Dr Kazimierz Piotr MAZUR
Katedra Ekonometrii i Statystyki WSM w Warszawie
Zakład Organizacji i Ekonomii Akademii Pedagogiki Specjalnej w Warszawie

FUNKCJE PRODUKCJI®

Prezentowany tekst jest drugim z cyklu poświęconego problematyce stosowania innowacyjnych technik produkcji w Polsce i zintegrowanej Europie. Autor opisuje funkcje produkcji podając ich cechy charakterystyczne.

Prezentowany artykuł stanowi omówienie określonych typów funkcji produkcji, których postać analityczna pozwala na ich weryfikację statystyczną. Weryfikacja statystyczna pozwala wyodrębnić wielkość zwaną stopą postępu technicznego. Daje to możliwość ustalenia efektów tego postępu w badanym okresie czasu.

WPROWADZENIE

Ważną rolę w teorii ekonomii, ekonometrii, a także naukach o zarządzaniu odgrywa tzw. funkcja produkcji [7]. Opisuje ona związki między rezultatem procesu produkcyjnego, a czynnikami biorącymi udział w tym procesie. Funkcja produkcji może również stanowić punkt wyjścia do generowania związków odwrotnych, to znaczy opisywać relacje między czynnikami produkcji a produkcją, co może służyć do określania zapotrzebowania na czynniki produkcji. Popyt na czynniki produkcji jest zależny od rozmiarów produkcji i efektywności rozpatrywanych czynników. Mając ustalone ceny czynników produkcji można w prosty sposób określić poziom kosztów wytwarzania, co może wyznaczać granice wyborów producenta i jego potencjalne możliwości wytwórcze, a także w pewnym stopniu pozwala na określenie efektywności całej gospodarki.

EKONOMETRYCZNA POSTAĆ FUNKCJI PRODUKCJI[1]

Funkcja produkcji oznacza relację o charakterze techniczno-organizacyjnym przyporządkowującą określonym nakładom czynników wytwórczych potencjalne rozmiary produkcji.

Ogólna postać funkcji produkcji przedstawia się następująco:

$$\mathbf{Y = f(A_1, A_2, \ldots, A_k, \varepsilon, \eta)} \qquad (1)$$

gdzie: Y – produkcja,

$A_1, A_2, \ldots, A_k$ – czynniki lub warunki produkcji,

ε - składnik losowy,

η - wektor parametrów funkcji produkcji.

Zależność opisaną za pomocą wzoru (1) będziemy traktować jako **ekonometryczną funkcję produkcji.** Stanowi ona **model jednorównaniowy,** w którym zmienną objaśnianą jest produkcja (na ogół wyrażona w jednostkach wartościowych), a zmiennymi objaśniającymi są czynniki produkcji (zazwyczaj ograniczone do dwóch – kapitału i pracy), zakłócenie losowe reprezentuje zmienna ε. Najczęściej zależność określaną mianem funkcji produkcji rozpatruje się na poziomie jednego procesu produkcyjnego, bądź jednego zakładu. Można również rozpatrywać funkcje produkcji dla poszczególnych działów, a także całej gospodarki. Wielkość Y (produkcja) jest rozumiana jako zbiór wytworzonych produktów wyrażony w jednostkach fizycznych bądź w cenach stałych. Wolumen produkcji może obejmować skalę przedsiębiorstwa, gałęzi lub całej gospodarki narodowej. W tym ostatnim przypadku powszechnie stosowanym miernikiem jest produkt krajowy brutto PKB (Gross Domestic Product). Wymieniona kategoria – PKB jest w skali gospodarki najbardziej adekwatnym miernikiem rezultatów procesu produkcyjnego, bowiem wyniki produkcyjne uzyskane w kolejnych fazach procesu są traktowane jako odpowiednie składniki rezultatu wytworzonego w całej gospodarce. Produkcja dodana określona dla danej fazy procesu wytwórczego stanowi różnicę między produkcją globalną wyrażoną w cenach stałych, a wartością wyrażonych również w cenach stałych nakładów materiałowych (zużyte surowce, materiały, półprodukty, energię i usługi obce).

Prezentację problematyki funkcji produkcji zazwyczaj ogranicza się do wyróżnienia dwóch czynników wytwórczych: nakładów kapitałowych (wartości trwałego majątku produkcyjnego, wartości zużytych surowców, materiałów, energii oraz nakładów finansowych) i zatrudnienia (liczby osób niezbędnych do realizacji danego przedsięwzięcia produkcyjnego). Zmienne w modelu tworzą kategorie ilościowe, wartościowe, ewentualnie ich indeksy [5].

Ograniczając liczbę czynników produkcji do dwóch tzn. kapitału i pracy, pomijając jednocześnie składnik losowy można zapisać następującą postać funkcji produkcji:

$$\mathbf{Y = f(C, L)}$$

gdzie: Y – rezultat procesu wytwórczego w postaci produkcji,

C, L – czynniki produkcji odpowiednio kapitał i praca.

WŁAŚCIWOŚCI FUNKCJI PRODUKCJI

W teorii ekonomii formułuje się szereg postulatów, których spełnienia oczekujemy od matematycznej postaci funkcji produkcji [5]. Przestawimy je poniżej określając jednocześnie niektóre właściwości funkcji:

- **Funkcja produkcji jest zazwyczaj nieliniowa[2];**
- Zakłada się, że **funkcja jest ciągła, dwukrotnie różniczkowalna**, natomiast wykres tworzy powierzchnię w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych. **Linie**

1 Niniejszy tekst może zdaniem autora być wykorzystany w procesie dydaktycznym do realizacji przedmiotów: *podstawy ekonometrii (studia licencjackie), ekonometria (studia magisterskie)* na kierunkach: zarządzanie i inżynieria produkcji, zarządzanie oraz ekonomia.

2 Istnieją jednak metody transformacji niektórych funkcji produkcji w postać liniową, dokładnie przedstawimy taką metodę w odniesieniu do funkcji typu Cobb-Douglasa.

tworzące wykres nazywane są izokwantami (krzywymi jednakowego produktu), są one wypukłe w przestrzeni (C, L);

- **Produkcyjność krańcowa czynnika produkcji jest dodatnia**. Wydaje się, iż podany warunek jest oczywisty, ponieważ zastosowane w procesie gospodarczym czynniki produkcji mają być efektywne. Oznacza to, że zwiększanie nakładów pracy i kapitału przynosi przyrost produkcji. Warunek ten można zapisać jako:

$$f_C > 0 \quad i \quad f_L > 0$$

gdzie: f_C – pierwsza pochodna cząstkowa funkcji produkcji liczona względem kapitału,
f_L – pierwsza pochodna cząstkowa funkcji produkcji liczona względem pracy.

- **Produkcyjność krańcowa czynnika produkcji jest malejąca względem nakładów tego czynnika.** Właściwość ta oznacza, że krańcowe przyrosty produkcji maleją w miarę wzrostu nakładów poszczególnych czynników. Dzieje się tak, gdy zależność między wielkością produkcji, a wielkością nakładów każdego z osobna czynnika produkcji (kapitału i pracy) można przedstawić graficznie w postaci krzywej wklęsłej[3].

Możemy to zapisać w postaci:

$$f_{CC} < 0 \quad i \quad f_{LL} < 0$$

gdzie: f_{CC} – druga pochodna cząstkowa funkcji produkcji liczona względem kapitału,
f_{LL} – druga pochodna cząstkowa funkcji produkcji liczona względem pracy.

- **Krańcowa produkcyjność jednego czynnika wytwórczego zwiększa się gdy rosną nakłady drugiego czynnika.**

Można to zapisać za pomocą poniższej formuły:

$$f_{CL} > 0 \quad i \quad f_{LC} > 0$$

gdzie: f_{CL} f_{LC} – pochodne cząstkowe rzędu drugiego.

- **Funkcja produkcji jest jednorodna stopnia r.**

Warunek jednorodności funkcji oznacza, że zachodzi poniższa zależność:

$$f(\lambda C, \lambda L) = \lambda^r f(C, L)$$

W zależności od wielkości r można określić w jakim stopniu produkcja zareaguje na zmiany nakładów kapitału i pracy.

Można podać następujące przypadki:

– **stałe przychody skali gdy r=1,**

W tym przypadku zwiększenie nakładów każdego z czynników o p% powoduje przyrost produkcji również o p%.

– **malejące przychody skali r<1,**

Zwiększenie nakładów pracy i kapitału o p% spowoduje przyrost produkcji o r% (r < p).

– **rosnące przychody skali r>1.**

Dotyczy sytuacji, gdy wzrost nakładów każdego z czynników produkcji o p% spowoduje wzrost produkcji o s% (s > p).

3 Zakładamy jednocześnie, że nakłady drugiego czynnika są stałe.

- **Istnieje możliwość wzajemnej substytucji czynników produkcji**.

W procesie wytwórczym czynniki produkcji mogą być zastępowane w pewnych rozsądnych granicach. Jeżeli możemy dokonywać substytucji czynników produkcji oznacza to, że taką samą wielkość produkcji można osiągnąć przy zastosowaniu różnej kombinacji czynników.

Typowym przykładem substytucji jest zastępowanie nakładów pracy przez kapitał. Miarą substytucji jest krańcowa stopa substytucji, określa ona wielkość zmian (przyrostu lub spadku) nakładów jednego czynnika produkcji jaki powinien nastąpić, aby uzyskać tę samą wielkość produkcji, gdy nakład drugiego czynnika zmienia się o pewną małą jednostkę.

Krańcowa stopa substytucji pracy przez kapitał[4] określana jest jako wielkość nakładu kapitału konieczną do zastąpienia niewielkiego wycofanego nakładu pracy. Czyli można zapisać.

$$\varphi_{L,C} = \frac{dC}{dL}$$

gdzie: $\varphi_{L,C}$ – krańcowa stopa substytucji pracy przez kapitał,
d L – wycofane z procesu produkcyjnego nakłady pracy (zmniejszenie zatrudnienia o pewną niewielką liczbę osób),
d C – przyrost wartości (nakładów) kapitału niezbędny do utrzymania dotychczasowego poziomu produkcji kompensujący zmniejszenie nakładów pracy.

Możemy również dokonać analogicznej interpretacji powyższego wzoru w przypadku, gdy nakłady pracy ulegną zwiększeniu; wtedy należy wycofać z procesu pewną wartość kapitału. Problem ten wydaje się być czysto teoretycznym, ponieważ trudno wyobrazić sobie sytuację, gdy przyjmuje się do pracy dodatkowa liczbę osób i jednocześnie, aby nie przekroczyć pewnego ustalonego poziomu produkcji, wycofuje z produkcji określoną część kapitału w postaci maszyn i urządzeń technicznych.

Jako **krańcową stopę substytucji kapitału przez pracę** będziemy rozumieć wielkość nakładu pracy konieczną do zastąpienia niewielkiego wycofanego nakładu kapitału. Można to określić za pomocą formuły:

$$\varphi_{C,L} = \frac{dL}{dC}$$

gdzie: $\varphi_{C,L}$ – krańcowa stopa substytucji kapitału przez pracę,
d L – zmniejszenie wartości (nakładów) kapitału o pewną niewielką liczbę jednostek,
d L – przyrost nakładów pracy niezbędny do utrzymania dotychczasowego poziomu produkcji kompensujący zmniejszenie nakładów kapitału.

RODZAJE FUNKCJI PRODUKCJI

Funkcje produkcji występują w postaci:

– potęgowej funkcji typu Cobba-Douglasa,
– funkcji typu CES(Constant Elasticity of Substitution).

4 Dokładna interpretacja i sposoby obliczania krańcowej stopy substytucji zostaną podane w dalszej części artykułu.

– Funkcji typu VES (Variable Elasticity of Substitution).

Najbardziej rozpowszechniona z tych funkcji CES[5], funkcja o stałej elastyczności substytucji będąca uogólnieniem funkcji Cobb_Douglasa; przybiera ona następującą postać[6]:

$$Y_t = \gamma\, [\delta\, K_t^{-\rho} + (1 - \delta)\, L_t^{-\rho}]^{-v/\rho}\, \varepsilon, \quad (2)$$

gdzie: Y_t – zmienna objaśniana (wolumen produkcji),

K_t, L_t – zmienne objaśniające, odpowiednio kapitał i praca,

γ – dodatni parametr skali produkcji, określający efektywność procesu produkcji,

δ – miara intensywności oddziaływania kapitału produkcyjnego (środków trwałych), przybiera wartości należące do przedziału <0, 1>,

$(1 - \delta)$ – miara intensywności oddziaływania czynnika ludzkiego (pracy),

v – parametr charakteryzujący jednorodność funkcji wyrażający efekty skali (często zakłada się, iż v=1),

ρ – parametr funkcji powiązany z elastycznością substytucji[7].

Funkcja CES charakteryzująca się walorem ogólności jest dużo rzadziej wykorzystywana w praktyce, niż omówiona w dalszej części pracy funkcja Cobb-Douglasa. Ograniczone zastosowanie tej pierwszej jest skutkiem trudności, jakie pojawiają się przy próbie oszacowania, a potem interpretacji parametrów strukturalnych funkcji. Model dwuczynnikowej funkcji produkcji CES jest nieliniowy zarówno pod względem zmiennych, jak i parametrów strukturalnych. Nie znana jest transformacja przekształcająca funkcję w równoważny model liniowy. Pomysł na zastąpienie funkcji CES jej aproksymantą liniową polega na zlogarytmowaniu stronami funkcji postaci (2) i rozwinięciu następnie w szereg MacLaurina (szereg Taylora wokół $\rho = 0$)[8].

W sytuacji, gdy parametr ***p*** w wymienionej wyżej postaci funkcji CES jest dodatni i dąży do jedności **otrzymujemy funkcję produkcji Cobb-Douglasa**, będącą szczególnym przypadkiem funkcji **CES.** Uogólnienie funkcji produkcji CES, zmierzające do uzmiennienia elastyczności substytucji przez uzależnienie jej od technicznego uzbrojenia pracy prowadzi do powstania rodziny funkcji typu **VES** (**Variable Elasticity of Substutution). Funkcje te są nieliniowe** i nie dadzą się sprowadzić do funkcji liniowych względem parametrów. Powoduje to konieczność stosowania specjalnych metod estymacji nieliniowej[9].

Dalsze uogólnienia funkcji produkcji CES, głównie poprzez wprowadzenie do wymienionej funkcji dodatkowych członów mają na celu zwiększenie „giętkości" relacji między produkcją, a czynnikami ją tworzącymi to znaczy kapitałem i pracą. Oczywiście uogólnianie funkcji poprzez wprowadzanie nowych członów powodowało trudności z estymacją parametrów funkcji oraz interpretacją otrzymanych rezultatów obliczeń. Było to szczególnie wyraźne w przypadku analizy szeregów czasowych w warunkach zwiększenia ilości zmiennych ponad standardową ilość dwóch zmiennych.

Spośród znanych i wykorzystywanych w praktyce uogólnień funkcji CES można wymienić dwie: funkcję transcendentalną i funkcję transcendentalną logarytmiczną (translog). Obydwie te funkcje można zredukować do funkcji Cobb-Douglasa. Funkcja transcendentalna posiada ciekawe właściwości: krańcowe produkcyjności czynników wytwórczych mogą początkowo rosnąć, by następnie spadać, natomiast elastyczności substytucji są zmienne i zależne od relacji czynników. Funkcja transcendentalna logarytmiczna odznacza się dużą giętkością biorąc pod uwagę zmienność elastyczności czynników, a także elastyczność substytucji. Wymienione właściwości wynikają z faktu, iż postać funkcji zawiera w sobie kwadraty logarytmów zmiennych (kapitału i pracy) oraz wzajemne interakcje zmiennych.

Mimo interesujących właściwości wymienionych funkcji estymacja ich parametrów napotyka na trudności związane z występowaniem współliniowości zmiennych objaśniających oraz ich transformacji. W związku z tym pojawiły się metody polegające na zastąpieniu bezpośredniej estymacji parametrów – estymacją parametrów funkcji kosztów otrzymanych z funkcji produkcji. Jednak ze względu na ramy i charakter niniejszego opracowania nie będziemy zajmować się wymienioną klasą funkcji. Czytelnika zainteresowanego problematyką odsyłamy do odpowiednich pozycji literatury, gdzie na pewno znajdzie rozwiązanie interesujących go problemów. W kolejnym artykule zostanie omówiona funkcja Cobb-Douglasa ilustrując teorię związaną z istotą i właściwościami funkcji przykładami liczbowymi, które pozwolą czytelnikowi lepiej zrozumieć prezentowany problem i umożliwić mu samodzielne podejmowanie decyzji dotyczących modelowania procesu produkcyjnego w przedsiębiorstwie.

LITERATURA

[1] Dobija M.: Analityczna funkcja produkcji, Ekonomika i Organizacja Przedsiębiorstwa, nr 9/2004.

[2] Dobija M.: Analityczna funkcja produkcji (część II), Ekonomika i Organizacja Przedsiębiorstwa, nr 11/2004.

[3] Dobija M., Osikowski M.: Zarządzanie przez funkcję produkcji, w: Przedsiębiorstwo w procesie transformacji. Efektywność – restrukturyzacja – rozwój., AE, CECIOS, TNOiK, Warszawa-Kraków 2003.

[4] Goryl A.: Przyczynek do wyznaczania parametrów funkcji produkcji CES, „Zeszyty Naukowe AE w Krakowie1982, nr 185.

5 Funkcja CES jest także niekiedy nazywana funkcją SMAC od pierwszych liter nazwisk autorów: Solow, Minhas, Arrow, Chenery., którzy zaproponowali ją w roku 1961.

6 W rozważaniach ograniczymy się do dwóch czynników wytwórczych: kapitału i pracy, co dla zrozumienia istoty problemu wydaje się być w pełni wystarczające. Czytelnika zainteresowanego problemem można odesłać do literatury przedmiotu np. do cytowanej pracy : W. Welfe, *Ekonometria stosowana,* s.54-58.

7 Związek parametru ρ z elastycznością substytucji jest następujący:

$$s = \frac{1}{1 + \rho}$$, gdzie σ - oznacza elastyczność substytucji kapitału i pracy.

8 Metoda, którą sygnalizujemy została zaproponowana w roku 1967 i pochodzi od J. Kmenty, patrz w tej sprawie, A. Goryl, *Przyczynek do wyznaczania parametrów funkcji produkcji CES,* „Zeszyty Naukowe AE w Krakowie1982, nr 185.

9 Szerzej na ten temat w pracy: W. Maciejewski, *Ekonometria stosowana. Analiza porównawcza,* PWE, Warszawa 1980.

[5] Gruszczyński M., Podgórska M.: Ekonometria, wyd. SGH, Warszawa 1996.

[60] Maciejewski W.: Ekonometria stosowana, Analiza porównawcza, PWE, Warszawa 1980.

[7] Welfe W., Welfe A.: Ekonometria stosowana, PWE, Warszawa 2004, wyd. II.., s.36, 37.

THE FUNCTIONS OF PRODUCTION

SUMMARY

The following text is the second of a series concerning the issue of using innovative techniques of production in Poland and united Europe. The author in of the article describes the functions of production giving their characteristic features.

The presented article is a description of certain types of functions of production, whose analytical form makes it possible to verify statistically. On the basis of it is possible to separate the quantity called technical interest rate. It makes it possible to establish the effect of the progress in the tested period.