

Dr hab. inż. Jerzy BALEJKO  
Wydział Nauk o Żywności i Rybactwa AR w Szczecinie

## MATEMATYCZNY OPIS KONTURU POPRZECZNEGO PRZEKROJU CIAŁA RYB O KSZTAŁCIE WRZECIONOWATYM®

*Celem pracy jest znalezienie równań matematycznych opisujących zmiany zarysu przekroju poprzecznego ryb o kształcie wrzecionowatym w funkcji długości ciała ryb wrzecionowatych na przykładzie śledzia bałtyckiego (*Clupea harengus* L.). Aby sprawdzić, czy zaproponowana funkcja spełnia oczekiwania i określi krzywą, która przebiega tak, jak kontur poprzecznego przekroju ryby, przeprowadzono badania morfometryczne na świeżym surowcu rybnym. Wysokie wartości współczynników korelacji ( $r > 0,99$ ) wykazały dobre dopasowanie krzywej teoretycznej do wyników eksperymentalnych.*

### WPROWADZENIE

Wiele naukowych publikacji i podręczników anatomii czy też systematyki ryb podaje, że kształt uzależniony jest od trybu życia i czynników środowiskowych. U ryb szybko pływających i będących w ciągłym ruchu odpowiada on wymogom, jakie przed szybko poruszającym się obiektem stawia gęstość ośrodka. Z punktu widzenia hydrodynamiki najkorzystniejszy dla ryb pelagicznych jest kształt wrzecionowaty, minimalizujący opór ośrodka podczas ruchu.

Literatura wyróżnia przy tym 12 typów tego kształtu, przy czym charakterystyka tych typów podawana jest tylko opisowo [4, 5, 6]. Są to informacje bardzo ogólnikowe, niewystarczające do funkcyjnego opisu konturu poprzecznego przekroju ciała ryby. Podawana przez wszystkich autorów informacja, że kształt ciała ryb jest w zasadzie wrzecionowaty, pozwala domniemywać, iż modelem w pewnym stopniu przybliżającym ten kształt jest elipsoida obrotowa. Poprzecznym przekrojem takiej bryły są elipsy, których mimośród może przyjmować różne wartości.

Opis przekroju poprzecznego tuż za pokrywą skrzelową proponowany przez Kawkę [2] za pomocą trzech promieni odniesionych do długości całkowitej ryby, nie wystarcza do funkcyjnego przedstawienia obwiedni przekroju. Kolejna próba matematycznego opisu zarysu przekroju ryb słodkowodnych podjęta została przez Dowgiałło i Dutkiewicz [1]. Proponowana przez autorów zależność pozwala określić wysokość ryby oraz jej grubość w punkcie oddalonym od początku tuszki, nie opisując jednak jednym równaniem całego zarysu dowolnego przekroju ryby.

### CEL PRACY

Celem pracy jest znalezienie równań matematycznych opisujących zmiany zarysu przekroju poprzecznego ryb o kształtach wrzecionowatych w funkcji długości ciała na przykładzie śledzia bałtyckiego (*Clupea harengus* L.).

Funkcją wyjściową do opisu zarysu przekroju poprzecznego jest równanie elipsy, zawierające czynnik deformujący symetrię względem jednej z osi.

### Funkcyjny opis kształtu ryby

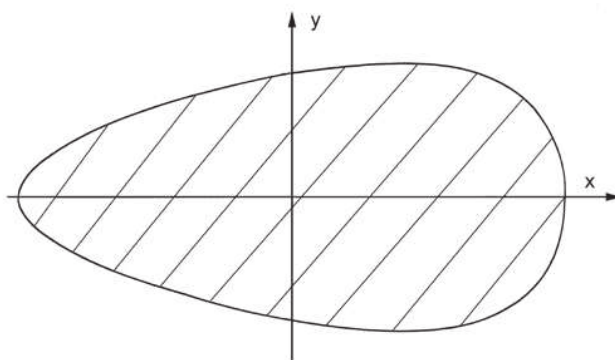
Szukając funkcyjnego opisu kształtu ryby, należy przede wszystkim wykorzystać taką wyjściową funkcję matematyczną, której graficzna interpretacja jest najbardziej zbliżona do krzywej zamkniętej, przedstawiającej kontur przekroju po-

przecznego ciała ryby. Warunek taki spełnia równanie elipsy w postaci:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

Następnie należy znaleźć właściwy układ współrzędnych.

Ustawiając oś „x” wzdłuż dłuższej osi elipsy (rys. 1), a oś „y” wzdłuż jej osi krótkiej, należy poszukać czynnika deformującego, który wprowadzony do równania elipsy, zaburzy jej symetrię względem osi „y”, a równocześnie nie naruszy jej symetrii względem osi „x”.



**Rys. 1.** Przekrój poprzeczny ciała ryby z zaznaczonymi osiami symetrii.

Z równania elipsy, gdzie „a” jest połową dłuższej osi elipsy, zaś „b” jest połową krótkiej osi elipsy otrzymuje się:

$$y = \pm \frac{b}{a} \cdot (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

Aby zniekształcić symetrię przekroju względem osi „y” należy wprowadzić do równania (2) czynnik deformujący, będący funkcją zmiennej „x”:

$$y \cdot \lambda(x) = \pm \frac{b}{a} \cdot (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

Z podstawowych właściwości elipsy wynika, że

dla  $x = 0$ ;  $y = \pm b$

dla  $y = 0$ ;  $x = \pm a$

Rozwinięcie funkcji  $\lambda(x)$  w szereg geometryczny:

$$\lambda(x) = 1 + \sum_{i=1}^n a_i \cdot x^i \quad (4)$$

spełnia warunek:  $\lambda(0) = 1$  oraz  $\lambda(\pm a) \neq 0$

Więc równanie (3) można przedstawić w postaci:

$$y = \pm \frac{b \cdot \sqrt{a^2 - x^2}}{a \cdot \left[ 1 + \sum_{i=1}^n a_i \cdot x^i \right]} \quad (5)$$

Przyjmując, że  $n = 2$ , równanie zdeformowanej elipsy przybiera postać:

$$y = \pm \frac{b}{a} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2} \quad (6)$$

Zachowana zostaje symetria względem osi „x”, co wynika wprost z równania (6), a równocześnie zaburzona jest symetria względem osi „y”.

Aby sprawdzić, czy przedstawiona funkcja spełnia oczekiwania i zakreśla krzywą, która przebiega tak, jak kontur poprzecznego przekroju ryby, należy wyznaczyć stałe współczynniki równania (6). W tym celu przeprowadzono badania morfometryczne na świeżym surowcu rybnym.

### Materiał do badań

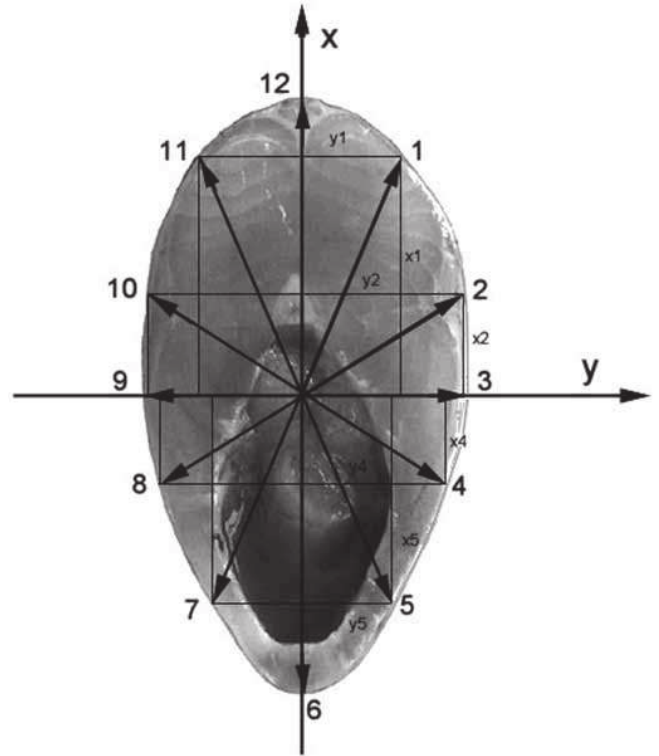
Badania przeprowadzono na świeżym śledziu bałtyckim *Clupea harengus L.*, pochodzącym ze stada jesiennego sortymentu S i D [3], złowionego w okolicach Dziwnowa. Przewieziony w skrzyniach z polistyrenu (wg PN-55/A-86761) surowiec, dostarczono do laboratorium po 12 godzinach od momentu odłowienia. Z 10 kilogramów surowca do badań pobrano losowo 30 osobników bez widocznych deformacji kształtu o przeciętnej całkowitej długości ciała 0,21 [m].

### Pomiary przekrojów

Pomiary przekrojów przeprowadzono metodą analizy obrazu. Ciało każdej ryby pocięto na 20 milimetrowe segmenty prostopadłe do podłużnej osi ciała. Każdy segment w kolejności, od pyska w kierunku ogona fotografowano na tle rzeczywistego układu współrzędnych.

Dalszej analizie geometrycznej dokonano metodą komputerową wyliczając promienie obwiedni co 300 zgodnie z ruchem wskazówek zegara, otrzymując 12 wyników dla każdego przekroju, oraz współrzędne prostokątne dla każdego punktu pomiarowego. Jako środek układu współrzędnych przyjęto punkt przecięcia osi poprzecznej przekroju segmentu z jego osią podłużną w połowie jej wysokości. Wyliczono wartości współrzędnych „x” i „y” dla punktów leżących na konturze poszczególnych przekrojów poprzecznych ciała ryby.

Na podstawie danych doświadczalnych wyznaczono wartości stałych współczynników równania (6).



**Rys. 2.** Metoda odczytu współrzędnych prostokątnych 12 punktów pomiarowych każdego przekroju.

Do obliczeń użyto łącznie 360 par liczb, co uznano za stosunkowo reprezentatywną ilość danych. Wysokie wartości współczynników korelacji ( $r > 0,99$ ), przy liczebności  $n = 360$ , są bardzo istotne i wykazują, że równanie (6) zostało trafnie dobrane.

**Tabela 1.** Wartości stałych współczynników równania (6) opisującego kształt przekroju poprzecznego ryby oraz współczynnika korelacji opisującego stopień dopasowania funkcji teoretycznej do wyników doświadczalnych

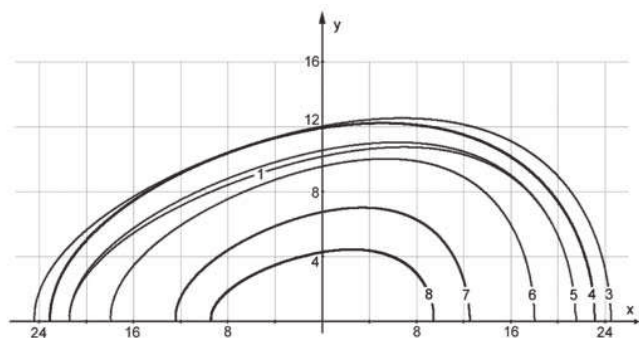
	nr przekroju	odległość od głowy [m]	a	b	a1	a2	r
śledź	1	0,00	21,489	10,329	-0,0179	0,00027	0,9986
	2	0,02	24,087	12,539	-0,0132	0,00042	0,9990
	3	0,04	24,485	12,243	-0,0130	0,00021	0,9985
	4	0,06	23,015	12,640	-0,0145	0,00082	0,9991
	5	0,08	21,509	10,926	-0,0181	0,00058	0,9984
	6	0,10	18,010	9,676	-0,0186	0,00028	0,9987
	7	0,12	12,502	6,758	-0,0222	0,00011	0,9997
	8	0,14	9,502	4,222	-0,0255	-0,00084	0,9991

\*) a, b, a1, a2 – stałe współczynniki równania (6)  
r – współczynnik korelacji

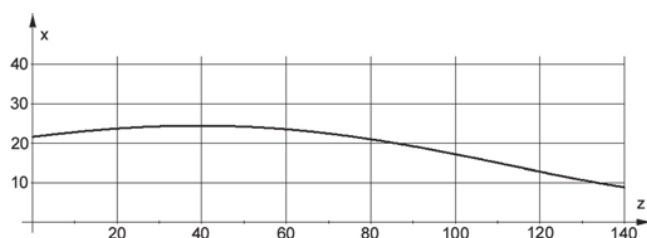
Zmiany kształtu wzdłuż ciała śledzia najlepiej opisuje wielomian czwartego stopnia (7), a interpretacją graficzną równania jest krzywa przedstawiona na rysunku 4.

$$f(z) = 21,625 + 0,132 \cdot z - 0,001 \cdot z^2 - 1,6 \cdot 10^{-5} \cdot z^3 + 8,4 \cdot 10^{-8} \cdot z^4 \quad (7)$$

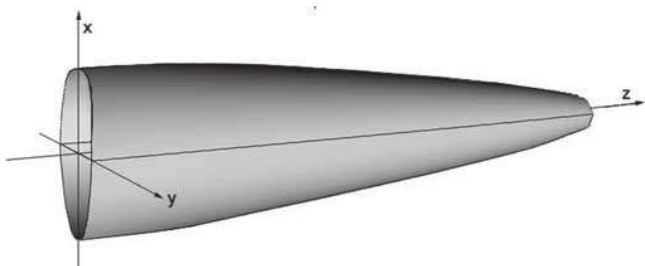
Miarą dopasowania równania teoretycznego (7) do wartości doświadczalnych jest współczynnik korelacji  $r = 0,999$ . Rozwiązaniem układu równań (6) i (7) jest funkcja określająca ca przestrzennie kształt śledzia (rys. 5).



Rys. 3. Zarysy poszczególnych przekrojów wyznaczone z równania (6).



Rys. 4. Wykres zmian kształtu podłużnego śledzia opisany równaniem (7).



Rys. 5. Wykres zmian przekrojów poprzecznych opisanych funkcją na długości całkowitej ryby.

## PODSUMOWANIE

Równanie opisujące kształt przekroju poprzecznego ciała ryby jest możliwe do zdefiniowania za pomocą równania elipsy, zawierającego czynnik deformujący symetrię względem jednej z jej osi.

Analiza wyników pomiarów morfometrycznych badanych ryb, prowadzi do wniosku, że funkcja, przedstawiona równaniem (6), zakreśla krzywą, która przebiega tak, jak kontur poprzecznego przekroju ryby.

Postęp w jednoznacznym definiowaniu zmian zarysu przekroju poprzecznego ryb o kształcie wrzecionowatym w funkcji długości całkowitej ryby, może być narzędziem wspomagającym konstruktorów maszyn i urządzeń obróbki wstępnej surowca rybnego.

## LITERATURA

- [1] Dowgiałło A., Dutkiewicz D.: Konstrukcyjne możliwości zwiększenia technologicznej wydajności operacji płatowania, Postępy Techniki Przetwórstwa Spożywczego, Nr 1, 2002.
- [2] Kawka T.: Określenie poprzecznego przekroju ciała ryby w sposób graficzny, Zeszyty Naukowe Akademii Rolniczej w Szczecinie, 1973, nr 40, 163-165.
- [3] Konarzewski J., Hałubko M., Nowakowska A.: Ryby i przetwory rybne, wyciągi z norm, Wydawnictwa Normalizacyjne, Warszawa 1970.
- [4] Krzykowski S., Heese T., Przybyszewski C.: Systematyka ryb, Wydawnictwo Akademii Rolniczej w Szczecinie, 1984.
- [5] Opuszyński K.: Podstawy biologii ryb, Państwowe Wydawnictwo Rolnicze i Leśne, Warszawa 1983.
- [6] Załachowski W.: Ryby, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1997.

## MATHEMATICAL DESCRIPTION OF CONTOUR OF TRANSVERSE INTERSECTION FIELD OF SPINDLE - SHAPED FISH

### SUMMARY

*Finding mathematical equations describing the changes of outline of transverse body section as a function of body length on Baltic herring's example is the aim of study.*

*To prove if proposed mathematical function fulfils expectations and outlines curve, which runs, as a contour of transverse the fish's intersection, the morphometric investigations were conducted on fresh fish material. High values of coefficients of correlation ( $r > 0,99$ ) prove a good adjustment of theoretical curve to experimental data.*