

Prof. dr hab. inż. Leszek MIESZKALSKI  
Katedra Inżynierii Rolniczej  
Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie

## METODA MATEMATYCZNEGO MODELOWANIA KSZTAŁTU BRYŁY ZIARNA PSZENICY ZA POMOCĄ PARAMETRYCZNEJ KRZYWEJ PRZESTRZENNEJ I CZTEROWĘZŁOWEJ SIATKI®

*W pracy przedstawiono metodę matematycznego modelowania kształtu bryły ziarna pszenicy. Kształt ziarna pszenicy został odwzorowany parametryczną krzywą przestrzenną oraz czterowęzłową siatką rozpiętą na zewnętrznej powierzchni modelowanej bryły. Do opisu konturu poprzecznego przekroju ziarna wykorzystano zmodyfikowaną konchoidę okręgu krzywą czwartego stopnia. Uzyskaną krzywą sprowadzono do postaci krzywej przestrzennej przez rozwinięcie jej wzdłuż najdłuższej osi ziarna w linię przestrzenną nadającą kształt bryły ziarna. Uzyskane równania parametryczne krzywej przestrzennej opisują współrzędne punktów leżących na powierzchni ziarna. W równaniach tych występuje siedem współczynników skalujących, służących do wymiarowania bryły.*

**Słowa kluczowe:** ziarno pszenicy, bryła, model matematyczny.

### WSTĘP I CEL PRACY

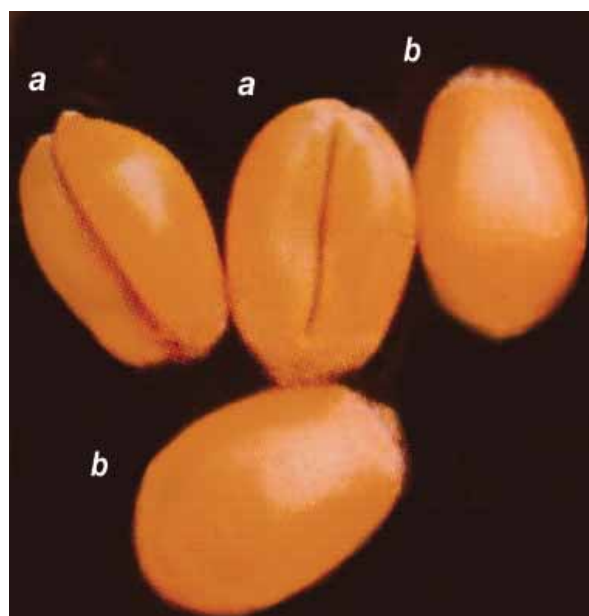
Cechami geometrycznymi surowców rolniczych interesują się konstruktorzy maszyn rolniczych i przemysłu spożywczego. Przedstawienie brył ziarna w formie dyskretnej ma duże znaczenie w projektowaniu procesów roboczych [3]. Modele matematyczne opisujące kształt brył surowców rolniczych są pomocne przy ustalaniu przedziałów wartości parametrów regulacyjnych maszyn i urządzeń stosowanych w uzyskiwaniu surowców roślinnych i ich przetwórstwie. W literaturze spotyka się wiele prac opisujących metody modelowania kształtów brył surowców roślinnych [1, 8, 9, 10]. Opis bryły ziarna zawierają prace [2, 3], w których modelowanie polegało na matematycznym opisie kształtu poprzecznych przekrojów ziarna. Zastosowanie krzywych Béziera do modelowania nieregularnych kształtów brył aproksymujących surowce rolnicze przedstawiają prace [4, 5, 6, 7].

**Celem artykułu jest prezentacja matematycznego modelowania kształtu bryły ziarna pszenicy za pomocą konstrukcji krzywej przestrzennej i czterowęzłowej siatki leżącej na zewnętrznej powierzchni modelu bryły.**

Modelowany będzie kształt bryły ziarna pszenicy odmiany Eka Nowa [2, 11] o wymiarach podstawowych: długość  $A = 6,6$  mm; grubość  $B = 2,6$  mm; szerokość  $C = 3,2$  mm.

### WYBÓR KRZYWEJ PRZESTRZENNEJ ODWZOROWUJĄCEJ KONTUR POPRZECZNEGO PRZEKROJU MODELOWANEJ BRYŁY ZIARNA PSZENICY

Przykład rzeczywistego kształtu ziarna pszenicy przedstawiony jest na rysunku 1.



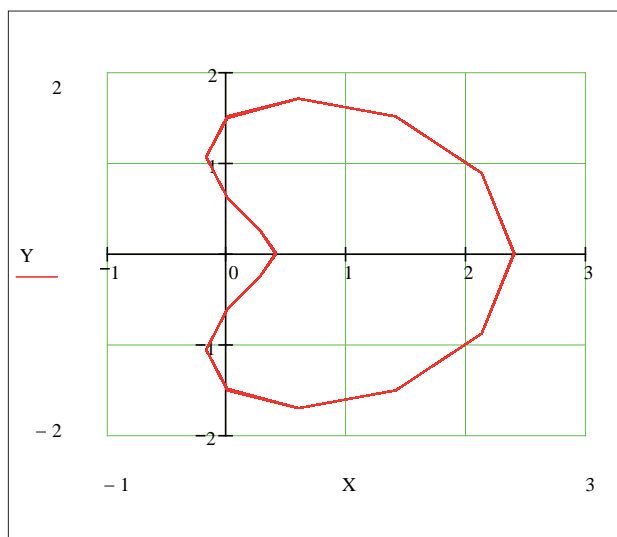
**Rys. 1.** Ziarno pszenicy: *a* – widok od strony brzusznej, *b* – widok od strony grzbietowej.

Do opisu konturu poprzecznego przekroju ziarna pszenicy wykorzystano konchoidę okręgu (Ślimak Pascala) krzywą czwartego rzędu zapisaną równaniami parametrycznymi (rys. 2):

$$\begin{aligned} x &= \alpha (\cos \varphi)^2 + \beta \cos \varphi \\ y &= \alpha \cos \varphi \sin \varphi + \beta \sin \varphi \end{aligned} \quad (1)$$

Właściwy kształt poprzecznego przekroju ziarna pszenicy zapewni następujący warunek: (2)

$$\alpha < \beta < 2\alpha$$



Rys. 2. Kontur poprzecznego przekroju ziarna pszenicy.

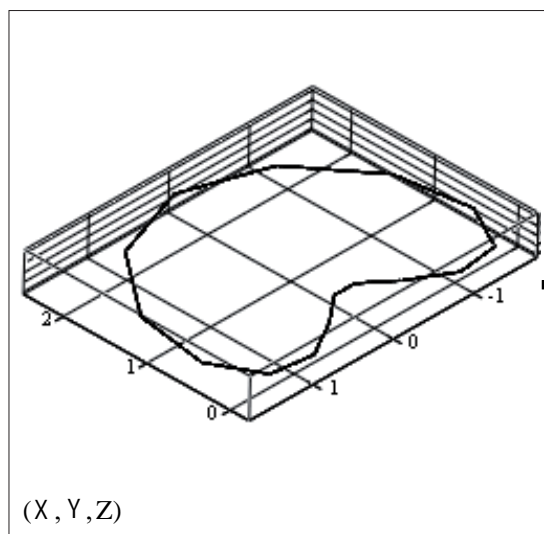
Aby dokładnie opisać kształt poprzecznego przekroju ziarna pszenicy należy zmodyfikować równanie 1 wprowadzając do niego cztery współczynniki odpowiadające za wymiary krzywej. Dla ziarna pszenicy poprzeczny przekrój o największych wymiarach opisany będzie poniższym równaniem [2, 3]:

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 (\cos \varphi)^2 + \beta_1 \cos \varphi \\ y &= \alpha_2 \cos \varphi \sin \varphi + \beta_2 \sin \varphi \end{aligned} \quad (3)$$

gdzie:

$$\alpha_1 = 1,4; \beta_1 = 1; \alpha_2 = 0,9; \beta_2 = 1,5$$

Jeżeli do układu równań (3) wprowadzi się trzeci wymiar w postaci współrzędnej  $z = a = \text{const.}$ , wówczas kontur poprzecznego przekroju ziarna opisany będzie krzywą umieszczoną w przestrzeni (rys. 3).



Rys. 3. Przestrzenny widok konturu poprzecznego przekroju ziarna pszenicy.

## ROZWIĘCIĘ ZMODYFIKOWANEJ KONCHOIDY OKRĘGU W KRZYWĄ PRZESTRZENNĄ

Krzywą kształtem podobną do konchoidy okręgu można rozwinąć w krzywą przestrzenną przez dodanie do równań (3) zmiennej współrzędnej  $z = f(\varphi)$ . Parametryczny układ równań będzie miał wówczas następującą postać:

$$\begin{aligned} x_{i,j} &= \alpha_1 (\cos \varphi_i)^2 + \beta_1 \cos \varphi_i \\ y_{i,j} &= \alpha_2 \cos \varphi_i \sin \varphi_i + \beta_2 \sin \varphi_i \\ z_{i,j} &= e \frac{\varphi_i}{n} \end{aligned} \quad (4)$$

gdzie:  $j = 0 \dots N$ ,  $e = 2,2$ .

Wysokość krzywej przestrzennej utworzonej na bazie konchoidy okręgu zależała będzie od liczby zwojów wyrażonych zależnością kątową:

$$\varphi_i = i \frac{n\pi}{N} \quad (5)$$

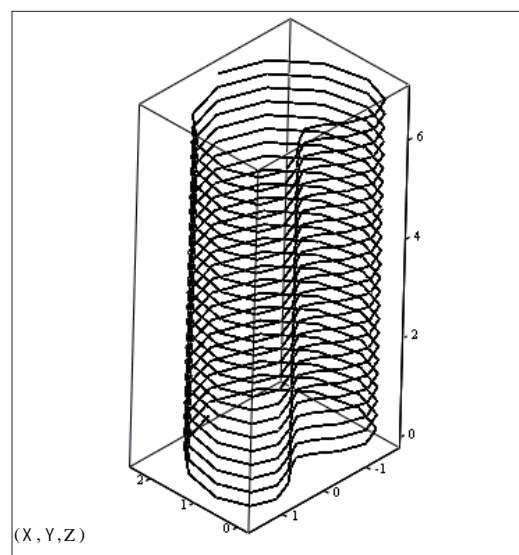
gdzie:

$(n/2)$  – liczba zwojów,

$i = 0 \dots N$

Od wartości  $n$  zależy zagęszczenie zwojów krzywej wzdłuż długości bryły, natomiast od wartości  $N$  odległość między punktami leżącymi na krzywej.

Krzywa opisana równaniem (4) przedstawiona jest na rysunku 4.



Rys. 4. Widok krzywej przestrzennej utworzonej na bazie zmodyfikowanej konchoidy okręgu, dla  $\alpha_1=1,4$ ;  $\beta_1=1$ ;  $\alpha_2=0,9$ ;  $\beta_2=1,5$ ;  $e=2,2$ ;  $n=50$ ;  $N=400$ .

Układ równań (4) stanowi podstawę do modelowania kształtu krzywej rozwiniętej na zewnętrznej powierzchni modelowanej bryły ziarna pszenicy. Krzywą wyrażoną układem równań (4) należy wyskalować w ten sposób, by jej wysokość odpowiadała długości ziarna. Za pomocą

skalowania także uzyskuje się zmianę wymiarów przekroju poprzecznego wraz ze zmianą położenia punktu na krzywej zależnego od kąta  $\varphi$  przy zachowaniu tego samego kształtu konturu poprzecznego przekroju modelowanej bryły.

### KONSTRUKCJA KRZYWEJ PRZESTRZENNEJ LEŻĄCEJ NA ZEWNĘTRZNEJ POWIERZCHNI MODELOWANEJ BRYŁY ZIARNA PSZENICY

W celu uzyskania zmiennego skoku poprzecznego dla punktu poruszającego się po krzywej przestrzennej opisującej kontur poprzecznego przekroju bryły zależnego od kąta  $\varphi$  należy zmienne  $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$  w równaniach (4) opisać takimi zależnościami, które będą odwzorowywały zmianę wymiarów konturu poprzecznego przekroju modelowanej bryły zachowując jego podobieństwo kształtów na całej długości ziarna.

Aby modelowana bryła była kształtem podobna do ziarna pszenicy, należy przyjąć następujące równania opisujące zmianę wartości dla  $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ :

$$\alpha_1 = a \frac{\varphi_i}{n} \sin\left(\frac{\varphi_i}{n}\right) \quad (6)$$

$$\beta_1 = b \frac{\varphi_i}{n} \sin\left(\frac{\varphi_i}{n}\right) \quad (7)$$

$$\alpha_2 = c \frac{\varphi_i}{n} \sin\left(\frac{\varphi_i}{n}\right) \quad (8)$$

$$\beta_2 = d \frac{\varphi_i}{n} \sin\left(\frac{\varphi_i}{n}\right) \quad (9)$$

Współrzędna odpowiadająca za długość ziarna pszenicy zapisana będzie w postaci:

$$z_{i,j} = e \sin(\psi_j)^2 \sin(1,5 \cdot \psi_j)^2 \quad (10)$$

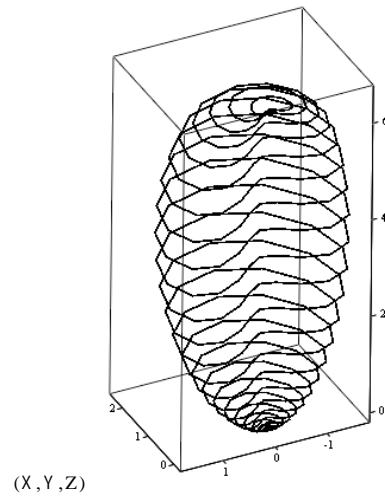
gdzie:

$$\psi_j = j \cdot 0,4 \frac{\pi}{N} \quad (11)$$

Współczynniki skalujące mają następujące wartości:  $a=0,78; b=0,55; c=0,5; d=0,83; e=8; n=50; N=400$ . Parametryczne równania opisujące współrzędne punktów leżących na krzywej przestrzennej równomiernie rozwiniętej wzdłuż osi  $z$  oraz leżącej w pobliżu poprzecznych przekrojów ziarna pszenicy mają następującą postać:

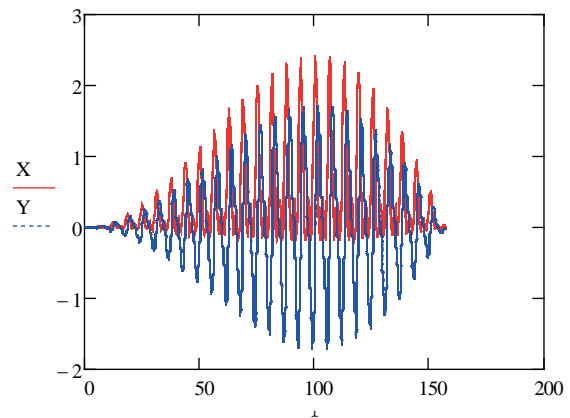
$$\begin{aligned} x_{i,j} &= 0,78 \frac{\varphi_i}{n} \sin\left(\frac{\varphi_i}{n}\right) \left(\cos(\varphi_i)\right)^2 + 0,55 \frac{\varphi_i}{n} \sin\left(\frac{\varphi_i}{n}\right) \cos(\varphi_i) \\ y_{i,j} &= 0,5 \frac{\varphi_i}{n} \sin\left(\frac{\varphi_i}{n}\right) \cos(\varphi_i) \sin(\varphi_i) + 0,83 \frac{\varphi_i}{n} \sin\left(\frac{\varphi_i}{n}\right) \sin(\varphi_i) \\ z_{i,j} &= 8 \sin(\psi_j)^2 \sin(\psi_j)^2 \end{aligned} \quad (12)$$

Model bryły ziarna pszenicy opisany układem równań (12) krzywej przestrzennej przedstawiony jest na rysunku 5.



Rys. 5. Widok krzywej przestrzennej odwzorowującej kształt modelowanej bryły ziarna pszenicy.

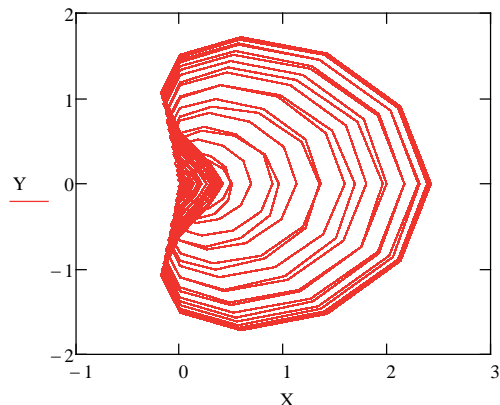
Zależności współrzędnych  $x, y$  od kąta  $\varphi$  przedstawia rysunek 6.



Rys. 6. Zależność współrzędnych  $x, y$  od kąta  $\varphi$ .

Od kształtu krzywych  $x(\varphi), y(\varphi)$  zależy kształt przekroju poprzecznego ziarna pszenicy.

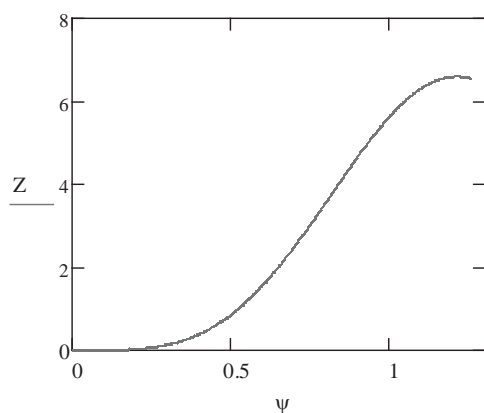
Rzuty poprzecznych przekrojów modelowanej bryły ziarna pszenicy przedstawione są na rysunku 7.



Rys. 7. Rzut krzywej przestrzennej na płaszczyznę  $XY$ .

Zależność współrzędnej  $z$  od kąta  $\psi$  przedstawiona jest na rysunku 8.

Kształt rozwiniętej wzdłuż osi "z" krzywej przestrzennej zależy od krzywych  $x(\varphi)$ ,  $y(\varphi)$  oraz  $z(\varphi)$ .



Rys. 8. Zależność współrzędnej  $z$  od kąta  $\psi$ .

### MODEL MATEMATYCZNY OPISUJĄCY SIATKĘ ZEWNĘTRZNEJ POWIERZCHNI BRYŁY ZIARNA PSZENICY

Kształt ziarna pszenicy można przedstawić za pomocą siatki, która leży na zewnętrznej powierzchni modelowanej bryły. W tym celu trzeba utworzyć parametryczne równania opisujące dyskretną powierzchnię w postaci siatki:

$$x_{i,j} = a \frac{\varphi_j}{n} \sin\left(\frac{\varphi_j}{n}\right) \left(\cos(\varphi_i)\right)^2 + b \frac{\varphi_j}{n} \sin\left(\frac{\varphi_j}{n}\right) \cos(\varphi_i) \quad (13)$$

$$y_{i,j} = c \frac{\varphi_j}{n} \sin\left(\frac{\varphi_j}{n}\right) \cos(\varphi_i) \sin(\varphi_i) + d \frac{\varphi_j}{n} \sin\left(\frac{\varphi_j}{n}\right) \sin(\varphi_i)$$

$$z_{i,j} = e \sin(\psi_j)^2 \sin(\psi_j)^2$$

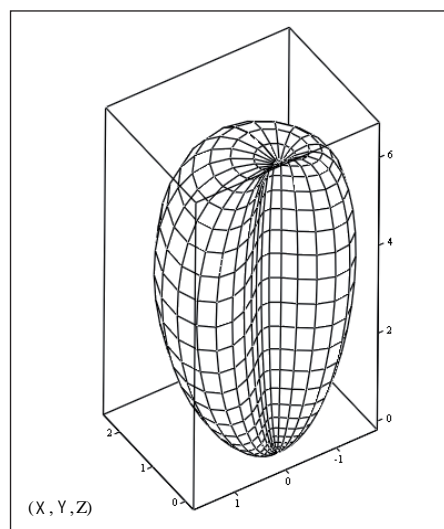
gdzie:

$$\varphi_i = i \frac{2\pi}{N}; \quad \text{dla } i=0 \dots N \quad (14)$$

$$\varphi_j = j \frac{2\pi}{N}; \quad \text{dla } j=0 \dots N \quad (15)$$

$$\psi_j = j \cdot 0,4 \frac{\pi}{N} \quad (16)$$

Widok modelu bryły ziarna pszenicy opisany powyższymi równaniami przedstawiony jest na rysunku 9. Podstawowym elementem siatki jest trapez, za wyjątkiem elementów trójkątnych odwzorowujących powierzchnię w dolnym i górnym obszarze ziarna.



Rys. 9. Siatka bryły ziarna pszenicy wygenerowana parametrycznymi równaniami powierzchni: dla  $n=2$ ,  $N=25$ .

Zbliżony efekt siatki wyrażającej kształt bryły ziarna pszenicy można uzyskać za pomocą niżej przedstawionych równań:

$$x_{i,j} = a_1 \frac{j}{N} \sin\left(\frac{\varphi_j}{2}\right) \left(\cos(\varphi_i)\right)^2 + b_1 \frac{j}{N} \sin\left(\frac{\varphi_j}{2}\right) \cos(\varphi_i) \quad (17)$$

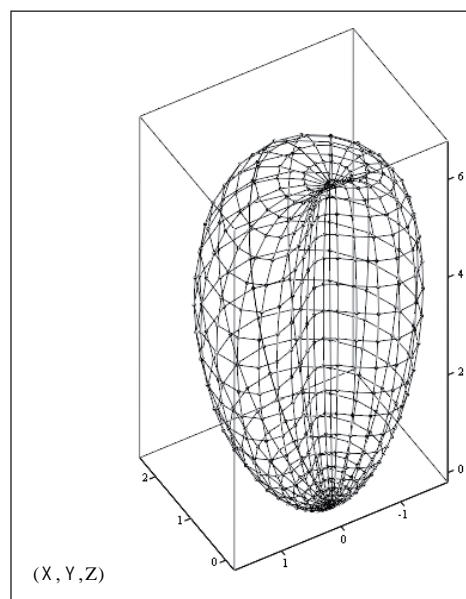
$$y_{i,j} = c_1 \frac{j}{N} \sin\left(\frac{\varphi_j}{2}\right) \cos(\varphi_i) \sin(\varphi_i) + d_1 \frac{j}{N} \sin\left(\frac{\varphi_j}{2}\right) \sin(\varphi_i)$$

$$z_{i,j} = e_1 \sin(\psi_j)^2 \sin(1,5\psi_j)^2$$

W równaniu (17) współczynniki skalujące mają następujące wartości:

$$a_1=2,4; \quad b_1=1,7; \quad c_1=1,5; \quad d_1=2,6; \quad e_1=8.$$

Na rysunku 10 przedstawiono siatkę modelowanej bryły ziarna pszenicy wygenerowaną równaniami (17).



Rys.10. Siatka bryły ziarna pszenicy.

## PODSUMOWANIE

Proponowana metoda służy do modelowania matematycznego kształtu brył ziarna pszenicy. Poprzeczny przekrój ziarna pszenicy dobrze przybliża zmodyfikowana krzywa czwartego stopnia konchoida okręgu. Model bryły kształtem podobny do ziarna pszenicy uzyskuje się przez rozwinięcie krzywej podobnej do konchoidy okręgu w krzywą przestrzenną oraz opisanie współczynników ( $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ ) równaniami wyrażającymi zmianę kształtu wzdłuż długiej osi ziarna. Wymiary ziaren pszenicy uzyskuje się przez dobór wartości siedmiu współczynników skalujących ( $a, b, c, d, e, n, N$ ).

## LITERATURA

- [1] FORREST A. R. 1997. *On the rendering of surfaces*. SIGGRAPH 79, 253-259.
- [2] MIESZKALSKI L. 2001a. *Metoda tworzenia modelu bryły ziarna zbóż*. Problemy Inżynierii Rolniczej. Nr 1 (31), 29-36.
- [3] MIESZKALSKI L. 2001b. *Metoda wyznaczania płaszczyzny w otoczeniu punktu powłoki modelowanej bryły ziarna zbóż*. Problemy Inżynierii Rolniczej. Nr 3 (33), 29-36.
- [4] MIESZKALSKI L. 2002a. *Analiza krzywych Béziera stosowanych do modelowania nieregularnych kształtów obiektów biologicznych*. Acta Agrophysica. Nr 78, 159-170.
- [5] MIESZKALSKI L. 2002b. *Modelowanie brył o nieregularnych kształtach za pomocą krzywych Béziera*. Problemy Inżynierii Rolniczej. Nr 2 (36), 33-38.
- [6] MIESZKALSKI L. 2002c. *Modelowanie siatki na powierzchni bryły za pomocą poczwórnego węzła krzywych wielomianowych*. Problemy Inżynierii Rolniczej. Nr 4 (38), 93-100.
- [7] MIESZKALSKI L. 2002d. *Metodą modelowania nieregularnych kształtach za pomocą funkcji wielomianowych*. Postępy Techniki Przetwórstwa Spożywczego. Nr 1, tom 11/20, s. 13-16.
- [8] MIESZKALSKI L. 2002e. *Zastosowanie siatki powierzchni kulistej do modelowania brył aproksymujących surowce roślinne*. Postępy Techniki Przetwórstwa Spożywczego. Nr 2, tom 12/21, 11-14.
- [9] MIESZKALSKI L. 2003a. *Modelowanie krzywych i siatek powierzchni brył geometrycznych imitujących surowce roślinne*. Postępy Techniki Przetwórstwa Spożywczego. Nr 2, tom 13/23, 37-39.
- [10] MIESZKALSKI L. 2003b. *Method for generating three-dimensional solid models of seeds applied in the food industry*. Technical Sciences. Nr 6, 49-55.
- [11] SZOT B., GRUNDAS S. 1974. *Zastosowanie zestawu pomiarowego do dokładnego określania podstawowych wymiarów ziarna zbóż*. Hodowla Roślin, Aklimatyzacja i Nasiennictwo. Tom 18. Zeszyt 1: 104-109.

**THE METHOD OF MATHEMATICAL MODELING OF THE SHAPE OF SOLID GRAINS OF WHEAT BY USING A PARAMETRIC SPATIAL CURVE AND FOUR NODAL MESH**

*SUMMARY*

*The method of mathematical modeling of the shape of solid grains of wheat. The shape of the wheat grain has been modeled in a parametric spatial curve and four nodal mesh stretched on the outer surface of the modeled solid. To describe the contour of the cross section of the grain used in a modified circle conchoid fourth-degree curve. The resulting curve was brought to the spatial form of the curve by developing its longest axis along the grain line of the spatial shape of the solid grain. The resulting curve of parametric equations describing the spatial coordinates of points lying on the surface of the grain. In these equations has seven scaling factors, used for sizing solid.*

**Key words:** wheat grain, solid, mathematical model.