B)∇ <sub>24</sub> Z <sub>t</sub> = a <sub>t</sub>
Rzeszów $\bar{z} = 1445,8 \text{ m}^3/\text{h}$ $\sigma_z^2 = 150\,616$	$Z_t = 0,3058Z_{t-1} + Z_{t-24} - 0,3058Z_{t-25} + a_t$ $\Delta\phi_1 = \pm 0,0596$ $\sigma_a^2 = 47\,598$ $R = 0,83$ $SQ = 26,833 (<30,144)$ $AIC = 4,68$	$Z_t = 0,5791Z_{t-1} + 0,4600Z_{t-24} - 0,1051Z_{t-25} + 98,87 + a_t$ $\Delta\phi_1 = \pm 0,0633$ $\Delta\phi_2 = \pm 0,0648$ $\Delta\phi_3 = \pm 0,0620$ $\sigma_a^2 = 39\,118$ $R = 0,87$ $SQ = 21,742 (<27,587)$ $AIC = 4,61$	$Z_t = 0,5420Z_{t-1} + 0,4011Z_{t-24} + 85,951 + a_t$ $\Delta\phi_1 = \pm 0,0566$ $\Delta\phi_2 = \pm 0,0592$ $\sigma_a^2 = 36\,547$ $R = 0,87$ $SQ = 19,166 (<28,869)$ $AIC = 4,57$
Opole $\bar{z} = 1415 \text{ m}^3/\text{h}$ $\sigma_z^2 = 120\,947$	$Z_t = 0,4841Z_{t-1} + Z_{t-24} - 0,4841Z_{t-25} + a_t$ $\Delta\phi_1 = \pm 0,0400$ $\sigma_a^2 = 65\,043$ $R = 0,68$ $SQ = 22,098 (<30,144)$ $AIC = 4,82$	$Z_t = 0,6401Z_{t-1} + 0,2707Z_{t-24} - 0,0245Z_{t-25} + 158,84 + a_t$ $\Delta\phi_1 = \pm 0,0604$ $\Delta\phi_2 = \pm 0,0804$ $\Delta\phi_3 = \pm 0,0821$ $\sigma_a^2 = 40\,330$ $R = 0,82$ $SQ = 21,102 (<27,587)$ $AIC = 4,62$	$Z_t = 0,5362Z_{t-1} + 0,4044Z_{t-24} + 90,698 + a_t$ $\Delta\phi_1 = \pm 0,0570$ $\Delta\phi_2 = \pm 0,0589$ $\sigma_a^2 = 39\,761$ $R = 0,85$ $SQ = 24,506 (<28,869)$ $AIC = 4,61$
Gogów $\bar{z} = 1163 \text{ m}^3/\text{h}$ $\sigma_z^2 = 165\,538$	$Z_t = 0,6808Z_{t-1} + Z_{t-24} - 0,6808Z_{t-25} + a_t$ $\Delta\phi_1 = \pm 0,0629$ $\sigma_a^2 = 59\,290$ $R = 0,81$ $SQ = 13,147 (<30,144)$ $AIC = 4,78$	$Z_t = 0,7928Z_{t-1} + 0,3735Z_{t-24} - 0,2518Z_{t-25} + 101,45 + a_t$ $\Delta\phi_1 = \pm 0,0484$ $\Delta\phi_2 = \pm 0,0528$ $\Delta\phi_3 = \pm 0,0952$ $\sigma_a^2 = 45\,517$ $R = 0,85$ $SQ = 11,952 (<27,587)$ $AIC = 4,67$	$Z_t = 0,7623Z_{t-1} + 0,1771Z_{t-24} + 73,239 + a_t$ $\Delta\phi_1 = \pm 0,0479$ $\Delta\phi_2 = \pm 0,0490$ $\sigma_a^2 = 47\,104$ $R = 0,85$ $SQ = 11,744 (<28,869)$ $AIC = 4,67$
Nysa $\bar{z} = 514,65 \text{ m}^3/\text{h}$ $\sigma_z^2 = 28\,150$	$Z_t = 0,2860Z_{t-1} + Z_{t-24} - 0,2860Z_{t-25} + a_t$ $\Delta\phi_1 = \pm 0,0412$ $\sigma_a^2 = 19\,474$ $R = 0,56$ $SQ = 20,146 (<30,144)$ $AIC = 4,29$	$Z_t = 0,5684Z_{t-1} + 0,2398Z_{t-24} - 0,0105Z_{t-25} + 86,99 + a_t$ $\Delta\phi_1 = \pm 0,0642$ $\Delta\phi_2 = \pm 0,0848$ $\Delta\phi_3 = \pm 0,0861$ $\sigma_a^2 = 12\,889$ $R = 0,74$ $SQ = 25,183 (<27,587)$ $AIC = 4,13$	$Z_t = 0,5705Z_{t-1} + 0,2462Z_{t-24} + 88,090 + a_t$ $\Delta\phi_1 = \pm 0,0619$ $\Delta\phi_2 = \pm 0,0667$ $\sigma_a^2 = 12\,900$ $R = 0,74$ $SQ = 25,242 (<28,869)$ $AIC = 4,12$

Tabela 2. Zestawienie parametrów modeli wartości wskaźników jakości ścieków dopływających do oczyszczalni w Głogowie

Wskaźnik	Model M2 (1 - φB)∇ <sub>24</sub> Z <sub>t</sub> = a <sub>t</sub>	Model M3 (M3a) Φ(1 - B)∇ <sub>24</sub> Z <sub>t</sub> = a <sub>t</sub>
BZT <sub>5</sub> $\bar{z} = 165,7 \text{ m}^3/\text{h}$ $\sigma_z^2 = 8428$	$Z_t = 0,5431Z_{t-1} + Z_{t-24} - 0,8431Z_{t-25} + a_t$ $\Delta\phi_1 = \pm 0,0651$ $\sigma_a^2 = 3350$ $R = 0,78$ $SQ = 23,276 (<30,144)$ $AIC = 3,53$	$Z_t = 0,6910Z_{t-1} + 0,2605Z_{t-24} + 9,812 + a_t$ $\Delta\phi_1 = \pm 0,0489$ $\Delta\phi_2 = \pm 0,0543$ $\sigma_a^2 = 2231$ $R = 0,86$ $SQ = 21,460 (<28,869)$ $AIC = 3,36$
ChZT $\bar{z} = 267,9 \text{ m}^3/\text{h}$ $\sigma_z^2 = 19\,784$	model nieadekwatny $SQ = 32,070 (>30,144)$	$Z_t = 0,6708Z_{t-1} + 0,4369Z_{t-24} + 0,1219Z_{t-25} + 4,731 + a_t$ $\Delta\phi_1 = \pm 0,0510$ $\Delta\phi_2 = \pm 0,0612$ $\Delta\phi_3 = \pm 0,0697$ $\sigma_a^2 = 3320$ $R = 0,92$ $SQ = 21,239 (<27,587)$ $AIC = 3,54$
Utlenialność $\bar{z} = 1163 \text{ m}^3/\text{h}$ $\sigma_z^2 = 165\,538$	$Z_t = 0,5770Z_{t-1} + Z_{t-24} - 0,5770Z_{t-25} + a_t$ $\Delta\phi_1 = \pm 0,0632$ $\sigma_a^2 = 316,7$ $R = 0,77$ $SQ = 24,323 (<30,144)$ $AIC = 2,50$	$Z_t = 0,6726Z_{t-1} + 0,4491Z_{t-24} + 0,1985Z_{t-25} + 5,511 + a_t$ $\Delta\phi_1 = \pm 0,0538$ $\Delta\phi_2 = \pm 0,0562$ $\Delta\phi_3 = \pm 0,0615$ $\sigma_a^2 = 247,3$ $R = 0,83$ $SQ = 14,795 (<27,587)$ $AIC = 2,41$
Zawiesiny ogólne $\bar{z} = 93,40 \text{ m}^3/\text{h}$ $\sigma_z^2 = 1952$	$Z_t = 0,5642Z_{t-1} + Z_{t-24} - 0,5642Z_{t-25} + a_t$ $\Delta\phi_1 = \pm 0,0643$ $\sigma_a^2 = 1358$ $R = 0,55$ $SQ = 12,873 (<30,144)$ $AIC = 3,14$	$Z_t = 0,6257Z_{t-1} + 0,2280Z_{t-24} + 15,016 + a_t$ $\Delta\phi_1 = \pm 0,0542$ $\Delta\phi_2 = \pm 0,0629$ $\sigma_a^2 = 982,6$ $R = 0,71$ $SQ = 11,588 (<28,869)$ $AIC = 3,00$
Azot amonowy	model nieadekwatny	model nieadekwatny



Rys. 9. Prognoza wartości wskaźników jakości ścieków dopływających do oczyszczalni w Głogowie na 1 krok w przód modelem M2



Rys. 10. Prognoza wartości wskaźników jakości ścieków dopływających do oczyszczalni w Głogowie na 1 krok w przód modelem M3 (M3a)

mniejsze wartości statystyki SQ) oraz dał większe wartości współczynnika determinacji (R), co wynikało z mniejszej wariancji resztowej modelu M3 (M3a). Również prognozy wykonywane na 1 krok w przód przeważały na korzyść modelu M3 (M3a). Ostatecznie na model M3 (M3a) wskazało również kryterium AIC, którego wartości były znacznie niższe niż dla modelu M2.

W wypadku zawartości azotu amonowego, mimo iż periodogram (rys. 7) wskazał na okresowy charakter szeregu czasowego, modele M2 i M3 okazały się nieadekwatne (rys. 8). Analizując wykres autokorelacji dla tego szeregu można zauważyć, że wartości korelogramu szybko się wygaszały i były znaczące tylko dla niewielkiego odstępu wstecz (rys. 11).

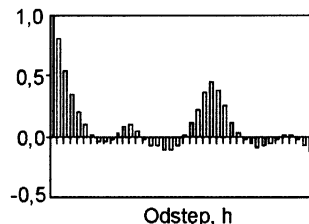
Do potrzeb kwalifikacji adekwatności modeli M2 i M3 (M3a) wykorzystano pojęcie tzw. pamięci procesu [6]. Wykonano test istotności, polegający na porównywaniu statystyki:

$$t = \frac{r_k}{\sqrt{1 - r_k^2}} \sqrt{N - 2} \quad (13)$$

w której:

$r_k$  – autokorelacja k kroków wstecz, –  
z rozkładem t-Studenta [14] o  $N-2$  stopniach swobody i prawdopodobieństwie popełnienia błędu w wyniku odrzucenia hipotezy  $\alpha=5\%$ . Jeżeli zachodził warunek  $t > t_{St}(\alpha, N-1)$ , to autokorelację uznano za istotną. Najbardziej odległa wstecz wartość  $t > t_{St}(\alpha, N-1)$  była właśnie pamięcią procesu.

Stwierdzono, że jeżeli pamięć procesu była mniejsza od pewnej wartości progowej, to modele M2 i M3 (M3a) były nieadekwatne. W tabeli 3. zestawiono wartości pamięci procesu dla różnych wskaźników jakości ścieków dopływających do oczyszczalni w Głogowie.

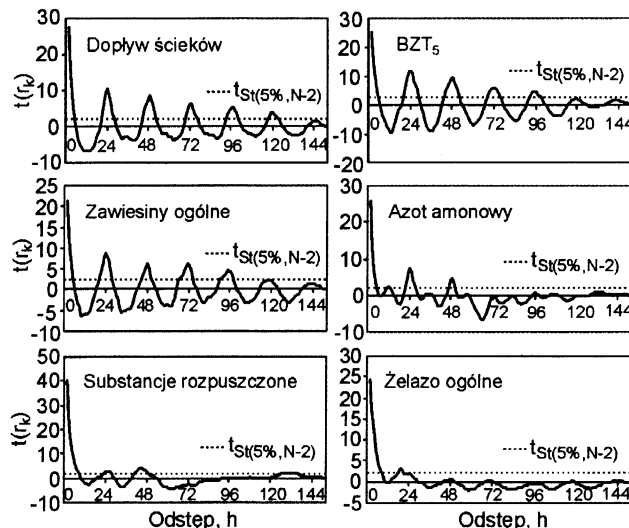


Rys. 11. Autokorelacje zawartości azotu amonowego w dopływie do oczyszczalni w Głogowie

Tabela 3. Zestawienie wartości pamięci procesu dla wskaźników jakości ścieków dopływających do oczyszczalni w Głogowie

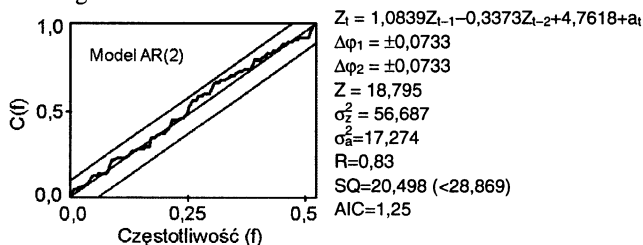
Wskaźnik	Pamięć procesu h	Adekwatność modelu sezonowego
Natężenie dopływu ścieków	122	adekwatny
Utlenialność	121	adekwatny
BZT <sub>5</sub>	120	adekwatny
ChZT	120	adekwatny
Zawiesiny ogólne	119	adekwatny
Azotany	103	adekwatny
Azot organiczny	73	per. skumulowany na granicy adekwatności
Sód	51	nieadekwatny (per. skumulowany nOK)
Azot Kjeldahla	50	nieadekwatny (per. skumulowany nOK)
Azot amonowy	49	nieadekwatny (per. skumulowany nOK)
Substancje rozpuszczone	49	nieadekwatny (per. skumulowany nOK)
Wapń	44	nieadekwatny (per. skumulowany nOK)
Żelazo	24	nieadekwatny (per. skumulowany nOK)

Na rysunku 12 pokazano wykresy statystyki  $t(r_k)$ , w porównaniu z rozkładem t-Studenta, dla ścieków surowych dopływających do oczyszczalni w Głogowie.



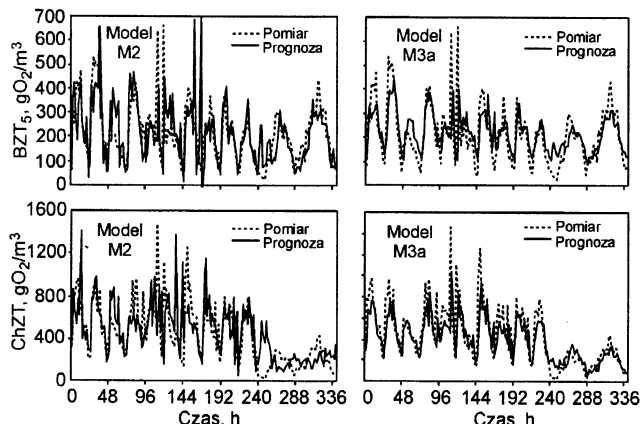
Rys. 12. Statystyki  $t(r_k)$  dla dopływu ścieków do oczyszczalni w Głogowie

Dla szeregów czasowych, w wypadku których modele sezonowe M2 i M3 (M3a) były nieadekwatne, najlepsze prognozy krótkoterminowe otrzymano po zastosowaniu niesezonowego modelu autoregresji drugiego rzędu AR(2). Na rysunku 13 pokazano przykładowe parametry modelu AR(2) dla zawartości azotu amonowego w dopływie do oczyszczalni w Głogowie.



Rys. 13. Parametry i periodogram skumulowany reszt modelu AR(2) dla zawartości azotu amonowego w dopływie do oczyszczalni ścieków w Głogowie

Istnieje również możliwość zastosowania modeli sezonowych M2 i M3 (M3a) w wypadku pomiarów wykonywanych co dwie godziny. Współczynniki tych modeli, jak i współczynniki determinacji, były co prawda nieco niższe niż w wypadku pomiarów wykonywanych co godzinę, lecz modele te były adekwatne i dały dobre prognozy. W tabeli 4 podano parametry modeli M2 i M3a dla BZT<sub>5</sub> i ChZT w dopływie do oczyszczalni w Rzeszowie. Prognozy na 1 krok w przód przedstawiono na rysunku 14.



Rys. 14. Prognoza wartości BZT<sub>5</sub> i ChZT w dopływie ścieków do oczyszczalni w Rzeszowie na 1 krok w przód

Dla analizowanych szeregów czasowych natężenia dopływu, jak i zawartości poszczególnych zanieczyszczeń ścieków surowych (w świetle rozpatrywanych kryteriów porównawczych),

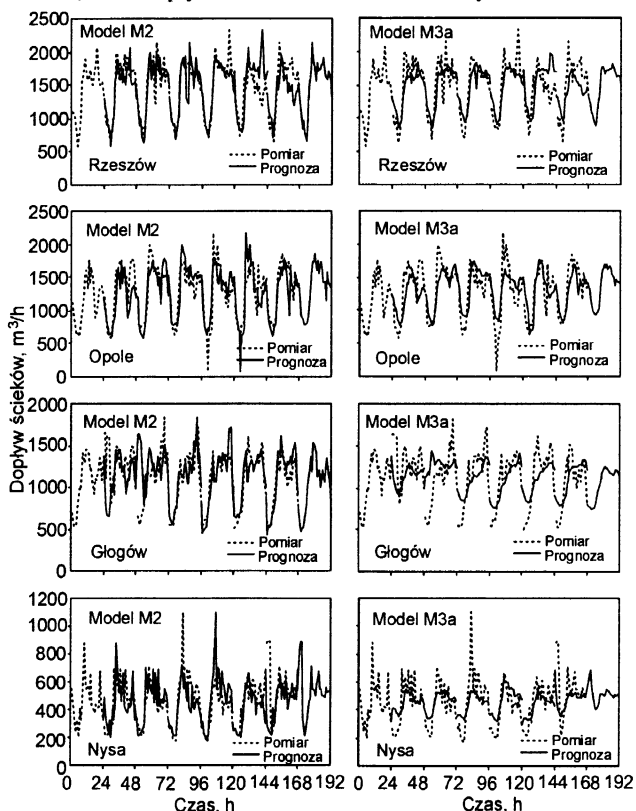
Tabela 4. Parametry modeli M2 i M3 dla BZT<sub>5</sub> i ChZT w dopływie do oczyszczalni w Rzeszowie (pomiary co 2 godz.)

Wskaźnik	Model M2 $(1 - \phi B)\nabla_{24}Z_t = a_t$	Model M3a $\Phi(1 - B)\nabla_{24}Z_t = a_t$
BZT <sub>5</sub>  $Z = 225,26 \text{ m}^3/\text{h}$ $\sigma_a^2 = 14\,430$	$Z_t = 0,4534Z_{t-1} + Z_{t-12} - 0,4534Z_{t-13} + a_t$ $\Delta\phi_1 = \pm 0,0716$ $\sigma_a^2 = 10\,510$ $R = 0,52$ $SQ = 17,635 (< 30,144)$ $AIC = 4,03$	$Z_t = 0,4781Z_{t-1} + 0,2875Z_{t-12} + 53,8878 + a_t$ $\Delta\phi_1 = \pm 0,0635$ $\Delta\phi_2 = \pm 0,0647$ $\sigma_a^2 = 9\,531$ $R = 0,58$ $SQ = 15,659 (< 28,869)$ $AIC = 3,99$
ChZT  $Z = 554,59 \text{ m}^3/\text{h}$ $\sigma_a^2 = 52\,776$	$Z_t = 0,3753Z_{t-1} + Z_{t-12} - 0,3753Z_{t-13} + a_t$ $\Delta\phi_1 = \pm 0,0776$ $\sigma_a^2 = 42\,432$ $R = 0,45$ $SQ = 18,361 (< 30,144)$ $AIC = 4,63$	$Z_t = 0,4279Z_{t-1} + 0,2746Z_{t-12} + 160,25 + a_t$ $\Delta\phi_1 = \pm 0,0673$ $\Delta\phi_2 = \pm 0,0692$ $\sigma_a^2 = 39\,413$ $R = 0,50$ $SQ = 17,453 (< 28,869)$ $AIC = 4,61$

można stwierdzić, że dla wskaźników wykazujących dobową powtarzalność wskazany wydaje się wybór modelu M3 (lub M3a). Był on mniej czuły na zakłócenia i dał lepsze prognozy niż model M2 oraz w przeciwieństwie do modeli autoregresji rzędu pierwszego (M1) uwzględniał zjawisko 24-godzinnej powtarzalności.

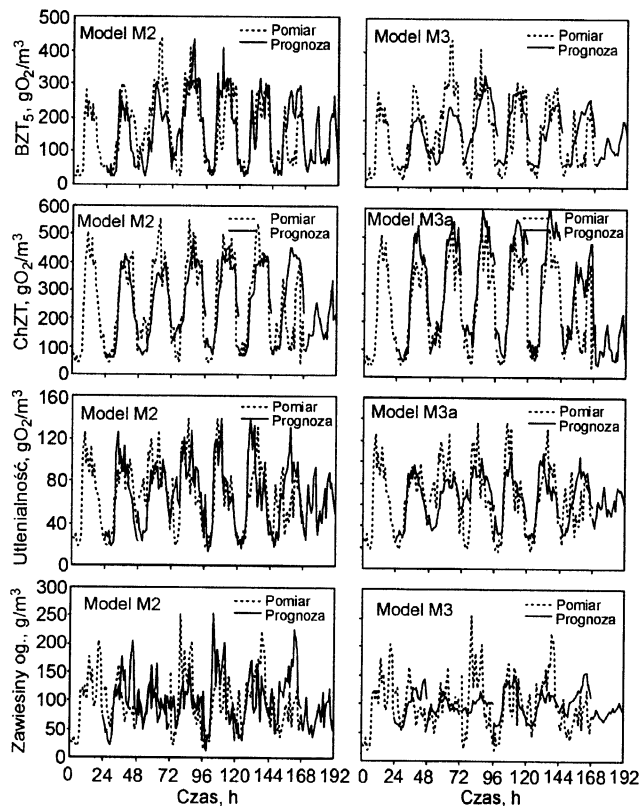
### Zastosowanie modeli sezonowych do prognoz 24-godzinnych

Modele zawierające w swojej strukturze sezonowość można wykorzystywać do prognozowania wartości szeregów czasowych na 24 godziny w przód. Taka możliwość jest istotna z punktu widzenia potrzeb optymalnego sterowania procesów technologicznych w oczyszczalni ścieków [3,7,9]. Na rysunku 15 pokazano prognozy generowane przez modele M2 i M3a dla natężenia dopływu ścieków do czterech oczyszczalni.



Rys. 15. Prognoza wartości dopływu ścieków do oczyszczalni na 24 godziny w przód

Za pomocą modeli M2 i M3 (M3a) można także wykonywać prognozy na 24 godz. w przód dla wskaźników jakości ścieków. Na rysunku 16 pokazano takie prognozy dla wybranych wskaźników jakości ścieków dopływających do oczyszczalni w Głogowie.



Rys. 16. Prognoza wartości wskaźników jakości ścieków dopływających do oczyszczalni w Głogowie na 24 godziny w przód

Można zauważyć, że model M3 (M3a) wykazał silniejsze niż model M2 tendencje do wygaszania wartości prognozy, przy długim horyzoncie. Wynikało to z mniejszych wartości współczynnika  $\varphi_2$  przy  $Z_{t-s}$ . Należy przypuszczać, że model ten – w wypadku generowania szeregów czasowych opisujących dopływ do oczyszczalni na potrzeby symulacji o długim horyzoncie czasowym (np. miesiąc) – ze względu na wygaszanie wartości będzie dawał gorsze wyniki niż model M2.

## Podsumowanie

Zarówno natężenie, jak i główne wskaźniki jakości ścieków dopływających do oczyszczalni wykazują dobową powtarzalność. Zjawisko to, nazywane sezonowością, powinno być uwzględnione podczas budowania modeli prognozy i symulacyjnych. Wykazano, że zaproponowane sezonowe modele autoregresji M2 i M3 dobrze opisywały przebiegi czasowe natężenia dopływu i wskaźników jakości ścieków. Wykazano, że modele nie zawierające parametru sezonowości, były nieadekwatne. Przyjęty model M2 o ogólnej postaci:

$$Z_t = \varphi_1 Z_{t-1} + Z_{t-24} - \varphi_1 Z_{t-25} + b_0 + a_t \quad (14)$$

poprawnie uwzględniał zjawisko dobowej powtarzalności. Jednak w wypadku wystąpienia silnych zakłóceń (np. w wyniku

intensywnych opadów deszczu) nastąpiło zawyżenie prognozowanych wartości w następnej dobie. W celu eliminacji tego zjawiska model M2 zmodyfikowano do postaci ogólnej M3:

$$Z_t = \varphi_1 Z_{t-1} + \varphi_2 Z_{t-24} - \varphi_3 Z_{t-25} + b_0 + a_t \quad (15)$$

Poprawiony model M3 dawał lepsze prognozy, nawet w wypadku doby o nietypowej charakterystyce. Ze względu na małe wartości współczynnika  $\varphi_3$  oraz stosunkowo duże błędy tego estymatora, w niektórych wypadkach model M3 można uprościć do M3a o ogólnej postaci:

$$Z_t = \varphi_1 Z_{t-1} + \varphi_2 Z_{t-24} + b_0 + a_t \quad (16)$$

Na przykładzie azotu amonowego stwierdzono, że przebiegi czasowe niektórych wskaźników jakości ścieków nie miały wyraźnego charakteru okresowego. W tym kontekście wprowadzono kryterium operujące pojęciem pamięci procesu, pozwalające na wstępną ocenę trafności wyboru modelu sezonowego. Wskazano na pewną graniczną wartość pamięci procesu, poniżej której szeregu czasowego nie dało się adekwatnie opisać modelem sezonowym.

## LITERATURA

1. H. G. ERB: Technika pomiarów przepływu wody i ścieków. Wydawnictwo Seidel-Przywecki, Warszawa 1999.
2. Praca zbiorowa: Podręczny poradnik eksploatacji oczyszczalni ścieków. Wydawnictwo Seidel-Przywecki, Warszawa 1998.
3. R. W. SZETELA: Model dynamiczny oczyszczalni ścieków z osadem czynnym. Prace Naukowe Instytutu Inżynierii Ochrony Środowiska Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1990.
4. R. W. SZETELA: On stochastic modelling of water consumption and wastewater discharge. Environment Protection Engineering, 1987, Vol. 13, No. 2, pp. 41–57.
5. G. E. P. BOX, G. M. JENKINS: Analiza szeregów czasowych. Prognozowanie i sterowanie. PWN, Warszawa 1983.
6. K. MAŃCZAK, Z. NAHORSKI: Komputerowa identyfikacja obiektów dynamicznych. PWN, Warszawa 1983.
7. F. ANDREWS: Dynamics and Control of Activated Sludge Process. Water Quality Management Library. 1992, Vol. 6, Technomic Publishing Company Inc.
8. Z. SIWOŃ: Stochastyczne modelowanie procesu zużycia wody i prognozowanie zapotrzebowania na wodę w miastach. Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1986.
9. A. JAMES: Mathematical models in water pollution control. John Wiley and Sons Ltd, 1978.
10. W. STARZYŃSKA: Statystyka praktyczna. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2000.
11. A. MARCINIAK, D. GREGULEC, J. KACZMAREK: Podstawowe procedury numeryczne w języku Turbo Pascal. Nakom, Poznań 1997.
12. W. FINDEISEN, J. SZYMANOWSKI, A. WIERZBICKI: Teoria i metody obliczeniowe optymalizacji. PWN, Warszawa 1980.
13. L. LJUNG: System Identification. The Math Works Inc., 1987.
14. W. KRYSICKI, J. BARTOS, W. DYCZKA, K. KRÓLIKOWSKA, M. WASILEWSKI: Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna w zadaniach. Część II. Statystyka matematyczna. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1995.

**Sobota, J., Szetela, R. One-Dimensional Models Describing the Parameters of the Influent to the Municipal Wastewater Treatment Plant. *Ochrona Środowiska* 2005, Vol. 27, No. 1, pp. 15–22.**

**Abstract:** Both the flow rate and the composition of the wastewater stream entering the plant follow a 24-hour diurnal pattern. This phenomenon (also referred to as seasonality) should be taken into account when constructing models for the needs of forecasting or simulation. Our investigations reported on in this paper concentrated on the choice of such a model that would best describe the influents to municipal wastewater treatment plants. Our analyses, as well as the results of our previous studies, have revealed that the classical seasonal autoregressive model  $\nabla_{24}Z_t = \varphi_1 \nabla_{24}Z_{t-1} + a_t$  describes the variability not only of the flow rate but also of the organic constituents (BOD<sub>5</sub>, COD) better than the nonseasonal autoregressive models. Models that did not include the seasonality parameter were found to be inadequate. It has been shown, however, that the classical seasonal model fails to yield reliable forecasts, when applied to time series deviating from exact

24-hour repeatability. Whenever there were episodes of strong disturbance (*e.g.* due to heavy rainfall), they always produced overrated forecast values for the subsequent 24-hours. In our present paper, the classical model was modified to the form of  $Z_t = \varphi_1 Z_{t-1} + \varphi_2 Z_{t-24} + \varphi_3 Z_{t-25} + a_t$ . In this way it was possible to upgrade noticeably the quality of the forecasts, even if a 24-hour period displayed an atypical characteristic. In some cases, when the  $\varphi_3$  coefficient took low values, and its estimation error was big, the model was simplified to the form of  $Z_t = \varphi_1 Z_{t-1} + \varphi_2 Z_{t-24} + b_0 + a_t$ . It was found that the time series for some wastewater constituents did not show a distinct seasonality. In this context, a criterion was introduced, which involved the notion "process memory", thus enabling the adequacy of the choice of the seasonal model to be preliminarily assessed. It was shown that there is a certain limit value of the "process memory" below which the time series can not be adequately described by the seasonal model.

**Keywords:** Municipal wastewater, influent flow ratio, organic constituents, seasonal autoregressive model, seasonality, forecast.