

Wyznaczenie naprężeń normalnych w przekrojach poziomych żelbetowego komina trzyprzewodowego

Małgorzata Dobrowolska¹, Marta Słowik²

¹ Absolwentka, Katedra Konstrukcji Budowlanych,
Wydział Inżynierii Budowlanej i Sanitarnej, Politechnika Lubelska,
ul. Nadbystrzycka 40, 20-618 Lublin, e-mail: m.a.dobrowolska@wp.pl

² Katedra Konstrukcji Budowlanych, Wydział Inżynierii Budowlanej i Sanitarnej,
Politechnika Lubelska, ul. Nadbystrzycka 40, 20-618 Lublin

Streszczenie: W artykule wyznaczono naprężenia normalne w poziomym przekroju żelbetowego komina trzyprzewodowego. Dokonano określenia naprężeń normalnych w przekrojach całkowicie ściskanych przy pomocy ogólnych wzorów wytrzymałości materiałów. W przypadku przekrojów mimośrodowo ściskanych określono położenie osi obojętnej przekroju. Korzystając z założeń metody stanów granicznych oraz wykorzystując liniową zależność między naprężeniami i odkształceniami, wyznaczono wartości współczynników B i C dla komina trzyprzewodowego, pozwalające na obliczenie maksymalnych naprężeń w betonie i stali zbrojeniowej przy różnych położeniach osi obojętnej przekroju.

Słowa kluczowe: komin trzyprzewodowy, naprężenia normalne.

1. Wprowadzenie

Wytyczne do projektowania żelbetowych kominów o przekroju pierścieniowym zawiera aktualna norma do projektowania kominów murowanych i żelbetowych [1]. Norma zajmuje się jedynie kominami jedнопrzewodowymi, a procedury obliczeniowe w niej zawarte nie mogą być zastosowane bezpośrednio przy projektowaniu obiektów wieloprzewodowych. W literaturze [2] możemy odnaleźć informacje na temat wyznaczania naprężeń normalnych w betonie i stali zbrojeniowej w kominie wielokształtowym dwuprzewodowym. Brak jest natomiast dokładnych procedur wyznaczania naprężeń w kominach trzyprzewodowych.

W niniejszej pracy wyznaczono naprężenia w betonie i stali zbrojeniowej w sposób analityczny, wykorzystując liniową zależność między naprężeniami i odkształceniami.

W obliczeniach wykorzystano podstawowe założenia metody obliczeniowej M. Lechmana [3].

2. Podstawowe założenia

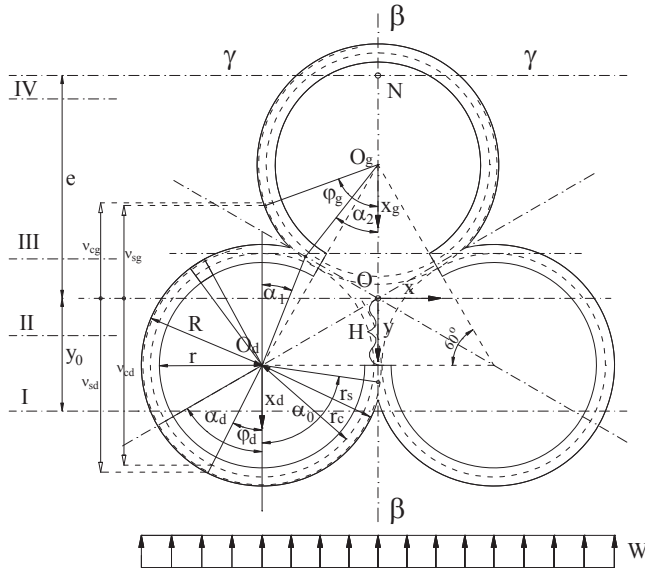
Postępując zgodnie z założeniami zawartymi w normie kominowej [1], obliczenie naprężeń w rozpatrywanym przekroju wykonano przy następujących założeniach:

- w mimośrodowo obciążonym trzonie komina zachowana jest zasada płaskich przekrojów Bernoulliego, tzn. że przed odkształceniem i po odkształceniu elementu przekroje pozostają płaskie,
- naprężenia ściskające przenoszą beton i stal,
- naprężenia rozciągające przenosi tylko stal,
- współpracę obydwu materiałów opisuje stosunek modułów sprężystości betonu i stali:

$$n = \frac{E_s}{E_c} \quad (1)$$

- istnieje symetria przekroju względem osi $\beta - \beta$,
- istnieje symetria obciążenia wiatrem względem osi $\beta - \beta$,
- związki fizyczne dla betonu i stali mają liniową postać:

$$\sigma_c = E_c \cdot \varepsilon_c \quad \sigma_s = E_s \cdot \varepsilon_s \quad (2)$$



Rys. 1. Wielkości opisujące geometrię komina trzyprzewodowego.

Fig. 1. Geometrical parametrs which describe the cross-section of three-flue chimney.

Wielkości i określenia opisujące geometrię przekroju komina trzyprzewodowego: przedział I położenia osi obojętnej przekroju, gdy $\alpha_d \in (0, \alpha_0)$, przedział II, gdy $\alpha_d \in (\alpha_0, \pi - \alpha_1)$, przedział III, gdy $\alpha_d \in (\pi - \alpha_1, \pi)$, przedział IV, gdy $\alpha_g \in (\alpha_2, \pi)$, pierścień dolny zawiera położenie osi obojętnej I-III, gdy $\alpha_d \in (0, \pi)$, pierścień górny zawiera położenie osi obojętnej IV, gdy $\alpha_g \in (\alpha_2, \pi)$, r – promień wewnętrzny wycinków pierścieni, r_c – promień okręgu wyznaczający położenie środka ciężkości wycinków pierścieni betonowych, r_s – promień okręgu wyznaczający położenie środków ciężkości zbrojenia, R – zewnętrzny promień wycinków pierścieni, α_0 – kąt wyznaczający środek ciężkości części wspólnej sąsiadujących pierścieni dolnych, α_1 – kąt wyznaczający środek ciężkości części wspólnej sąsiadujących pierścieni dolnego i górnego, mierzony od pionu, z wierzchołkiem

w środku ciężkości pierścienia dolnego, α_2 – kąt wyznaczający środek ciężkości części wspólnej sąsiadujących pierścieni dolnego i górnego, mierzony od pionu, z wierzchołkiem w środku ciężkości pierścienia górnego.

Przekrój trzyprzewodowego kabla żelbetowego poddawany jest obciążeniom zewnętrznym: momentowi zginającemu M , pochodzącemu od obciążenia w linii działania wiatru i sile podłużnej N , będącej ciężarem własnym konstrukcji, która to siła działa na mimośrodkie e :

$$e = \frac{M}{N} \quad (3)$$

3. Równanie położenia osi obojętnej przekroju

W rozwiązaniu bazuje się na równaniu równowagi momentów sił w przekroju względem prostej prostopadłej do osi symetrii $\gamma - \gamma$ i przechodzącej przez punkt przyłożenia wypadkowej siły ściskającej N .

$$\sum M_{\gamma-\gamma} = 0 \quad (4)$$

$$\int_{A_c} \sigma_c (e + v_c) dA_c + \int_{A_s} \sigma_s (e + v_s) dA_s = 0 \quad (5)$$

gdzie: e – mimośrodek siły N , v_c – odległość środka ciężkości nieskończenie małego wycinka pierścieniowego przekroju betonu do środka ciężkości całego przekroju poziomego kabla, v_s – odległość środka ciężkości nieskończenie małego wycinka przekroju stali do środka ciężkości całego przekroju poziomego kabla, dA_c – różniczka pola betonu, dA_s – różniczka pola zbrojenia, A_c – pole powierzchni betonu, A_s – pole powierzchni zbrojenia.

Dla uporządkowania opisu matematycznego wprowadzono w środku przekroju kartezjański układ współrzędnych Oxy oraz dwa lokalne biegunowe układy współrzędnych Bernoulliego o biegunach O_d, O_g i osiach biegunowych $O_d x_d, O_g x_g$.

Biegunowe układy współrzędnych opisano za pomocą współrzędnej kątowej φ , która odpowiednio dla pierścienia górnego i dolnego przyjmuje indeksy:

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_g \\ \varphi_d \end{cases}$$

W celu uproszczenia poniższych równań przyjęto następujące równości:

$$\eta_H = \frac{H}{r_c} \quad \eta_R = \frac{R}{r_c} \quad \eta = \frac{r_s}{r_c} \quad (6)$$

Korzystając z geometrii kabla trzyprzewodowego (Rys. 1) oszacowano położenia środków ciężkości nieskończenie małych wycinków pierścieni betonu i stali:

$$\begin{aligned} v_{cg}' &= \cos \varphi_g - 2\eta_H & v_{sg}' &= \eta \cos \varphi_g - 2\eta_H \\ v_{cd}' &= \eta_H + \cos \varphi_d & v_{sd}' &= \eta_H + \eta \cos \varphi_d \end{aligned} \quad (7)$$

Otrzymano, odpowiednio dla pierścienia górnego i dolnego:

$$v_c' = \begin{cases} v_{cg}' \\ v_{cd}' \end{cases} \quad v_s' = \begin{cases} v_{sg}' \\ v_{sd}' \end{cases} \quad (8)$$

Uwzględniając zależności (8), położenie środków ciężkości dla nieskończenie małego wycinka pierścieni przekroju betonu i stali można zapisać:

$$v_c = r_c \cdot v_c' \quad v_s = r_c \cdot v_s' \quad (9)$$

Po wykonaniu szeregu przekształceń równania (5) i uwzględnieniu zależności (1)-(9) otrzymano:

$$\frac{e}{r_c} = \frac{\int_{A_c} \varepsilon_c \cdot v_c' dA_c + n \int_{A_s} \varepsilon_s \cdot v_s' dA_s}{-\int_{A_c} \varepsilon_c dA_c - n \int_{A_s} \varepsilon_s dA_s} \quad (10)$$

Skończenie małe pola wycinków pierścieni betonu i stali przedstawić można za pomocą następujących relacji:

$$dA_s = \rho \cdot r_c \cdot b_c d\varphi \quad (11)$$

$$dA_c = (1 - \rho) r_c \cdot b_c d\varphi \quad (12)$$

Całki występujące w równaniu (10) po uwzględnieniu równań (11) i (12) można przedstawić jako:

$$\int_{A_c} \varepsilon_c \cdot v_c' dA_c = \int_{\alpha_c} \varepsilon_c \cdot v_c' (1 - \rho) r_c \cdot b_c d\varphi = (1 - \rho) r_c \cdot b_c \int_{\alpha_c} \varepsilon_c \cdot v_c' d\varphi \quad (13)$$

$$\int_{A_s} \varepsilon_s \cdot v_s' dA_s = \int_{\alpha_s} \varepsilon_s \cdot v_s' \rho \cdot r_c \cdot b_c d\varphi = \rho \cdot r_c \cdot b_c \int_{\alpha_s} \varepsilon_s \cdot v_s' d\varphi \quad (14)$$

$$\int_{A_c} \varepsilon_c dA_c = \int_{\alpha_c} \varepsilon_c (1 - \rho) r_c \cdot b_c d\varphi = (1 - \rho) r_c \cdot b_c \int_{\alpha_c} \varepsilon_c d\varphi \quad (15)$$

$$\int_{A_s} \varepsilon_s dA_s = \int_{\alpha_s} \varepsilon_s \rho \cdot r_c \cdot b_c d\varphi = \rho \cdot r_c \cdot b_c \int_{\alpha_s} \varepsilon_s d\varphi \quad (16)$$

gdzie: α_c – suma kątów odpowiadająca polu betonu, α_s – suma kątów odpowiadająca polu stali.

Po uwzględnieniu zależności (13)-(16) w równaniu (10) otrzymano:

$$\frac{e}{r_c} = \frac{(1 - \rho) \int_{\alpha_c} \varepsilon_c \cdot v_c' d\varphi + n \cdot \rho \int_{\alpha_s} \varepsilon_s \cdot v_s' d\varphi}{-(1 - \rho) \int_{\alpha_c} \varepsilon_c d\varphi - n \cdot \rho \int_{\alpha_s} \varepsilon_s d\varphi} \quad (17)$$

Odkształcenia przekroju wyznaczono zgodnie z zasadą Bernoulliego. Oddzielnie rozpatrzono odkształcenia dla betonu i stali.

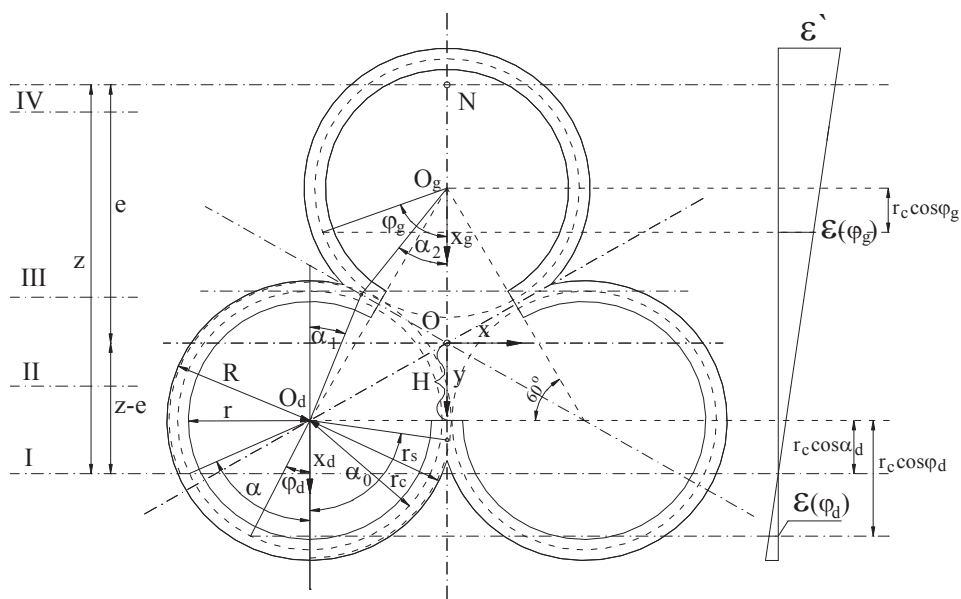
Odształcenia betonu dla przedziału położenia osi obojętnej I – III (Rys. 2).

- w pierścieniach dolnych:

$$\varepsilon(\varphi_d) = \varepsilon' \frac{r_c}{R + 3H + r_c \cos \alpha_d} (\cos \varphi_d - \cos \alpha_d) \quad (18)$$

- w pierścieniu górnym:

$$\varepsilon(\varphi_g) = \varepsilon' \frac{r_c}{R + 3H + r_c \cos \alpha_d} (3\eta H - \cos \varphi_g - \cos \alpha_d) \quad (19)$$



Rys. 2. Rozkład odkształceń w betonie, gdy oś obojętna przekroju znajduje się w przedziale I – III.
Fig. 2. Distribution of strain in concrete for neutral axis of cross-section located in region I – III.

Odształcenia stali dla przedziału położenia osi obojętnej I – III.

- w pierścieniach dolnych:

$$\varepsilon_s(\varphi_d) = \varepsilon' \frac{r_c}{R + 3H + r_c \cos \alpha_d} (\eta \cos \varphi_d - \cos \alpha_d) \quad (20)$$

- w pierścieniu górnym:

$$\varepsilon_s(\varphi_g) = \varepsilon' \frac{r_c}{R + 3H + r_c \cos \alpha_d} (3\eta H - \eta \cos \varphi_g - \cos \alpha_d) \quad (21)$$

Odształcenia betonu dla położenia osi obojętnej w przedziale IV (Rys. 3).

- dla pierścienia górnego:

$$\varepsilon(\varphi_g) = \varepsilon' \frac{r_c}{R + r_c \cos \alpha_g} (\cos \varphi_g - \cos \alpha_g) \quad (22)$$

Odształcenia stali dla położenia osi obojętnej w przedziale IV.

- dla pierścienia górnego:

$$\varepsilon_s(\varphi_g) = \varepsilon' \frac{r_c}{R + r_c \cos \alpha_g} (\eta \cos \varphi_g - \cos \alpha_g) \quad (23)$$

- dla pierścienia dolnego:

$$\varepsilon_s(\varphi_d) = \varepsilon' \frac{r_c}{R + r_c \cos \alpha_g} (\eta \cos \varphi_d + 3\eta_H - \cos \alpha_g) \quad (24)$$

Przyjmując, że:

$$\varepsilon_{c,I-III} = \begin{cases} 3\eta_H - \cos \varphi_g + \cos \alpha_d & \text{dla pierścienia górnego} \\ \cos \varphi_d - \cos \alpha_d & \text{dla pierścieni dolnych} \end{cases} \quad (25)$$

$$\varepsilon_{c,IV} = \cos \varphi_g - \cos \alpha_g \quad \text{dla pierścienia górnego} \quad (26)$$

$$\varepsilon_{cc} = \begin{cases} \varepsilon_{c,IV} & \text{dla położenia IV osi obojętnej} \\ \varepsilon_{c,I-III} & \text{dla położenia I-III osi obojętnej} \end{cases} \quad (27)$$

odkształcenia betonu można zapisać jako (odpowiednio dla położenia IV i I-III osi obojętnej):

$$\varepsilon_c = \varepsilon(\varphi) = \begin{cases} \varepsilon' \frac{r_c}{R + r_c \cos \alpha_g} \cdot \varepsilon_{c,IV} \\ \varepsilon' \frac{r_c}{R + 3H + r_c \cos \alpha_d} \cdot \varepsilon_{c,I-III} \end{cases} \quad (28)$$

Przyjmując, że:

$$\varepsilon_{s,I-III} = \begin{cases} 3\eta_H - \eta \cos \varphi_g + \cos \alpha_d & \text{dla pierścienia górnego} \\ \eta \cos \varphi_d - \cos \alpha_d & \text{dla pierścieni dolnych} \end{cases} \quad (29)$$

$$\varepsilon_{s,IV} = \begin{cases} \eta \cos \varphi_g - \cos \alpha_g & \text{dla pierścienia górnego} \\ \eta \cos \varphi_d + 3\eta_H - \cos \alpha_g & \text{dla pierścieni dolnych} \end{cases} \quad (30)$$

$$\varepsilon_{ss} = \begin{cases} \varepsilon_{s,IV} & \text{dla położenia IV osi obojętnej} \\ \varepsilon_{s,I-III} & \text{dla położenia I-III osi obojętnej} \end{cases} \quad (31)$$

odkształcenia stali można zapisać jako (odpowiednio dla położenia IV i I-III osi obojętnej):

$$\varepsilon_s = \varepsilon_s(\varphi) = \begin{cases} \varepsilon' \frac{r_c}{R + r_c \cos \alpha_g} \cdot \varepsilon_{s,IV} \\ \varepsilon' \frac{r_c}{R + 3H + r_c \cos \alpha_d} \cdot \varepsilon_{s,I-III} \end{cases} \quad (32)$$

W dalszej części opracowania przyjęto:

$$2 \cdot \int_{\alpha_c} \varepsilon_{cc} \cdot v_c' d\varphi = X_c \quad (33)$$

$$2 \cdot \int_{\alpha_s} \varepsilon_{ss} \cdot v_s' d\varphi = X_s \quad (34)$$

$$(-1) \cdot \int_{\alpha_c} \varepsilon_{cc} d\varphi = Y_c \quad (35)$$

$$(-1) \cdot \int_{\alpha_s} \varepsilon_{ss} d\varphi = Y_s \quad (36)$$

Po uwzględnieniu (33) - (36) równanie (17) zapisano jako:

$$\frac{e}{r_c} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1-\rho) \cdot X_c + n \cdot \rho \cdot X_s}{(1-\rho) \cdot Y_c + n \cdot \rho \cdot Y_s} \quad (37)$$

4. Wyznaczenie współczynników B i C dla przekroju pełnego

Naprężenia normalne ściskające w betonie σ_c i rozciągające w stali σ_s , wg normy [1], można obliczać według wzorów:

$$\sigma_c^{\max} = \frac{N}{A_c} \cdot B \quad (38)$$

$$\sigma_s^{\max} = \sigma_c^{\max} \cdot C \quad (39)$$

w których B i C są współczynnikami zależnymi od geometrii przekroju.

4.1. Określenie współczynników B i C dla położenia osi obojętnej przekroju w przedziale I-III

Maksymalne naprężenie ściskające w betonie obliczono ze wzorów:

$$\sigma_c' = B \cdot \sigma_o \quad (40)$$

$$\sigma_o = \frac{N}{A_c} \quad (41)$$

w których: B – to współczynnik określający maksymalne naprężenie ściskające w betonie σ_o – to naprężenie ściskające w przekroju wywołane siłą osiową N , σ_c' – maksymalne naprężenie ściskające w betonie A_c – pole powierzchni przekroju poprzecznego betonu.

Aby obliczyć współczynnik B korzystamy z warunku równowagi sumy rzutów sił na oś Y :

$$\sum Y = 0 \quad (42)$$

$$D + Z - N = 0 \quad (43)$$

gdzie: D – całkowita siła ściskająca w strefie ściskanej betonu, Z – całkowita siła w zbrojeniu, N – siła osiowa, określone następującymi wzorami:

$$D = \int_{A_c} \sigma_c dA_c \quad (44)$$

$$Z = \int_{A_s} \sigma_s dA_s \quad (45)$$

$$\int_{A_c} \sigma_c dA_c + \int_{A_s} \sigma_s dA_s - N = 0 \quad (44)$$

Podstawiając do równania (44) liniowe związki (1), (2) oraz wiedząc, że naprężenia ściskające w betonie są równe (40), a także pole przekroju poprzecznego wyrażając poprzez (45) otrzymujemy wzór na współczynnik B (46):

$$A_c = (2\pi - \alpha_2 + \alpha_0 + \alpha_1) \cdot r_c \cdot b_c \quad (45)$$

$$B = B_d = \frac{(\eta_R + 3\eta_H + \cos \alpha_d)(2\pi - \alpha_2 + \alpha_0 + \alpha_1)}{(1 - \rho) \cdot (-1) \cdot Y_{cd} + n \cdot \rho \cdot (-1) \cdot Y_{sd}} \quad (46)$$

Maksymalne naprężenie rozciągające w stali wyznaczono ze wzoru:

$$\sigma'_s = C \cdot \sigma'_c \quad (47)$$

w którym: C – współczynnik określający największe naprężenia rozciągające w stali, σ'_s – maksymalne naprężenie rozciągające w stali

Aby wyznaczyć współczynnik C należy przekształcić równanie (47) do postaci:

$$C = \frac{\sigma'_s}{\sigma'_c} = \frac{\sigma_s^{\max}}{\sigma_c^{\max}} \quad (48)$$

gdzie: σ_c^{\max} – maksymalne naprężenie ściskające w betonie, σ_s^{\max} – maksymalne naprężenie rozciągające w stali.

Na tej podstawie wyznaczamy wzór na współczynnik C :

$$C_d = n \cdot \frac{\eta - \cos \alpha_d}{\eta_R + 3\eta_H + \cos \alpha_d} \quad (49)$$

4.1. Określenie współczynników B i C dla położenia osi obojętnej przekroju w przedziale IV

W przypadku położenia osi obojętnej IV równanie wyrażające współczynnik B przybiera postać:

$$B = B_g = \frac{(\eta_R + \cos \alpha_g)(2\pi - \alpha_2 + \alpha_0 + \alpha_1)}{(1 - \rho) \cdot (-1) \cdot Y_{cg} + n \cdot \rho \cdot (-1) \cdot Y_{sg}} \quad (50)$$

Analogicznie do C_d wyznaczono C_g odpowiadające położeniu osi obojętnej IV:

$$C_g = n \cdot \frac{\eta + 3\eta_H - \cos \alpha_g}{\eta_R + \cos \alpha_g} \quad (51)$$

Wprowadzając rozróżnienie dla odkształceń betonu otrzymujemy:

- dla położenia osi obojętnej w przedziale I-III (odpowiednio dla pierścienia górnego i pierścieni dolnych):

$$\varepsilon_{c,I-III_g} = 3\eta_H - \cos \varphi_g + \cos \alpha_d \quad (52)$$

$$\varepsilon_{c,I-III_d} = \cos \varphi_d - \cos \alpha_d \quad (53)$$

- dla położenia osi obojętnej w przedziale IV, dla pierścienia górnego:

$$\varepsilon_{c,IV_g} = \cos \varphi_g - \cos \alpha_g \quad (54)$$

Oraz wprowadzając rozróżnienie dla odkształceń stali otrzymujemy:

- dla położenia osi obojętnej w przedziale I-III (odpowiednio dla pierścienia górnego i pierścieni dolnych):

$$\varepsilon_{s,I-III_g} = 3\eta_H - \eta \cos \varphi_g + \cos \alpha_d \quad (55)$$

$$\varepsilon_{s,I-III_d} = \eta \cos \varphi_d - \cos \alpha_d \quad (56)$$

- dla położenia osi obojętnej w przedziale IV (odpowiednio dla pierścienia górnego i pierścieni dolnych):

$$\varepsilon_{s,IV_g} = \eta \cos \varphi_g - \cos \alpha_g \quad (57)$$

$$\varepsilon_{s,IV_d} = \eta \cos \varphi_d + 3\eta_H - \cos \alpha_g \quad (58)$$

Możemy ustalić funkcje X_c , Y_c , X_s , Y_s dla czterech położen osi obojętnej.

Przedział IV $\alpha_2 \leq \alpha_g \leq \pi$ (Rys. 3).

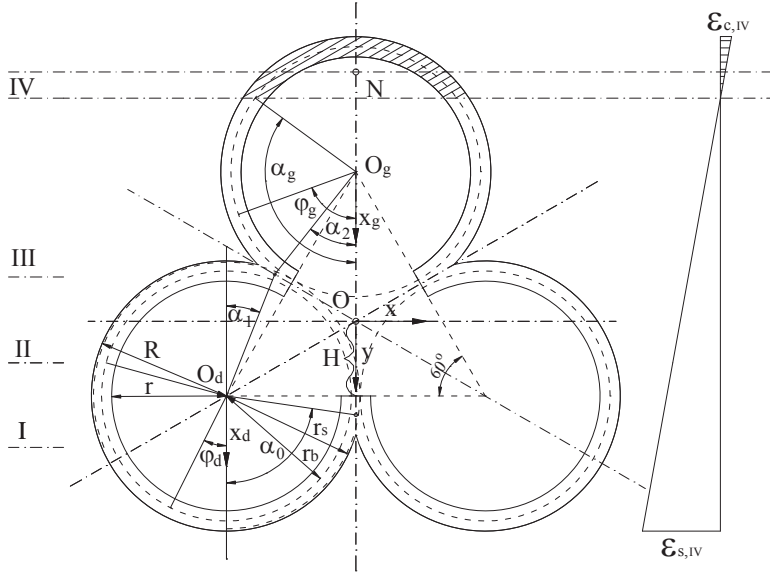
Funkcje X_c i Y_c dla pierwszego położenia osi obojętnej przekroju.

Podstawiając (52), (53) i zależności (7) dla betonu oraz granice strefy ściskanej betonu do równania (33), funkcja kąta α , X_c przyjmuje postać:

$$X_c = 2[2 \cdot \int_{\alpha}^{\alpha_0} [(\cos \varphi_d - \cos \alpha_d) \cdot (\eta_H + \cos \varphi_d)] d\varphi_d + \int_{\alpha_0}^{\pi - \alpha_1} [(\cos \varphi_d - \cos \alpha_d) \cdot (\eta_H + \cos \varphi_d)] d\varphi_d + 2 \cdot \int_{\pi - \alpha_1}^{\pi} [(\cos \varphi_d - \cos \alpha_d) \cdot (\eta_H + \cos \varphi_d)] d\varphi_d - \int_{\alpha_2}^{\pi} [(3\eta_H - \cos \varphi_g + \cos \alpha_d) \cdot (\cos \varphi_g - 2 \cdot \eta_H)] d\varphi_g] \quad (59)$$

Po rozwiązaniu równania (59) otrzymujemy ostatecznie funkcję X_c :

$$X_c = 2\pi + \alpha_0 + \alpha_1 - \alpha_2 - 2\alpha_d + 0,5(\sin 2\alpha_0 + \sin 2\alpha_1 - \sin 2\alpha_2 + 2\sin 2\alpha_d) + 2(-\sin \alpha_0 + \sin \alpha_1 + \sin \alpha_2) \cos \alpha_d + 2[(\pi - \alpha_0 - \alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\alpha_d) \cos \alpha_d + \sin \alpha_0 - \sin \alpha_1 - 2\sin \alpha_d + 5\sin \alpha_2] \eta_H + 12(\pi - \alpha_2) \eta_H^2 \quad (60)$$



Rys. 3. Opis sytuacji odkształceń betonu dla pierwszego położenia osi obojętnej przekroju $\alpha_2 \leq \alpha_g \leq \pi$.

Fig. 3. Distribution of strain in concrete for neutral axis of cross-section in the range $\alpha_2 \leq \alpha_g \leq \pi$.

Podstawiając (52) i (53) oraz granice strefy ściskanej betonu do równania (35), funkcja kąta α , Y_c przyjmuje postać:

$$Y_c = (-1) \cdot \left[2 \cdot \int_{\alpha}^{\alpha_0} (\cos \varphi_d - \cos \alpha_d) d\varphi_d + \int_{\alpha_0}^{\pi - \alpha_1} (\cos \varphi_d - \cos \alpha_d) d\varphi_d \right. \\ \left. + 2 \cdot \int_{\pi - \alpha_1}^{\pi} (\cos \varphi_d - \cos \alpha_d) d\varphi_d - \int_{\alpha_2}^{\pi} (3\eta_H - \cos \varphi_g + \cos \alpha_d) d\varphi_g \right] \quad (61)$$

Po rozwiązaniu równania (61) otrzymujemy ostateczny obraz funkcji Y_c :

$$Y_c = (2\pi + \alpha_0 + \alpha_1 - \alpha_2 - 2\alpha_d) \cos \alpha_d - \sin \alpha_0 + \sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + 2 \sin \alpha_d + 3(\pi - \alpha_2) \eta_H \quad (62)$$

Funkcje X_s i Y_s dla pierwszego położenia osi obojętnej przekroju.

Podstawiając (55), (56) i zależności (7) dla stali oraz granice strefy ściskanej betonu do równania (34), funkcja kąta α , X_s przyjmuje postać:

$$X_s = 2 \left[2 \cdot \int_0^{\alpha_0} [(\eta \cos \varphi_d - \cos \alpha_d) \cdot (\eta_H + \eta \cos \varphi_d)] d\varphi_d + \int_{\alpha_0}^{\pi - \alpha_1} [(\eta \cos \varphi_d - \cos \alpha_d) \cdot (\eta_H + \eta \cos \varphi_d)] d\varphi_d \right. \\ \left. + 2 \cdot \int_{\pi - \alpha_1}^{\pi} [(\eta \cos \varphi_d - \cos \alpha_d) \cdot (\eta_H + \eta \cos \varphi_d)] d\varphi_d - \int_{\alpha_2}^{\pi} [(3\eta_H - \eta \cos \varphi_g + \cos \alpha_d) \cdot (\eta \cos \varphi_g - 2 \cdot \eta_H)] d\varphi_g \right] \quad (63)$$

Po rozwiązaniu równania (63) otrzymujemy ostateczny obraz funkcji X_s :

$$X_s = \eta^2 [\alpha_0 + 2\pi + \alpha_1 - \alpha_2] + \eta^2 \cos \alpha_d (\sin \alpha_0 + \sin \alpha_1 - \sin \alpha_2) \\ + 2\eta \cos \alpha_d [-\sin \alpha_0 + \sin \alpha_1 + \sin \alpha_2] + 2\eta_H \eta [-\sin \alpha_1 + \sin \alpha_0 + 5 \sin \alpha_2] \\ + 2\eta_H \cos \alpha_d [-\alpha_0 + \pi - \alpha_1 - 2\alpha_2] + 12\eta_H^2 [\pi - \alpha_2] \quad (64)$$

Podstawiając (55) i (56) oraz granice strefy ściskanej betonu do równania (36), funkcja kąta α , Y_s przyjmuje postać:

$$Y_s = (-1) \cdot \left[2 \cdot \int_{\alpha}^{\alpha_0} (\eta \cos \varphi_d - \cos \alpha_d) d\varphi_d + \int_{\alpha_0}^{\pi - \alpha_1} (\eta \cos \varphi_d - \cos \alpha_d) d\varphi_d \right. \\ \left. + 2 \cdot \int_{\pi - \alpha_1}^{\pi} (\eta \cos \varphi_d - \cos \alpha_d) d\varphi_d - \int_{\alpha_2}^{\pi} (3\eta_H - \eta \cos \varphi_g + \cos \alpha_d) d\varphi_g \right] \quad (65)$$

Po rozwiązaniu równania (65) otrzymujemy ostateczny obraz funkcji Y_s :

$$Y_s = [\cos \alpha_d (\alpha_0 + 2\pi + \alpha_1 - \alpha_2) - \sin \alpha_0 + \sin \alpha_1 + \sin \alpha_2] \eta + 3\eta_H (\pi - \alpha_2) \quad (66)$$

W ten sam sposób używając równań (52)-(58) oraz pamiętając o założeniu, iż naprężenia ściskające przenosi tylko beton, a stal może być równocześnie ściskana i rozciągana – uwzględniamy ten warunek w granicach całkowania przy określaniu funkcji X_s , Y_s , X_s , Y_s dla każdego położenia osi obojętnej przekroju.

Wyznaczone wartości współczynników B i C podano w tablicach 1 i 2.

Tabela 1. Wartości współczynnika B dla przekroju pełnego.

Table 1. Coefficient B for full cross-section.

e/r_c	Współczynnik B					
	Stopień zbrojenia					
	0,003	0,004	0,005	0,006	0,008	0,010
1,00	2,431	2,419	2,407	2,396	2,373	2,350
1,20	2,813	2,797	2,782	2,768	2,738	2,710
1,40	3,369	3,342	3,316	3,291	3,242	3,197
1,60	4,075	4,024	3,976	3,932	3,850	3,776
1,80	4,872	4,786	4,707	4,636	4,508	4,397
2,00	5,803	5,624	5,481	5,363	5,170	5,040
2,20	6,904	6,593	6,361	6,176	5,890	5,672
2,40	8,045	7,588	7,259	7,044	6,622	6,338
2,60	9,178	8,579	8,155	7,830	7,352	7,003

Tabela 2. Wartości współczynnika C dla przekroju pełnego.

Table 2. Coefficient C for full cross-section.

e/r_c	Współczynnik C					
	Stopień zbrojenia					
	0,003	0,004	0,005	0,006	0,008	0,010
1,00	0,059	0,058	0,058	0,057	0,056	0,055
1,20	0,875	0,868	0,862	0,855	0,843	0,832
1,40	2,199	2,158	2,119	2,083	2,017	1,958
1,60	3,718	3,618	3,526	3,443	3,294	3,166
1,80	5,183	5,003	4,845	4,703	4,459	4,255
2,00	7,146	6,594	6,185	5,865	5,398	5,216
2,20	9,800	8,758	8,025	7,473	6,682	6,134
2,40	12,399	10,589	9,806	9,028	7,936	7,193
2,60	14,738	12,756	11,417	10,437	9,077	8,162

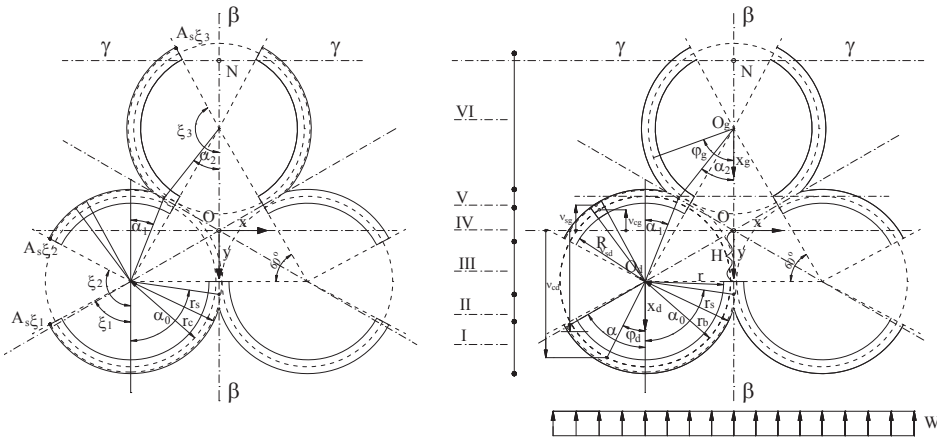
5. Wyznaczenie współczynników B i C w dla przekroju osłabionego otworami

Wyznaczenie naprężeń w rozpatrywanym przekroju wykonano korzystając z tych samych założeń jakie przyjęto podczas analizy przekroju komina trzyprzewodowego bez otworów. Wielkości matematyczne i geometryczne również są takie same.

Aby wyznaczyć położenie osi obojętnej korzystamy z warunku równowagi momentów (5), które zostaje rozbudowane o nowy człon uwzględniający zbrojenie dodatkowe wzmacniające obrzeża otworów:

$$\int_{A_c} \sigma_c (e + v_c) dA_c + \int_{A_s} \sigma_s (e + v_s) dA_s + \sum_{i=1}^3 \sigma_{si} (e + v_{s\xi_i}) A_{s\xi_i} = 0 \quad (67)$$

gdzie: σ_{si} – naprężenia w zbrojeniu znajdującym się przy krawędzi otworu, $A_{s\xi_i}$ – pole powierzchni przekroju zbrojenia dodatkowego opisane za pomocą współrzędnej kątowej ξ_i , $v_{s\xi_i}$ – środek ciężkości i -tego przekroju zbrojenia dodatkowego, ξ_i – kąt środkowy określający położenie otworu. Pozostałe wielkości jak wyżej. Na Rys. 4 przedstawiono geometrię przekroju z otworami.



Rys. 4. Rysunek poglądowy przyjętych układów współrzędnych i zlokalizowanie środków ciężkości wycinków pierścieni betonu i stali oraz opis kątowy geometrii komina.

Fig. 4. The cross-section of three-flue chimney weakened by openings.

W przypadku przekroju osłabionego otworami środki ciężkości nieskończenie małych wycinków będą miały postać:

- dla betonu:

$$v_{cg}' = \cos \varphi_g - 2\eta_H \quad (68)$$

$$v_{cd}' = \eta_H + \cos \varphi \quad (69)$$

- dla stali:

$$v_{sg}' = \eta \cos \varphi_g - 2\eta_H \quad (70)$$

$$v_{sd}' = \eta_H + \eta \cos \varphi \quad (71)$$

- dla zbrojenia dodatkowego:

$$v_{s\xi g}' = \eta \cos \xi_{gi} - 2\eta_H \quad (72)$$

$$v_{s\xi d}' = \eta_H + \eta \cos \xi_i \quad (73)$$

Ostatecznie środki ciężkości dla betonu, stali i zbrojenia dodatkowego wynoszą odpowiednio:

$$v_c = r_c \cdot v_c' \quad (74)$$

$$v_s = r_c \cdot v_s' \quad (75)$$

$$v_{s\xi i} = r_c \cdot v_{s\xi i}' \quad (76)$$

W związku z pojawieniem się dodatkowego zbrojenia funkcje X_c , Y_c , X_s , Y_s w równaniu położenia osi obojętnej przekroju (37) przyjmują postać:

$$2 \cdot \int_{\alpha_c} \varepsilon_{cc} \cdot v_c' d\varphi = X_c \quad (78)$$

$$2 \cdot \int_{\alpha_s} \varepsilon_{ss} \cdot v_s' d\varphi + \frac{2}{\rho} \cdot \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{si} \cdot v_{s\xi i}' \cdot \rho_{\xi i} = X_s \quad (79)$$

$$(-1) \cdot \int_{\alpha_c} \varepsilon_{cc} d\varphi = Y_c \quad (80)$$

$$(-1) \cdot \left(\int_{\alpha_s} \varepsilon_{ss} d\varphi + \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{si} \cdot \rho_{\xi i} \right) = Y_s \quad (81)$$

Odkształcenia w betonie przyjmą postać:

- dla położenia osi obojętnej w przedziale I-V (odpowiednio dla pierścienia górnego i pierścieni dolnych):

$$\varepsilon_{cc, I-V_g} = 3\eta_H - \cos \varphi_g + \cos \alpha_d \quad (82)$$

$$\varepsilon_{cc, I-V_d} = \cos \varphi_d - \cos \alpha_d \quad (83)$$

- dla położenia osi obojętnej w przedziale VI, dla pierścienia górnego:

$$\varepsilon_{cc, VI_g} = \cos \varphi_g - \cos \alpha_g \quad (84)$$

W stali natomiast mamy:

- dla położenia osi obojętnej w przedziale I-V (odpowiednio dla pierścienia górnego i pierścieni dolnych):

$$\varepsilon_{s, I-III_g} = 3\eta_H - \eta \cos \varphi_g + \cos \alpha_d \quad (85)$$

$$\varepsilon_{s, I-III_d} = \eta \cos \varphi_d - \cos \alpha_d \quad (86)$$

- dla położenia osi obojętnej w przedziale VI (odpowiednio dla pierścienia górnego i pierścieni dolnych):

$$\varepsilon_{s,IV_g} = \eta \cos \varphi_g - \cos \alpha_g \quad (87)$$

$$\varepsilon_{s,IV_d} = \eta \cos \varphi_d + 3\eta_H - \cos \alpha_g \quad (88)$$

W przypadku zbrojenia dodatkowego otrzymujemy:

- dla położenia osi obojętnej w przedziale I-V (odpowiednio dla pierścienia górnego i pierścieni dolnych):

$$\varepsilon_{si,I-V_g} = 3\eta_H - \eta \cos \xi_i + \cos \alpha_d \quad (89)$$

$$\varepsilon_{si,I-V_d} = \eta \cos \xi_i - \cos \alpha_d \quad (90)$$

- dla położenia osi obojętnej w przedziale IV (odpowiednio dla pierścienia górnego i pierścieni dolnych):

$$\varepsilon_{si,VI_g} = \eta \cos \xi_i - \cos \alpha_g \quad (91)$$

$$\varepsilon_{si,VI_d} = \eta \cos \xi_i + 3\eta_H - \cos \alpha_g \quad (92)$$

Wykorzystując równania (82)-(92) opisujące odkształcenia w analogiczny sposób (jak dla przekroju pełnego) wyznaczamy funkcje X_g, Y_g, X_d, Y_d dla każdego położenia osi obojętnej przekroju. W wyniku rozwiązania równania (37) otrzymujemy kąt α , który pozwoli nam na wyznaczenie współczynników B i C , które dla przekroju osłabionego otworami mają postać:

$$B_d = \frac{(\eta_R + 3\eta_H + \cos \alpha_d)(\pi + \alpha_0 + \alpha_1 - \alpha_2 + \xi_1 - \xi_2 + \xi_3)}{(1 - \rho) \cdot (-1) \cdot Y_{cd} + n \cdot \rho \cdot (-1) \cdot Y_{sd}} \quad (93)$$

$$C_d = n \cdot \frac{\eta - \cos \alpha_d}{\eta_R + 3\eta_H + \cos \alpha_d} \quad (94)$$

$$B_g = \frac{(\eta_R + 3\eta_H + \cos \alpha_d)(\pi + \alpha_0 + \alpha_1 - \alpha_2 + \xi_1 - \xi_2 + \xi_3)}{(1 - \rho) \cdot (-1) \cdot Y_{cg} + n \cdot \rho \cdot (-1) \cdot Y_{sg}} \quad (95)$$

$$C_g = n \cdot \frac{\eta + 2 - \cos \alpha_g}{\eta_R + \cos \alpha_g} \quad (96)$$

W przypadku przekroju komina osłabionego otworami, na wartość współczynnika B mają wpływ wartości ξ_1, ξ_2, ξ_3 – określające usytuowanie otworów oraz przyjęty stopień zbrojenia dodatkowego $A_{s\xi_1}, A_{s\xi_2}, A_{s\xi_3}$ rozłożonego na krawędziach tychże otworów.

Nieciągłość powodowana obecnością otworu powoduje nagły wzrost naprężeń w betonie na pewnym odcinku, innym dla każdego usytuowania otworu.

Współczynniki B i C powinny być wyznaczane każdorazowo dla indywidualnego przypadku przy uwzględnieniu; rozmieszczenia otworów, stopnia zbrojenia przyjętego w płaszczu komina oraz stopnia zbrojenia dodatkowego w okolicy otworów.

6. Wnioski

Przedstawiony w artykule algorytm obliczania naprężeń w przekrojach mimośrodowo żelbetowego komina trzyprzewodowego został wykorzystany do celów projektowych. Wyprowadzone wzory i współczynniki B i C posłużyły do zwymiarowania przekrojów komina trzyprzewodowego, którego projekt był przedmiotem pracy magisterskiej [4], wykonanej na WIBiS PL pod kierunkiem dr inż. M. Słowik. W pracy magisterskiej [4] można znaleźć kompletne obliczenia i wyprowadzenia zmierzające do ostatecznych zależności.

Literatura

- [1] PN-88/B-03004, *Kominy murowane i żelbetowe. Obliczenia statyczne i projektowanie*.
- [2] Lechman M., Lewiński P., *Wyznaczanie naprężeń normalnych w żelbetowych kominach wieloprzewodowych*, Inżynieria i Budownictwo nr 11/1993.
- [3] Lechman M., *Nośność i wymiarowanie przekrojów pierścieniowych elementów mimośrodowo ściskanych*, Wydawnictwa Instytutu Techniki Budowlanej, Warszawa 2006.
- [4] Dobrowolska M., *Projekt komina przemysłowego trzyprzewodowego o konstrukcji żelbetowej*, WIBiS, Politechnika Lubelska, Lublin 2008.

The determination of normal stresses in cross-sections of the three-flue reinforced concrete chimney

Małgorzata Dobrowolska, Marta Słowik

*Lublin University of Technology, Faculty of Civil and Sanitary Engineering,
20-618 Lublin, Nadbystrzycka 40, e-mail: m.a.dobrowolska@wp.pl*

Abstract: In the paper there is presented the algorithm of calculation of normal stresses in reinforced concrete three-flue chimney. The calculation has been made for full cross-section and for cross-section weakened by openings. The governing equations has been derived in an analytical form assuming linear physical laws for concrete and steel and, as for as considered cross-section weakened by openings, taking into account the additional reinforcing steel bars at the openings. In addition coefficients B and C have been determined, which are useful at dimensioning.

Key words: three-flue chimney, normal stresses.