

Propozycja metody obliczania szerokości rys ukośnych w elementach żelbetowych jednocześnie skręcanych i ścinanych

Waldemar Budzyński

*Politechnika Lubelska, Instytut Budownictwa, ul. Nadbystrzycka 40, 20-618 Lublin,
e-mail: walbud@gazeta.pl*

Streszczenie: Artykuł dotyczy zjawiska zarysowania skręcanych elementów żelbetowych, które jednocześnie poddane są działaniu siły poprzecznej. Zaprezentowano model teoretyczny Rahala i Collinsa, który jest jedynym modelem dającym możliwość szczegółowej analizy zachowania elementu jednocześnie skręcanego i ścinanego w całym zakresie obciążenia. Omówiono również założenia teorii MCFT, która stanowi podstawę teoretyczną modelu Rahala i Collinsa. Przedstawiono własną propozycję metody obliczania szerokości rys w elementach żelbetowych poddanych jednoczesnemu działaniu momentu skręcającego i siły poprzecznej. Metoda oparta jest na modelu Rahala i Collinsa.

Słowa kluczowe: żelbet; skręcanie; ścinanie; model kratownicy; odkształcenia; warunki nierozdzielności; szerokość rys.

1. Wprowadzenie

Wiele żelbetowych elementów i konstrukcji budowlanych podlega działaniu momentu skręcającego. Jako przykłady takich konstrukcji można wymienić: przestrzenne konstrukcje ramowe, schody spiralne, belki podporowe płyt balkonowych, trzony usztywniające budynki wysokie, belki podsuwnicowe czy beki skrajne obciążone jednostronnie płytą. Najczęściej skręcany element żelbetowy podlega jednocześnie działaniu V i M , czyli jest skręcany i ścinany.

Projektowanie konstrukcji żelbetowych należy przeprowadzać metodą stanów granicznych. Sprowadza się to do wykazania, że poszczególne elementy tych konstrukcji są zabezpieczone i sprawdzone w zakresie SGN i SGU. Do SGU należy m.in. stan graniczny zarysowania.

W normach wielu krajów, np. [18], nie wprowadza się nakazu obliczeniowego sprawdzania szerokości rys ukośnych wywołanych skręcaniem (lub ścinaniem). Podawane są jedynie zalecenia konstrukcyjne odnośnie średnicy i rozstawu strzemion lub zalecenia projektowe dotyczące zmienności kąta θ , których spełnienie ma zabezpieczyć element przed nadmiernym zarysowaniem. Zalecenia konstrukcyjne mogą dać zadowalający efekt tylko wówczas, gdy nośność elementu określona jest z takim zapasem, że problem nadmiernego zarysowania w ogóle się nie pojawia. Sytuacja taka występuje w wielu krajach, gdzie stosuje się znaczne współczynniki bezpieczeństwa. Taki sposób podejścia jest z konieczności do przyjęcia przy projek-

towaniu nowych konstrukcji. Nie jest jednak możliwy do zastosowania przy ocenie stanu zarysowania konstrukcji istniejących.

W normach niektórych krajów i zaleceniach, np.: [19, 22, 23], można znaleźć wzory do obliczania szerokości rys ukośnych w elementach skręcanych lub ścinanych. Jednak metody obliczeniowe oparte są częściowo na wnioskach z analizy elementów rozciąganych, a częściowo na spostrzeżeniach empirycznych, które uwzględnia się wprowadzając współczynniki i arbitralne założenia. Przy projektowaniu skręcanych (i ścinanych) elementów żelbetowych stosuje się najczęściej [21, 22] model kratownicy przestrzennej o zmiennym nachyleniu betonowych krzyżulców ściskanych opracowany przez Lamperta i Thürlimanna [9, 10]. W celu wyznaczenia wartości naprężeń i odkształceń w elemencie pod obciążeniem eksploatacyjnym (w obliczeniach stanu zarysowania) stosuje się wzory wyprowadzone na podstawie warunków równowagi kratownicy w stanie granicznym nośności. Ponieważ nie uwzględniono warunków nierozdzielności odkształceń, na podstawie tych wzorów nie można określić odkształceń w betonie i stali w skręcanym (ścinanym) elemencie żelbetowym. W konsekwencji nie jest możliwe prawidłowe prognozowanie zachowania elementu pod obciążeniem eksploatacyjnym (w SGU). Trudno oczekiwać, aby na podstawie takich metod obliczeniowych można było uzyskać prawidłowe szerokości rys.

W literaturze i przepisach normowych nie stwierdzono metody obliczania szerokości rys ukośnych w elementach żelbetowych jednocześnie skręcanych i ścinanych.

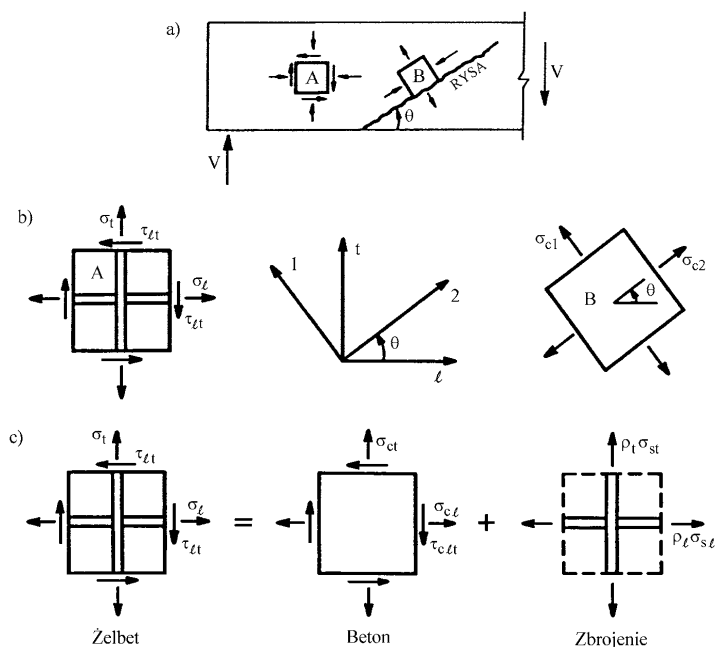
Wydaje się, że ze względu na przepisy normowe (wymaganie sprawdzenia szerokości rys) oraz projektowanie elementów przy stosowaniu mniejszych współczynników bezpieczeństwa niż w innych krajach (dawniej i obecnie), powinna istnieć metoda pozwalająca obliczyć szerokość rys w elementach skręcanych. W artykule podjęto próbę opracowania takiej metody w przypadku elementów jednocześnie skręcanych i ścinanych.

2. Modele teoretyczne odwzorowujące stan odkształcenia elementu żelbetowego poddanego działaniu siły poprzecznej lub momentu skręcającego

2.1. Teoria MCFT

Aby dokładnie określić zachowanie elementu żelbetowego poddanego działaniu siły poprzecznej lub momentu skręcającego, tzn. ustalić nośność oraz stan odkształcenia elementu pod dowolnym obciążeniem, należy w analizie równocześnie uwzględnić równania równowagi, warunki nierozdzielności odkształceń oraz prawa konstytutywne ukośnie zarysowanego betonu i stali zbrojeniowej. Jednym z modeli teoretycznych, który umożliwia taką analizę jest zmodyfikowana teoria pola ściskań (Modified Compression Field Theory – MCFT) Vecchio i Collinsa [15,16]. Teorię opracowano na podstawie analizy prostokątnego elementu żelbetowego, zbrojonego ortogonalnie, znajdującego się w dwuosiowym stanie naprężenia. Przyjęto element o niewielkich wymiarach, wyizolowany z konstrukcji żelbetowej, co przedstawiono na rys. 1. Pod wpływem obciążeń zewnętrznych element może być poddany działaniu naprężeń stycznych i normalnych, rys. 1b. Kierunki prętów podłużnych i poprzecznych oznaczono, odpowiednio, jako osie „ l ” i „ t ”, tworząc

w ten sposób układ współrzędnych l - t . Wobec tego, naprężenia normalne działające na element oznaczono σ_l i σ_t . Ponieważ wymiary elementu są małe w porównaniu z wymiarami konstrukcji przyjęto, że naprężenia są równomiernie rozłożone na bocznych powierzchniach elementu. Po zarysowaniu element pracuje jak kratownica przestrzenna, przy czym zakłada się, że w elemencie występuje wiele wzajemnie równoległych rys. Betonowe krzyżulce ściskane są zorientowane w kierunku osi „2”, która jest nachylona pod kątem θ do prętów podłużnych. Przyjmuje się, że kierunek „2” jest kierunkiem głównych naprężeń ściskających w betonie. Oznaczając kierunek prostopadły do osi „2” jako oś „1”, otrzymuje się układ współrzędnych „1-2” na kierunku działania naprężeń głównych. Wobec tego, główne naprężenia ściskające i rozciągające w betonie oznaczono, odpowiednio, σ_{c2} i σ_{c1} , rys. 1b. Na rys. 1c przedstawiono superpozycję naprężeń w betonie i zbrojeniu, gdzie naprężenia w betonie, na odpowiednich kierunkach, oznaczono σ_{cl} , σ_{ct} , natomiast naprężenia w zbrojeniu σ_{sl} , σ_{st} .



Rys. 1. Element żelbetowy w dwuosowym stanie naprężenia [6]: a) strefa przypodporowa belki żelbetowej, b) przyjęta konwencja oznaczeń, c) superpozycja naprężeń w betonie i zbrojeniu.

Fig. 1. Reinforced concrete element subjected to in-plane stresses [6]: a) left support of a reinforced concrete beam, b) definitions of stresses and coordinate system, c) superposition of concrete stresses and steel stresses.

Na podstawie teorii MCFT można ustalić wzajemne zależności pomiędzy naprężeniami σ_b , σ_t i τ , działającymi na element żelbetowy, a odkształceniami w elemencie (ε_b , ε_t , γ), spowodowanymi tymi naprężeniami. W teorii MCFT przyjęto następujące, dodatkowe założenia:

1) Element odkształca się w taki sposób, że jego krawędzie pozostają proste i wzajemnie równoległe; stan odkształcenia elementu można więc zdefiniować za pomocą dwóch odkształceń normalnych ε_b , ε_t i odkształcenia poprzecznego γ .

2) Określono stanowi odkształcenia odpowiada tylko jeden, właściwy stan naprężenia; rozważania nie obejmują przypadków, w których element poddany jest działaniu obciążeń dynamicznych, powtarzalnych i wielokrotnie zmiennych; dodatkowo nie uwzględnia się wpływu skurczu, pęczania oraz zmian temperatury.

3) Kierunek głównych odkształceń betonu ściskanego ε_2 jest zgodny z kierunkiem głównych naprężeń ściskających w betonie σ_{c2} .

4) Zbrojenie podlega działaniu jedynie sił osiowych; pomija się wpływ sił klockujących (dowel action).

5) Rysy w elemencie żelbetowym stanowią obszary nieciągłości, co powoduje istotną zmienność lokalnych naprężeń i odkształceń, i utrudnia zastosowanie warunków nierozdzielności; rozważania prowadzone są w odniesieniu do średnich wartości odkształceń i średnich wartości naprężeń; odkształcenia i naprężenia są uśrednioną wartością odkształceń i naprężeń na długości odcinka przecinającego kilka rys, wliczając w to odkształcenia i naprężenia w przekrojach zarysowanych; w konsekwencji średnie odkształcenia można rozważać jako wzajemnie powiązane wymaganiami ciągłości materiałów ciągłych.

6) Średnie odkształcenia betonu i zbrojenia są identyczne; na zewnętrznych powierzchniach elementu nie występuje poślizg (całkowity) pomiędzy betonem a zbrojeniem; założenie to nie oznacza, że pomiędzy zbrojeniem a betonem istnieje przyczepność pierwotna; występowanie lokalnych poślizgów w przekrojach zarysowanych nie stanowi naruszenia tego założenia.

7) Rozważania prowadzone są niezależnie w odniesieniu do zbrojenia i zarysowanego betonu; czynnikiem integrującym są warunki nierozdzielności odkształceń.

Równania równowagi

Siły działające na element żelbetowy są równoważone przez siły w betonie i zbrojeniu. Warunki równowagi, można wyrazić przy pomocy naprężeń:

$$\sigma_l = \sigma_{cl} + \rho_l \sigma_{sl} \quad (1)$$

$$\sigma_t = \sigma_{ct} + \rho_t \sigma_{st} \quad (2)$$

$$\tau_{lt} = \tau_{ct} = \tau \quad (3)$$

Przy pomocy warunków równowagi w modelu kratownicy można wykazać [6], że średnie naprężenia w betonie spełniają warunki koła naprężeń *Mohra*. Wobec tego, można wyrazić naprężenia w betonie w funkcji naprężeń głównych:

$$\sigma_{cl} = \sigma_{c2} \cos^2 \theta + \sigma_{c1} \sin^2 \theta \quad (4)$$

$$\sigma_{ct} = \sigma_{c2} \sin^2 \theta + \sigma_{c1} \cos^2 \theta \quad (5)$$

$$\tau = (\sigma_{c2} - \sigma_{c1}) \sin \theta \cos \theta \quad (6)$$

Ponadto korzystając z koła *Mohra* można wyprowadzić następujące równania:

$$\sigma_{c2} = \tau \left(\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} \right) - \sigma_{c1} \quad (7)$$

$$\sigma_{cl} = \frac{\tau}{\tan \theta} - \sigma_{c1} \quad (8)$$

$$\sigma_{c2} = \sigma_{cl} + \sigma_{ct} + \sigma_{c1} \quad (9)$$

$$\tan^2 \theta = \frac{\sigma_{c2} - \sigma_{cl}}{\sigma_{c2} - \sigma_{ct}} \quad (10)$$

W powyższych równaniach przyjmuje się, że naprężenia σ_{cl} , σ_{ct} , σ_{c1} są dodatnie przy rozciąganiu, natomiast naprężenie σ_{c2} jest dodatnie przy ściskaniu.

Równania nierozdzielności odkształceń

Zgodnie z założeniem teorii MCFT średnie odkształcenia elementu równe są, co do wartości, średnim odkształceniom betonu i średnim odkształceniom stali (np.: $\varepsilon_l = \varepsilon_{cl} = \varepsilon_{sl}$).

Z warunków nierozdzielności modelu kratownicy wynika [6], że średnie odkształcenia spełniają warunki koła odkształceń *Mohra*. Można więc odkształcenia wyrazić w funkcji odkształceń głównych:

$$\varepsilon_l = \varepsilon_2 \cos^2 \theta + \varepsilon_1 \sin^2 \theta \quad (11)$$

$$\varepsilon_t = \varepsilon_2 \sin^2 \theta + \varepsilon_1 \cos^2 \theta \quad (12)$$

$$\gamma = 2(\varepsilon_2 + \varepsilon_1) \sin \theta \cos \theta \quad (13)$$

Ponadto, korzystając z koła odkształceń *Mohra* można wyprowadzić następujące zależności:

$$\gamma = \frac{2(\varepsilon_2 + \varepsilon_l)}{\tan \theta} \quad (14)$$

$$\varepsilon_t = \frac{\gamma}{2 \tan \theta} - \varepsilon_2 \quad (15)$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_t + \varepsilon_l + \varepsilon_2 \quad (16)$$

$$\tan^2 \theta = \frac{\varepsilon_l + \varepsilon_2}{\varepsilon_t + \varepsilon_2} \quad (17)$$

W powyższych równaniach średnie odkształcenia ε_t , ε_l , ε_1 są traktowane jako wielkości dodatnie przy rozciąganiu, natomiast średnie odkształcenie ε_2 rozpatruje się jako wielkość dodatnią przy ściskaniu.

Prawa konstytutywne betonu i stali

Dla stali przyjęto zależność σ - ε w przekroju zarysowanym:

$$\sigma_s = \varepsilon_s E_s \leq f_y \quad (18)$$

Zależności σ - ε ukośnie zarysowanego betonu zostały ustalone przez *Vecchio* i *Collinsa* na podstawie wyników badań [16]. Stwierdzono, że beton w krzyżulcu, ograniczonym ukośnymi rysami, wskutek działania naprężeń rozciągających w kierunku prostopadłym do osi krzyżulca, uzyskuje niższą wytrzymałość na ściskanie niż beton w standardowej próbie ściskania betonowego walca. Ponadto,

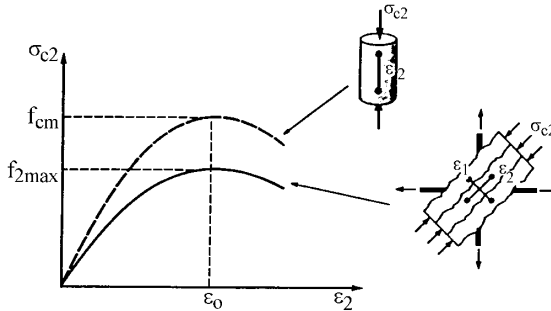
w betonie znajdującym się między rysami stwierdzono naprężenia rozciągające, nawet przy bardzo dużych wartościach średnich odkształceń ($\varepsilon_1 \approx 100\varepsilon_{sr}$). Zjawisko zmniejszenia wytrzymałości na ściskanie ukośnie zarysowanego betonu określa się w literaturze jako „zmiękczenie betonu” (softening of concrete). *Vecchio* i *Collins* [15,16] zaproponowali następującą zależność σ - ε betonu zmiękczonego:

$$\sigma_{c2} = \zeta f_{cm} \left[2 \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0} \right) - \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0} \right)^2 \right] \quad (19)$$

gdzie ε_0 jest odkształceniem odpowiadającym wytrzymałości betonu na ściskanie w jednoosiowym stanie naprężenia f_{cm} . Zazwyczaj, jeżeli nie dysponuje się wynikami badań doświadczalnych, przyjmuje się $\varepsilon_0 = 0.002$. Czynniki ζ jest „współczynnikiem zmiękczenia” (jego odpowiednikiem w normach [20, 21, 22] jest współczynnik efektywności ν), którego wartość wyznacza się ze wzoru:

$$\zeta = \frac{1}{0.8 + 0.34 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}} = \frac{1}{0.8 + 170\varepsilon_1} \leq 1.0 \quad (20)$$

Równanie (19) zostało przedstawione w formie graficznej na rys. 2, na którym dodatkowo, dla porównania, przedstawiono zwykłą zależność σ - ε uzyskaną w standardowej próbie ściskania betonowego walca ($\phi 150 \times 300$).



Rys. 2. Zależność σ - ε przy ścisaniu betonu zmiękczonego [15].

Fig. 2. Compression σ - ε relationship for softening concrete [15].

Występujący w rów. (19) iloczyn ζf_{cm} jest wytrzymałością na ściskanie betonu zmiękczonego, a w literaturze przyjęto ją oznaczać symbolem f_{2max} .

Wzór, na podstawie którego można wyznaczyć wartość głównych odkształceń w betonie ściskanym, można uzyskać przekształcając rów. (19):

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_0 \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{\sigma_{c2}}{f_{2max}}} \right) \quad (21)$$

Znak „-”, w rów. (21) stosuje się w przypadku $\sigma_{c2} < f_{2max}$.

Vecchio i *Collins* [15, 16] na podstawie wyników badań przyjęli następującą zależność pomiędzy średnimi naprężeniami, a średnimi odkształceniami betonu rozciąganego:

$$\sigma_{c1} = E_c \varepsilon_1 \quad \text{dla} \quad \varepsilon_1 \leq \varepsilon_{sr} \quad (22)$$

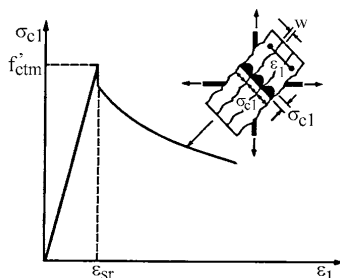
$$\sigma_{c1} = \frac{f'_{ctm}}{1 + \sqrt{200\varepsilon_1}} \quad \text{dla} \quad \varepsilon_1 > \varepsilon_{sr} \quad (23)$$

gdzie $E_c = 5500(f_{cm})^{1/2}$ jest modułem sprężystości betonu, $f'_{ctm} = 0.33(f_{cm})^{1/2}$ oznacza średnią wytrzymałość betonu na rozciąganie w dwuosiowym stanie naprężenia ($\sigma_{c1} = -\sigma_{c2}$), natomiast ε_{sr} jest średnim odkształceniem betonu rozciąganego przy zarysowaniu betonu. Wielkość odkształcenia ε_{sr} można obliczyć ze wzoru:

$$\varepsilon_{sr} = \frac{f'_{ctm}}{E_c} \quad (24)$$

Podstawiając do rów. (24) odpowiednie zależności określające E_c i f'_{ctm} , uzyskuje się wartość odkształcenia przy zarysowaniu betonu $\varepsilon_{sr} = 0.00006$.

Równania (22) i (23) zostały przedstawione w formie graficznej na rys. 3.



Rys. 3. Zależność σ - ε betonu rozciąganego w elemencie żelbetowym z rysami ukośnymi [15].
Fig. 3. Tension σ - ε relationship of concrete for cracked reinforced concrete [15].

Vecchio i *Collins* [16] zwracają uwagę, że parametry przyczepnościowe stali zbrojeniowej oraz rozmieszczenie zbrojenia w elemencie mogą mieć wpływ na zależność σ - ε betonu rozciąganego opisaną rów. (23).

2.2. Zastosowanie teorii MCFT do elementów skręcanych

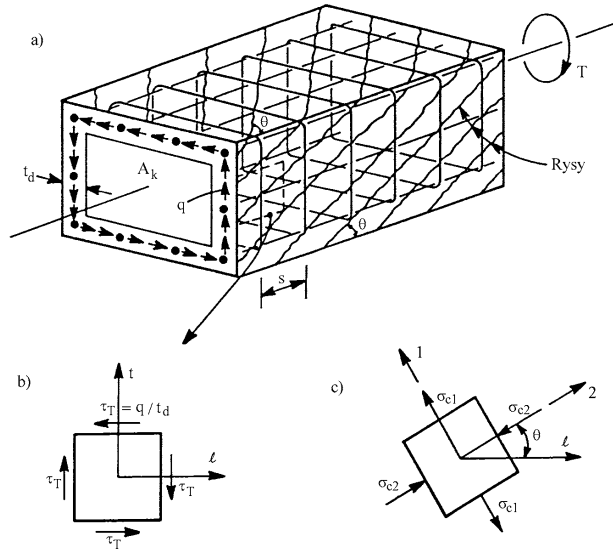
Teoria MCFT została przystosowana do analizy elementów poddanych działaniu czystego skręcania przez *Collinsa* i *Mitchella* [4].

Na rys. 4 przedstawiono element żelbetowy o przekroju prostokątnym poddany działaniu momentu skręcającego T . Pod wpływem T , po zarysowaniu elementu, w zewnętrznej strefie przekroju poprzecznego o grubości t_d , zwanej strefą strumienia ścinania, powstaje strumień sił stycznych q . Aby warunek równowagi momentów zewnętrznych i wewnętrznych był spełniony, strumień sił stycznych q musi mieć stałą wartość na całej długości linii środkowej strefy strumienia ścinania. Warunek równowagi można wówczas wyrazić za pomocą równania:

$$q = \frac{T}{2A_k} \quad (25)$$

gdzie A_k oznacza pole powierzchni zawarte wewnątrz linii środkowej strefy strumienia ścinania.

Zatem, strumień sił stycznych q , przedstawiony na rys. 4a, jest wypadkową naprężeń stycznych τ_T z fragmentu strefy strumienia ścinania o grubości t_d i jednostkowej wysokości, mierzonej wzdłuż linii środkowej. Należy dodać, że w strefie strumienia ścinania występuje zmienny rozkład naprężeń stycznych, których wartość zmienia się od wartości maksymalnej występującej na powierzchni zewnętrznej, w połowie wysokości dłuższego boku przekroju, do zera na głębokości t_d .



Rys. 4. Belka żelbetowa poddana działaniu momentu skręcającego (model kratownicy): a) widok ogólny; element strefy strumienia ścinania we współrzędnych l - t (b), współrzędnych 1 - 2 (c).
Fig. 4. Truss model for reinforced concrete torsional member: a) general view; shear flow zone element in l - t coordinate (b), 1 - 2 coordinate (c).

Dzieląc strumień ścinania przez grubość strefy strumienia ścinania t_d (grubość ścianki zastępczego przekroju cienkościennego):

$$\tau_T = \frac{q}{t_d} = \frac{T}{2A_k t_d} \quad (26)$$

uzyskuje się średnie naprężenia styczne, spowodowane przez T , równomiernie rozłożone na całej grubości ścianki t_d .

Element niewielkich rozmiarów wydzielony ze strefy strumienia ścinania, przedstawiony na rys. 4 w układach współrzędnych l - t i 1 - 2 , poddany jest działaniu naprężeń stycznych τ_T w dwuosiowym stanie naprężenia. Ponieważ taki element spełnia wymagania teorii MCFT, można przy pomocy tego modelu analizować żelbetowe elementy skręcane. Równania przedstawione w p. 2.1, pozostają w mocy również w przypadku skręcania, z wyjątkiem tego, że stopnie zbrojenia ρ_l i ρ_t , w rów. (1) i (2), powinny być obliczone w odniesieniu do pola powierzchni strefy strumienia ścinania. Stopień zbrojenia poprzecznego można obliczyć wg wzoru:

$$\rho_t = \frac{a_{sw}}{s \cdot t_d} \quad (27)$$

gdzie a_{sw} jest polem przekroju jednej gałęzi strzemia, s jest rozstawem strzemi.

W przypadku czystego skręcania, jak również „czystego” ścinania ($M = 0$), działające na element naprężenia normalne σ_l i σ_t są równe zero, czyli $\sigma_l = \sigma_t = 0$.

Aby opisać stan elementu skręcanego, oprócz wymienionych powyżej równań, niezbędne jest wprowadzenie dodatkowych równań równowagi, nierozdzielności oraz prawa konstytutywnego betonu ściskanego w krzyżulcach.

Warunek równowagi momentów w przekroju poprzecznym elementu skręcanego można wyrazić przy pomocy zależności *Bredta* (26).

Wskutek skręcania belki, w każdym pojedynczym elemencie strefy strumienia ścinania wywołane jest odkształcenie poprzeczne. Warunek nierozdzielności ustalający związek odkształcenia poprzecznego γ elementu ścianki zastępczego przekroju cienkościennego z kątem obrotu belki ψ , wyprowadzony przez *Bredta*, ma następującą postać:

$$\psi = \gamma \frac{u_k}{2A_k} \quad (28)$$

gdzie u_k oznacza obwód linii środkowej strefy strumienia ścinania.

Powierzchnie zewnętrzne skręcanych belek, wskutek obrotu elementu, ulegają spaczeniu (wygięciu wklęsłemu). Drugi, dodatkowy warunek nierozdzielności odkształceń, wyprowadzony przez *Lamperta* i *Thürlimanna* [10], ustala związek między krzywizną betonowych krzyżulców ϕ_{dp} , a kątem obrotu elementu ψ :

$$\phi_{dp} = \psi \sin(2\theta) \quad (29)$$

Betonowe krzyżulce w elemencie skręcanym poddane są działaniu nie tylko osiowego ściskania, ale również zginania, spowodowanego spaczeniem zewnętrznych powierzchni. Wskutek złożonego stanu naprężenia, w krzyżulcu występuje zmienny rozkład odkształceń głównych ε_2 , które przyjmują największą wartość na powierzchni zewnętrznej ε_{2max} , a ich wartość zmniejsza się w kierunku do wnętrza belki. Przyjmuje się, a potwierdziły to wyniki badań *Mitchella* i *Collinsa* [4], że w krzyżulcu o grubości t_d rozkład odkształceń ε_2 jest liniowy, co przedstawiono na rys. 5a. Można więc ustalić zależność między krzywizną krzyżulca ϕ_{dp} , maksymalnym odkształceniem ściskanego betonu ε_{2max} oraz grubością strefy strumienia ścinania (grubością krzyżulca) t_d :

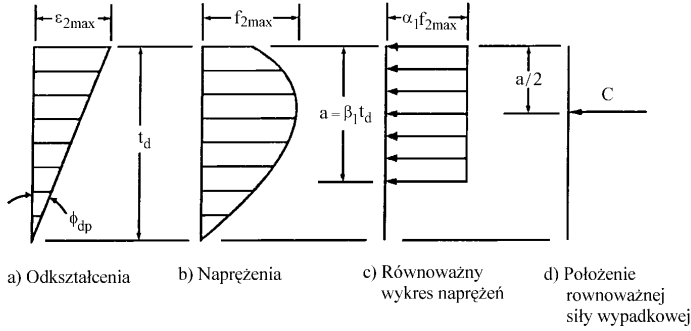
$$\varepsilon_{2max} = \phi_{dp} t \quad (30)$$

Na rys. 5b przedstawiono rozkład naprężeń ściskających w betonowym krzyżulcu skręcanej belki, pod obciążeniem bliskim nośności belki, który odpowiada liniowemu rozkładowi odkształceń. Krzywa reprezentująca rozkład naprężeń ściskających jest identyczna z krzywą σ - ε betonu zmiękczzonego, opisaną równ. (19). W celu ułatwienia analizy, paraboliczny wykres naprężeń ściskających zastępuje się równoważnym, prostokątnym wykresem naprężeń, przedstawionym na rys. 5c. Równoważny wykres naprężeń jest statycznie zdefiniowany za pomocą dwóch parametrów: wysokości a , którą wyznacza się ze wzoru:

$$a = \beta_1 t_d \quad (31)$$

oraz średnich naprężeń ściskających, których wartość oblicza się według zależności:

$$\sigma_{c2} = \alpha_1 f_{2max} = \alpha_1 \zeta f_{cm} \quad (32)$$



Rys. 5. Rozkład naprężeń i odkształceń w betonowym krzyżulcu ściskanym elemencie skręcanego [4].

Fig. 5. Strain and stress distributions in concrete compression strut of a element subjected to torsion [4].

Należy szczególnie podkreślić, że równ. (19), wyrażające zależność σ - ε betonu w krzyżulcach poddanych działaniu osiowego ściskania, nie jest możliwe do zastosowania w przypadku elementów skręcanych, ponieważ w takich elementach betonowe krzyżulce poddane są jednoczesnemu działaniu osiowego ściskania i zginania. Tak więc, równ. (32) jest nowym prawem konstytutywnym, ustalającym zależność między średnimi odkształceniami ε_2 a średnimi naprężeniami σ_{c2} w betonowych krzyżulcach elementów skręcanych.

Występujące w równ. (31) i (32) zmienne α_1 i β_1 , które są funkcją odkształceń ε_2 , nazywane są współczynnikami równoważnego wykresu naprężeń. Współczynniki α_1 i β_1 wyznacza się w taki sposób, aby wartości i położenie wypadkowych wykresów naprężeń przedstawionych na rys. 5b i 5c były identyczne.

Współczynnik α_1 , który wyraża wartość stosunku naprężeń średnich do naprężeń maksymalnych w betonowych krzyżulcach ściskanych, wyznacza się z równowagi sił wypadkowych:

$$C = \alpha_1 f_{2\max} a = \frac{t_d}{\varepsilon_{2\max}} \int_0^{\varepsilon_{2\max}} \sigma_{c2}(\varepsilon_2) d\varepsilon_2 \quad (33)$$

Współczynnik β_1 , określający wysokość równoważnego wykresu naprężeń (grubość równoważnego pola ściskanego w betonowym krzyżulcu), wyznacza się z warunku równowagi momentów względem osi obojętnej, która zlokalizowana jest w odległości t_d od powierzchni zewnętrznej:

$$C(1 - 0.5\beta_1)t_d = \frac{t_d^2}{\varepsilon_{2\max}} \int_0^{\varepsilon_{2\max}} \sigma_{c2}(\varepsilon_2)\varepsilon_2 d\varepsilon_2 \quad (34)$$

Po odpowiednich przekształceniach, uzyskuje się wzory do obliczania współczynników β_1 i α_1 :

$$\beta_1 = 0.5 \frac{\frac{\varepsilon_{2\max}}{\varepsilon_0} - 4}{\frac{\varepsilon_{2\max}}{\varepsilon_0} - 3} \quad (35)$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\beta_1} \left[\left(\frac{\varepsilon_{2\max}}{\varepsilon_0} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{\varepsilon_{2\max}}{\varepsilon_0} \right)^2 \right] \quad (36)$$

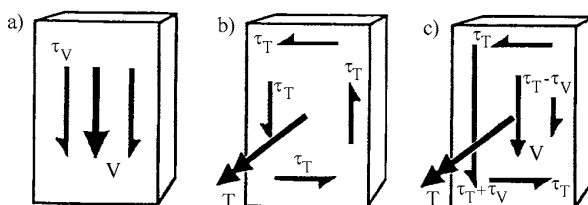
Analizę żelbetowych elementów skręcanych, przy wykorzystaniu teorii MCFT, prowadzi się więc przy założeniu, że betonowe krzyżulce posiadają równoważną grubość $a = \beta_1 t_d$ (równoważna grubość strefy strumienia ścinania). Wypadkowa naprężeń ściskających jest więc zlokalizowana w odległości $(a/2)$ od zewnętrznej powierzchni betonu, a jej położenie jest zgodne z położeniem linii środkowej równoważnej strefy strumienia ścinania. Przyjmuje się, że odkształcenia w płaszczyźnie działania wypadkowej naprężeń ściskających mają wartość średnią i mogą być używane do konstruowania koła odkształceń *Mohra*. Przy tym założeniu, średnią wartość głównych odkształceń w ściskanym betonie ε_2 , można obliczyć wg wzoru:

$$\varepsilon_2 = (1 - 0.5\beta_1)\varepsilon_{2\max} \quad (37)$$

Konsekwencją przyjęcia w analizie równoważnej grubości strefy strumienia ścinania są modyfikacje niektórych równań wykorzystywanych w teorii MCFT, polegające przede wszystkim na zastąpieniu zmiennej t_d przez zmienną a .

3. Model teoretyczny Rahala i Collinsa odwzorowujący stan odkształcenia elementu żelbetowego poddanego jednoczesnemu działaniu momentu skręcającego i siły poprzecznej

Istotnym z punktu widzenia stanów granicznych nośności i stanów granicznych użyteczności jest fakt, że przy skręcaniu ze ścinaniem występuje zróżnicowany rozkład naprężeń stycznych w przekroju poprzecznym, co zilustrowano na rys. 6.



Rys. 6. Rozkład naprężeń stycznych w zewnętrznej części przekroju poprzecznego spowodowanych: a) siłą poprzeczną V , b) momentem skręcającym T , c) jednoczesnym działaniem $(T+V)$.

Fig. 6. Shearing stresses distribution near the periphery of a section subjected to: a) shear V , b) torsion T , c) combined torsion and shear $(T+V)$.

Przyjmuje się, że w elementach o przekroju pełnym naprężenia styczne spowodowane siłą poprzeczną τ_v są równomiernie rozłożone w całym przekroju, a kierunek ich działania jest zgodny z kierunkiem działania siły V . Naprężenia styczne τ_T spowodowane momentem skręcającym, o „obwodowym” kierunku działania, występują jedynie w zewnętrznej części przekroju (w ściankach zastępczego przekroju cienkościennego o grubości t_d). Naprężenia styczne τ_T i τ_v będą się więc odejmowały na jednym boku belki (przypadek $T-V$), równoległym do płaszczyzny działania momentu zginającego, a na drugim sumowały (przypadek $T+V$).

W konsekwencji bok przekroju, na którym następuje sumowanie naprężeń stycznych będzie obszarem „krytycznym” ze względu na stan graniczny nośności i stan graniczny szerokości rys. Ponieważ naprężenia styczne τ_v przenoszone są przez cały przekrój poprzeczny, natomiast τ_T jedynie przez „obwodową” część przekroju, w ścianie „krytycznej” nie będzie obowiązywała zasada superpozycji przy sumowaniu naprężeń stycznych. Mówiąc inaczej, przyjęcie liniowej interakcji pomiędzy T i V przy projektowaniu elementów jednocześnie skręcanych i ścinanych jest założeniem zbyt zachowawczym.

Metoda analizy elementu jednocześnie skręcanego i ścinanego powinna uwzględniać rzeczywisty rozkład naprężeń stycznych w przekroju poprzecznym oraz przestrzenną pracę elementu.

Jedynym dostępnym w literaturze modelem teoretycznym, na podstawie którego można szczegółowo analizować zachowanie elementów żelbetowych poddanych jednoczesnemu działaniu skręcania i ścinania jest model *Rahala* i *Collinsa* [13]. Został on opracowany na podstawie teorii MCFT. Poprzez wprowadzenie warunku nierozdzielności krzywizn rozszerzono zakres stosowania modelu na elementy jednocześnie skręcane i ścinane.

Jeżeli element żelbetowy o przekroju pełnym jest poddany działaniu skręcania, to jego przekrój, w analizie, można zastąpić przekrojem cienkościennym. Przy czystym skręcaniu poszczególne ścianki przekroju cienkościennego: lewa, górna, prawa i dolna, które zostaną oznaczone, odpowiednio: L , G , P i D , mają jednakową grubość, ponieważ wartość średnich naprężeń stycznych wywołanych skręcaniem τ_T jest we wszystkich ściankach identyczna. Przy jednoczesnym skręcaniu i ścinaniu, naprężenia styczne od skręcania τ_T i siły poprzecznej τ_v będą się w jednej ze ścianek, np. prawej, sumowały ($\tau_T + \tau_v$), w lewej odejmowały ($\tau_T - \tau_v$), a w górnej i dolnej będą działały jedynie naprężenia τ_T , (por. rys. 6). Stan odkształcenia (naprężenia) w poszczególnych ściankach będzie więc zróżnicowany. W rezultacie, aby określić stan odkształcenia w konkretnej ściance, należy w analizie uwzględnić przestrzenną pracę elementu, która zależy od stanu odkształcenia poszczególnych ścianek. W tym celu, *Rahal* i *Collins* wprowadzają warunek nierozdzielności krzywizn, który uwzględni wzajemną zależność pomiędzy odkształceniami ścianek.

Model *Rahala* i *Collinsa* daje możliwość analizy przekrojów żelbetowych poddanych jednoczesnemu działaniu: momentu skręcającego T , siły osiowej N , siły poprzecznej pionowej V_y , siły poprzecznej poziomej V_z , zginania w płaszczyźnie pionowej M_y i zginania w płaszczyźnie poziomej M_z (por. rys. 7a). W artykule, przy opisie modelu, bardziej szczegółowo zostanie zaprezentowany przypadek, gdy w przekroju poprzecznym występują jedynie moment skręcający T i siła poprzeczna V działająca w kierunku pionowym.

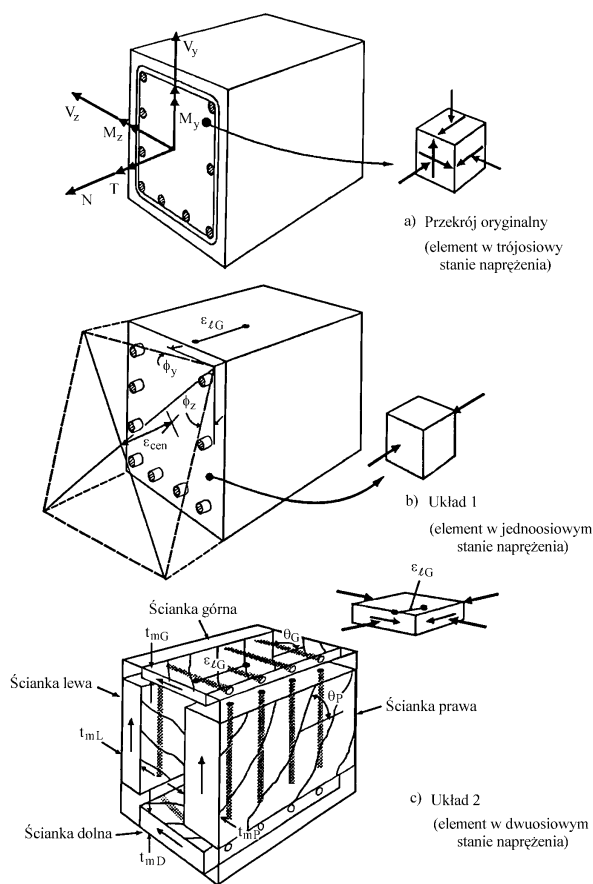
3.1. Podstawowe założenia modelu

Na rys. 7a przedstawiono element żelbetowy o przekroju prostokątnym znajdujący się, wskutek działania obciążeń zewnętrznych, w złożonym stanie naprężenia, oraz fragment, niewielkich rozmiarów, wyizolowany z przekroju poprzecznego tego elementu, który znajduje się w trójosiowym stanie naprężenia. Określenie tego złożonego stanu naprężenia, na podstawie aktualnej wiedzy o zarysowanych elementach żelbetowych, byłoby niezwykle skomplikowane. W celu uproszczenia analizy dokonuje się idealizacji przekroju w taki sposób, aby niezależnie rozważać części

składowe znajdujące się w jedno- i dwuosiowym stanie naprężenia, przy jednoczesnym zachowaniu wzajemnych zależności pomiędzy tymi dwoma układami.

Na rys. 7b przedstawiono wyidealizowany przekrój poprzeczny, zbrojony prętami podłużnymi, który przenosi część obciążeń (N , M_z , M_y oraz naprężenia normalne spowodowane przez V_y , V_z i T) za pośrednictwem naprężeń normalnych. Na rys. 7b przedstawiono również, za pomocą linii przerywanej, stan przekroju po odkształceniu, z którego wynika, że w całym przekroju przyjęto liniową zmienność odkształceń w kierunku podłużnym tzn.: przekroje płaskie pozostają płaskie, a naprężenia normalne związane są z odkształceniami poprzez zwykłe, jednoosiowe zależności σ - ϵ , zarówno w odniesieniu do betonu jak i stali. W dalszej części pracy, wyidealizowany przekrój przedstawiony na rys. 7b będzie określany jako „układ 1”.

Na rys. 7c przedstawiono wyidealizowany przekrój znajdujący się w dwuosiowym stanie naprężenia, który przenosi siły poprzeczne V_z , V_y i moment skracający T . Przekrój składa się z czterech poprzecznie zbrojonych ścianek, o różnych grubościach t_m , i różnym kącie nachylenia θ kierunku głównych naprężeń w ściskany beton. W artykule, ten wyidealizowany przekrój będzie określany jako „układ 2”.



Rys. 7. Sposób idealizacji przekroju żelbetowego wg modelu *Rahal* i *Collins* [13].
Fig. 7. Idealization of reinforced concrete section in the model of *Rahal* and *Collins* [13].

Pomiędzy tymi dwoma wyidealizowanymi układami występują wzajemne zależności. Po pierwsze, naprężenia styczne występujące w ściankach układu 2 powodują powstawanie sił podłużnych oraz momentów zginających, jeżeli wartości sił podłużnych w przeciwległych ściankach są różne. Układ 1 będzie, wobec tego, poddany działaniu obciążeń zewnętrznych (N , M_z , M_y) oraz obciążeń spowodowanych naprężeniami stycznymi. Należy więc wyznaczyć odpowiednie siły podłużne z układu 2 i zastosować je w układzie 1. Po drugie, każda ścianka układu 2 podlega działaniu naprężeń stycznych (od V_z , V_y i T) oraz, dodatkowo, odkształcenia w kierunku podłużnym ε_i . Odkształcenie ε_i wyznacza się z układu 1 i stosuje w układzie 2. Przyjęto, że ε_i jest odkształceniem w kierunku podłużnym środka ciężkości ścianki (równoległym do osi podłużnej belki).

W związku z powyższymi założeniami, do określenia stanu naprężenia i odkształcenia w każdej ściance można wykorzystać równania teorii MCFT.

Aby uzyskać spodziewane rozwiązanie, przy pomocy omawianego modelu teoretycznego, muszą być spełnione następujące wymagania:

1) w odniesieniu do całego przekroju poprzecznego: równowaga naprężeń stycznych (układ 2) i normalnych (układ 1) oraz nierozdzielność odkształceń w kierunku podłużnym (układ 1);

2) w każdej ściance: prawa konstytutywne betonu i stali (MCFT) (układ 1 i 2), warunki nierozdzielności średnich odkształceń (MCFT) (układ 2), warunki równowagi średnich naprężeń (MCFT) (układ 2) oraz nierozdzielność krzywizn (układ 2).

Z warunku równowagi naprężeń stycznych wynika wzajemna zależność pomiędzy ściankami układu 2. Wypadkowe naprężeń stycznych w ściankach muszą być w równowadze z obciążeniami zewnętrznymi (V , T).

Przyjęto założenie, że siła poprzeczna V (pionowa) przenoszona jest wyłącznie przez ścianki pionowe. Wartość średnich, równomiernie rozłożonych naprężeń stycznych wywołanych siłą V :

$$\tau_V = \frac{V}{b_z} \quad (38)$$

Z przyjętego założenia wynika, że grubość pojedynczej ścianki (krzyżulca) przenoszącej naprężenia styczne τ_V , jest równa połowie szerokości całego przekroju poprzecznego $t_V = 0.5b$.

Moment skręcający T wywołuje naprężenia styczne we wszystkich ściankach. Rozkład tych naprężeń jest liniowy na grubości ścianki (por. rys. 8.a). Przy czystym skręcaniu średnia wartość równomiernie rozłożonych naprężeń stycznych τ_T jest stała we wszystkich ściankach [por. rów. (26)], które mają identyczną grubość t_d , co zostało opisane w p.2.2. Ponieważ w analizie elementów skręcanych, wg teorii MCFT, grubość ścianki zastępuje się równoważną grubością krzyżulca $a = \beta_1 t_d$ (por. rys. 5), rów. (26) przyjmie postać:

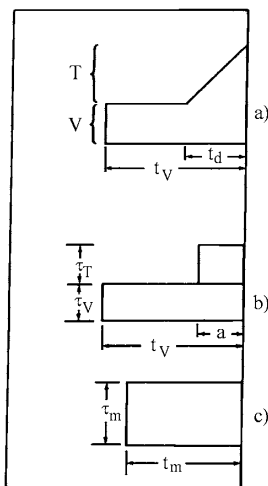
$$\tau_{T_i} = \frac{q_T}{a_i} = \frac{T}{2A_k a_i} \quad (39)$$

gdzie indeks i zastępuje się odpowiednim indeksem: L , G , P lub D . Równanie (39) jest ogólną postacią rów. (26) i można je stosować w przypadku, gdy grubości ścianek

są różne. Przy różnych grubościach ścianek pole A_k , zawarte wewnątrz linii środkowej strefy strumienia ścinania:

$$A_k = \left(b - \frac{a_L}{2} - \frac{a_P}{2} \right) \left(h - \frac{a_G}{2} - \frac{a_D}{2} \right) \quad (40)$$

Przy jednoczesnym działaniu momentu skręcającego i pionowej siły poprzecznej naprężenia styczne τ_T i τ_V będą się w jednej ze ścianek pionowych odejmowały, a w drugiej (krytycznej) dodawały. W rezultacie rozkład naprężeń stycznych w obu ściankach będzie nierównomierny.



Rys. 8. Rozkład naprężeń stycznych w ścianie krytycznej ($\tau_T + \tau_V$) elementu jednocześnie skręcanego i ścinanego [13]: a) naprężenia rzeczywiste, b) naprężenia średnie spowodowane działaniem T i V , c) naprężenia średnie spowodowane jednoczesnym działaniem T i V .

Fig. 8. Shearing stresses distribution in the critical wall ($\tau_T + \tau_V$) of element subjected to combined torsion and shear [13]: a) original system of stresses, b) average stresses due to V and T , c) average stress due to combined T and V .

Na rys. 8a przedstawiono rozkład naprężeń stycznych, wywołanych przez T i V , w krytycznej ścianie przekroju ($\tau_T + \tau_V$). Równomiernie rozłożone naprężenia τ_V , wg rów. (38), występują na grubości t_V . Rozkład naprężeń stycznych wywołanych przez T jest zmienny na grubości t_d . Zastępując go równoważnym rozkładem średnich, równomiernie rozłożonych na grubości a , naprężeń stycznych τ_T , wg rów. (39), uzyskuje się rozkład naprężeń stycznych w ścianie krytycznej jak na rys. 8b.

Zakres stosowania teorii MCFT ograniczony jest do elementów poddanych działaniu równomiernie rozłożonych naprężeń. Teorię można stosować w przypadku elementów skręcanych lub ścinanych, w których betonowe krzyżulce podlegają działaniu równomiernie rozłożonych, średnich naprężeń stycznych, odpowiednio: τ_T na grubości a i τ_V na grubości $t_V = 0.5b$. W przypadku jednoczesnego skręcania i ścinania rozkład naprężeń stycznych jest jednak nierównomierny, jak wynika z rys. 8b. Aby można było zastosować równania teorii MCFT, wyznacza się wartość średnich naprężeń stycznych τ_m , które działają na odpowiedniej grubości t_m , co przedstawiono na rys. 8c. Wartości zmiennych τ_m i t_m , charakteryzujących rozkład średnich naprężeń stycznych w ścianie i spowodowanych jednoczesnym działaniem

T i V , oblicza się w taki sposób, aby wartość i położenie wypadkowych rozkładów naprężeń przedstawionych na rys. 8b i 8c były identyczne. Znając wartość średnich naprężeń stycznych τ_m w ściance oraz wartość odkształceń w kierunku podłużnym ε_l środka ciężkości ścianki, można za pomocą teorii MCFT ustalić stan odkształcenia (naprężenia) ścianki.

Na rys. 7b przedstawiono (linią przerywaną) ogólny stan odkształcenia przekroju w kierunku podłużnym. Przekrój może się obracać dookoła osi poziomej (z) oraz pionowej (y). Do opisanego stanu odkształcenia w kierunku podłużnym, a w konsekwencji stanu naprężeń normalnych w przekroju poprzecznym, niezbędne są trzy niezależne zmienne. Na rys. 7b przedstawiono zmienne, które zostały wybrane w prezentowanym modelu teoretycznym, wraz z konwencją ustalania znaków tych zmiennych. Zmiennymi są: ε_{cen} – odkształcenie w kierunku podłużnym środka ciężkości przekroju; dodatnie przy rozciąganiu, ϕ_z – obrót dookoła osi z ; dodatni jeżeli skutkiem jest ściskanie górnych włókien przekroju, ϕ_y – obrót dookoła osi y ; dodatni jeżeli skutkiem jest ściskanie prawych włókien przekroju.

Przy danej kombinacji odkształceń: ε_{cen} , ϕ_z , ϕ_y , odkształcenie podłużne dowolnego punktu przekroju o współrzędnych (z, y) można wyznaczyć z warunku nierozdzielności odkształceń podłużnych, opisanego równaniem:

$$\varepsilon_l = \varepsilon_{cen} - y\phi_z + z\phi_y \quad (41)$$

W modelu przyjmuje się doskonałą przyczepność pomiędzy betonem i stalą (założenie 6, w p. 2.1). W związku z tym, rów. (41) można wykorzystać do obliczenia odkształceń zarówno w betonie jak i w prętach zbrojeniowych, w dowolnym punkcie przekroju poprzecznego.

Naprężenia normalne w przekroju poprzecznym (układ 1) muszą być w równowadze z zewnętrznymi obciążeniami (N , M_y , M_z). Warunki równowagi muszą również uwzględniać występowanie naprężeń normalnych, które powstają w ściankach (układ 2), wskutek działania naprężeń stycznych τ_{mi} . Naprężenia w betonie i zbrojeniu podłużnym, wyznaczone na podstawie rozkładu odkształceń ε_l w całym przekroju [wg rów. (41)] i przy wykorzystaniu praw konstytutywnych betonu (zależności niezmiękczone) i stali, po scałkowaniu względem odpowiednich powierzchni, należy zsumować z siłami przekrojowymi. W rezultacie otrzymuje się następujące równania równowagi układu 1 we współrzędnych z - y :

$$\int_{A_c} \sigma_{cl} dA_c + \int_{A_s} \sigma_{sl} dA_s = N + \sum_{i=1}^4 N_{vi} \quad (42)$$

$$\int_{A_c} \sigma_{cl} y dA_c + \int_{A_s} \sigma_{sl} y dA_s = -M_z - \sum_{i=1}^4 (N_{vi} y_i) \quad (43)$$

$$\int_{A_c} \sigma_{cl} z dA_c + \int_{A_s} \sigma_{sl} z dA_s = M_y + \sum_{i=1}^4 (N_{vi} z_i) \quad (44)$$

gdzie z_i oraz y_i są, odpowiednio, współrzędnymi z i y środka ciężkości ścianki i . Z prawych stron powyższych równań występuje całkowite obciążenie równoważne, które jest sumą obciążeń zewnętrznych i obciążeń będących wynikiem działania

naprężeń stycznych τ_{mi} . N_{vi} jest siłą podłużną spowodowaną działaniem naprężeń stycznych τ_{mi} w ścianie i , którą wyznacza się ze wzoru [por. rów. (8)]:

$$N_{vi} = \left(\frac{\tau_{mi}}{\tan \theta_i} - \sigma_{cli} \right) \times (\text{pole powierzchni ścianki „i”}) \quad (45)$$

Wszystkie ścianki przekroju (układ 2), które znajdują się w dwuosiowym stanie naprężenia (τ_{mi}) i dodatkowo podlegają działaniu odkształcenia podłużnego ε_b , spełniają założenia teorii MCFT. Wobec tego równania teorii MCFT mogą być wykorzystane w prezentowanym modelu, w celu określenia stanu odkształcenia (naprężenia) poszczególnych ścianek. Dodatkowo, *Rahal* i *Collins* [13] wprowadzają warunek nierozdzielności krzywizn.

W każdej ścianie występuje wzajemna zależność pomiędzy skręceniem przekroju ψ , krzywizną podłużną ϕ_l (w płaszczyźnie poziomej), krzywizną poprzeczną ϕ_t (w płaszczyźnie pionowej) oraz krzywizną maksymalną ϕ_{dp} (wzdłuż osi krzyżulca). Zależność tą, która stanowi warunek nierozdzielności krzywizn, można przedstawić za pomocą równania:

$$\phi_{dp} = \phi_t \sin^2 \theta + \phi_l \cos^2 \theta + \psi \sin(2\theta) \quad (46)$$

Krzywizna danej ścianki ma znak dodatni, zgodny ze znakiem ψ , jeżeli wartość odpowiedniego odkształcenia w tej ścianie jest mniejsza od odpowiedniego odkształcenia w ścianie do niej równoległej. Ponieważ wartości odkształceń w ścianie zależą od wartości naprężeń stycznych, odkształcenia w ścianie krytycznej, w której ($\tau_T + \tau_V$) (przyjmijmy, że jest to prawa ścianka), będą miały zawsze większe wartości od odpowiednich odkształceń w ścianie do niej równoległej ($\tau_T - \tau_V$). Wobec tego, krzywizny prawej ścianki (krytycznej) muszą mieć znak ujemny i należy je wyznaczać w następujący sposób:

$$\phi_{lP} = \frac{\varepsilon_{iL}^s - \varepsilon_{iP}^s}{b} \quad (47)$$

$$\phi_{tP} = \frac{\varepsilon_{iL} - \varepsilon_{iP}}{b_s} \quad (48)$$

natomiast krzywizny lewej ścianki będą równe: $\phi_{lL} = -\phi_{lP}$ i $\phi_{tL} = -\phi_{tP}$. W rów. (47) i (48) ε_{ii} oznacza średnie odkształcenie w betonie w kierunku poprzecznym (równe odkształceniu w zbrojeniu poprzecznym), b_s jest odległością między pionowymi gałęziami strzemienia, natomiast ε_{li}^s oznacza średnie odkształcenie podłużne w punkcie leżącym na skrajnym włóknie przekroju, na wysokości środka ciężkości przekroju. Warto zauważyć, że w elementach poddanych czystemu skręcaniu $\phi_{li} = \phi_{ti} = 0$, a rów. (46) przyjmuje postać wyrażoną rów. (29).

W modelu teoretycznym *Rahala* i *Collinsa*, rów. (46) wykorzystuje się do obliczenia wartości zmiennej ϕ_{dp} . Znając wartość odkształcenia na zewnętrznej, ściskanej powierzchni betonu ε_{2max} , oblicza się grubość krzyżulca t_d , przenoszącego skręcanie, według zależności, która wynika z rów. (30):

$$\phi_{dp} = \frac{\varepsilon_{2max}}{t_d} \quad (49)$$

Należy zwrócić uwagę, że w przypadku ścianki krytycznej ($\tau_T + \tau_V$), przy obliczaniu t_d nie można bezpośrednio skorzystać z równ. (49), ponieważ odkształcenie ε_{2max} spowodowane jest jednoczesnym działaniem T i V ($\varepsilon_{2max} = \varepsilon_{2maxT} + \varepsilon_{2maxV}$). W tym przypadku równ. (49) przyjmuje postać:

$$t_d = \frac{\varepsilon_{2maxT}}{\phi_{dp}} \quad (50)$$

3.2. Odkształcenie betonu ściskanego na zewnętrznej powierzchni krzyżulca (ε_{2max}), w ścianie krytycznej ($\tau_T + \tau_V$)

Stan odkształcenia (naprężenia) w ścianie krytycznej określa się, wykorzystując równania teorii MCFT, przy założeniu, że jest ona poddana działaniu średnich naprężeń stycznych τ_m ($T+V$), równomiernie rozłożonych na grubości t_m (por. rys. 8 oraz rys. 9.a). W wyniku przeprowadzonej procedury obliczeniowej uzyskuje się średnie wartości naprężeń i odkształceń w ścianie krytycznej, która podlega jednoczesnemu działaniu skręcania i ścinania ($T+V$), m.in.: σ_{c2m} , f_{2maxm} , σ_{c1m} , ε_{2m} , θ_m . Indeks m oznacza, że odkształcenie lub naprężenie zostało spowodowane działaniem siły poprzecznej, równoważnej początkowemu układowi naprężeń stycznych ($T+V$). Na podstawie przeprowadzonej analizy nie można, wobec tego określić, w jaki sposób zmienia się wartość ε_2 na grubości ścianki. W konsekwencji, nie można ustalić wartości odkształcenia na zewnętrznej powierzchni ściskanego betonu ε_{2max} . Odkształcenie ε_{2max} jest bardzo ważne w analizie elementów skręcanych. Jest wskaźnikiem zmiażdżenia betonu (przyjmuje się, że zmiażdżenie betonu występuje, gdy $\varepsilon_{2max} = 1.5\varepsilon_0$), a ponadto stanowi podstawę obliczenia grubości ścianki t_d przenoszącej skręcanie, wg równ. (50), a w konsekwencji również A_k , wg równ. (40), oraz skręcania przekroju ψ .

W celu określenia wartości ε_{2max} należy przeprowadzić dodatkową analizę obliczeniową, która oparta jest na założeniu, że główne odkształcenia w betonie ściskanym ε_{2T} , spowodowane skręcaniem, zmieniają się liniowo na grubości t_d . Ilustracja graficzna tej analizy została przedstawiona na rys. 9.

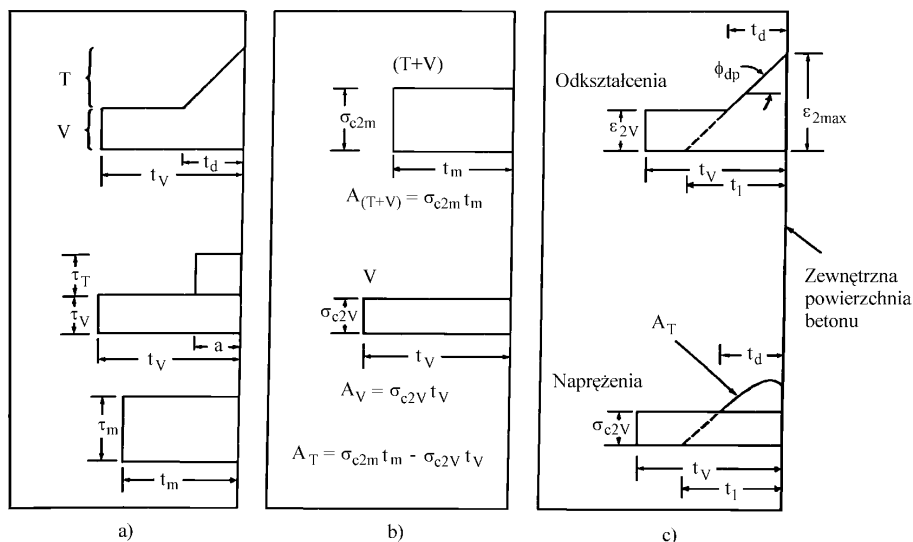
Główne naprężenia ściskające w ścianie krytycznej σ_{c2m} , obliczone na podstawie τ_m i t_m , spowodowane są jednoczesnym działaniem T i V . Wartość wypadkowej wykresu naprężeń σ_{c2m} musi być równa sumie wartości wypadkowych rzeczywistych wykresów naprężeń ściskających spowodowanych przez T (σ_{c2T}) i V (σ_{c2V}). Udział skręcania w głównych naprężeniach ściskających będzie więc równy:

$$A_T = \sigma_{c2m} t_m - \sigma_{c2V} t_V \quad (51)$$

gdzie $\sigma_{c2V} t_V$ jest udziałem siły poprzecznej, co przedstawiono na rys. 9b i 9c. Wartość σ_{c2V} oblicza się, zgodnie z równ. (7), w następujący sposób:

$$\sigma_{c2V} = \tau_V \left(\tan \theta_m + \frac{1}{\tan \theta_m} \right) - \sigma_{c1m} \quad (52)$$

Znając wartość σ_{c2V} można obliczyć główne odkształcenie w betonie ściskanym spowodowane siłą poprzeczną ε_{2V} , z równ. (21). Ponieważ siła poprzeczna powoduje równomierny rozkład odkształceń na grubości krzyżulca t_V , wobec tego, $\varepsilon_{2V} = \varepsilon_{2maxV}$.



Rys. 9. Sposób wyznaczenia ϵ_{2max} w ścianie krytycznej belki jednocześnie skręcaanej i ścinanej wg modelu *Rahala i Collinsa* [13]: a) sposób wyznaczenia równoważnych, średnich naprężeń stycznych τ_m , b) określenie udziału T w głównych naprężeniach ściskających, c) wyznaczenie ϵ_{2max} (lub ϵ_{2maxT}).

Fig. 9. Method for calculating ϵ_{2max} in the critical wall of the beam subjected to combined torsion and shear in the model of *Rahal and Collins* [13]: a) computing equivalent average shear stress τ_m , b) calculating contribution of T to the principal compressive stresses, c) computing ϵ_{2max} (or ϵ_{2maxT}).

Znając wartość A_T oblicza się ϵ_{2maxT} w taki sposób, aby spełnione było założenie o liniowej zmienności odkształcenia ϵ_{2T} na grubości t_d , por. rys. 9c. Liniowa zmienność ϵ_{2T} implikuje paraboliczny wykres naprężeń σ_{c2T} na grubości t_d , wobec tego ϵ_{2maxT} należy wyznaczyć na podstawie równania [por. rów. (33)]:

$$A_T = \int_0^{t_d} f(x) dx = \frac{t_d}{\epsilon_{2maxT}} \int_0^{\epsilon_{2maxT}} \sigma_{c2T}(\epsilon_{2T}) d\epsilon_{2T} \quad (53)$$

Wartość odkształcenia na zewnętrznej powierzchni betonu ściskanego, spowodowanego jednoczesnym działaniem T i V , będzie więc równa:

$$\epsilon_{2max} = \epsilon_{2maxT} + \epsilon_{2maxV} \quad (54)$$

Wartość odkształcenia ϵ_{2max} można również wyznaczyć w sposób „bezpośredni”, rozważając jednoczesne działanie T i V na grubości t_d . Udział naprężeń ściskających σ_{c2} , działających na grubości t_d i spowodowanych jednoczesnym działaniem T i V , w naprężeniach σ_{c2m} będzie równy, zgodnie z rys. 9c:

$$A_{T+V} = \sigma_{c2m} t_m - \sigma_{c2V} (t_V - t_d) \quad (55)$$

Wartość odkształcenia ϵ_{2max} określa się na podstawie równania:

$$A_{T+V} = \int_{t_1 - t_d}^{t_1} f(x) dx = \frac{t_1}{\epsilon_{2max}} \int_{\epsilon_{2maxV}}^{\epsilon_{2max}} \sigma_{c2}(\epsilon_2) d\epsilon_2 \quad (56)$$

Do wyznaczenie wartości ε_{2maxT} , z rów. (53), oraz ε_{2max} , z rów. (56), konieczne jest zastosowanie metody iteracyjnej. Istotą procedury iteracyjnej jest uzyskanie zbieżności pomiędzy wartością całki, rów. (53) lub (56), i wartością wypadkowej równoważnego (prostokątnego) wykresu naprężeń (por. rys. 5). Należy zwrócić uwagę, że wyznaczając wartość ε_{2max} na podstawie rów. (56), nie można zastosować współczynników równoważnego wykresu naprężeń α_1 i β_1 dla przypadku czystego skręcania, tzn. przy założeniu, że ε_2 zmienia się od zera do ε_{2max} na grubości t_d . W ściance krytycznej elementu jednocześnie skręcanego i ścinanego ($T+V$), wartość głównych odkształceń zmienia się, na grubości t_d , od ε_{2V} do ε_{2max} , por. rys. 9c. Należy więc wyznaczyć nowe wartości współczynników równoważnego bloku naprężeń, reprezentatywne dla przypadku ($T+V$). Wartości współczynników, które dla odróżnienia zostaną oznaczone jako α_2 i β_2 , określa się na podstawie rów. (33) i (34) z tym, że w wyrażeniach występujących po prawej stronie tych równań, należy zmienić odpowiednio granice całek oraz zmienną t_d zastąpić zmienną t_1 . Ostatecznie, po przekształceniach, wartość współczynnika α_2 oblicza się z równania:

$$\alpha_2 = \frac{t_1}{t_d} \frac{1}{\beta_2} \left[\left(\frac{\varepsilon_{2max}}{\varepsilon_0} \right) (1 - m^2) - \frac{1}{3} \left(\frac{\varepsilon_{2max}}{\varepsilon_0} \right)^2 (1 - m^3) \right] \quad (57)$$

gdzie:

$$m = \frac{t_1 - t_d}{t_1} \quad (58)$$

natomiast wartość t_1 wyznacza się wg zależności:

$$t_1 = \frac{\varepsilon_{2max} - t_d}{\varepsilon_{2maxT}} \quad (59)$$

Wartość współczynnika β_2 oblicza się ze wzoru:

$$\beta_2 = 2 \left[1 - \frac{t_1}{t_d} \frac{\frac{2}{3} (1 - m^3) - \frac{1}{4} \left(\frac{\varepsilon_{2max}}{\varepsilon_0} \right) (1 - m^4)}{\left(1 - m^2 \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{\varepsilon_{2max}}{\varepsilon_0} \right) (1 - m^3)} \right] \quad (60)$$

Znając wartość maksymalnego odkształcenia betonu ściskanego ε_{2maxT} , spowodowanego momentem skręcającym, można określić grubość krzyżulca t_d , wg rów. (50), oraz wartości współczynników α_1 i β_1 , wg rów. (35) i (36). W konsekwencji daje to możliwość wyznaczenia wysokości równoważnego wykresu naprężeń a , wg rów. (31), oraz τ_T , wg rów. (39), i A_k , wg rów. (40).

Znając wartość maksymalnego odkształcenia betonu ściskanego ε_{2max} , spowodowanego jednoczesnym działaniem V i T , można wyznaczyć, na podstawie rów. (14), odkształcenia poprzeczne w poszczególnych ściankach:

$$\gamma_i = \frac{2(\varepsilon_{2maxi} + \varepsilon_{li}^s)}{\tan \theta_i} \quad (61)$$

a w rezultacie skrócenie (kąt obrotu) przekroju ψ :

$$\psi = \frac{h(\gamma_P - \gamma_L) + b(\gamma_G - \gamma_D)}{2bh} \quad (62)$$

Odształcenia γ_i w rów. (62), mają znak zgodny ze znakiem strumienia sił stycznych q_{mi} (od $T+V$) w każdej ściance.

3.3. Sposób rozwiązania problemu

Model teoretyczny *Rahala* i *Collinsa* został opracowany w celu określenia stanu odkształcenia skręcanego elementu żelbetowego znajdującego się w złożonym stanie naprężenia. Rozwiązanie można uzyskać jedynie przez zastosowanie metody kolejnych przybliżeń (iteracji). Proces iteracji stosuje się, aż do uzyskania zbieżności (wartości założonych i obliczonych), którą sprawdza się przy pomocy warunków równowagi [rów. (42) - (44)]. Skrócona forma algorytmu obliczeniowego, w ogólnym przypadku obciążenia ($T+V_y+V_z+M_y+M_z+N$), została przedstawiona poniżej.

Dane początkowe: charakterystyka przekroju (wymiary; ilość, rodzaj i rozmieszczenie zbrojenia), parametry wytrzymałościowe betonu i stali, obciążenia zewnętrzne.

- 1) Przyjąć wartości t_d , α_1 , β_1 w poszczególnych ściankach.
- 2) Określić równoważny stan naprężeń stycznych τ_m , t_m ($T+V$) w ściankach.
- 3) Przyjąć wartości ε_l w poszczególnych ściankach.
- 4) Dla danych τ_m , t_m i ε_b , określić stan odkształcenia i naprężenia w ściankach (układ 2; teoria MCFT):
 - 4.1) Przyjąć wartość ε_2 .
 - 4.2) Przyjąć wartość θ .
 - 4.3) Obliczyć: ε_1 , ε_2 , ε_b , ζ , σ_{c1} , σ_{c2} , σ_{cb} , σ_{ct} , σ_{sb} , σ_{st} , θ .
 - 4.4) Sprawdzić wartość θ ; jeżeli obliczona wartość θ jest zgodna z przyjętą wartością θ (z założoną dokładnością), to wartości zmiennych obliczone w p. 4.3 są prawidłowe; w przeciwnym wypadku należy przyjąć nową (skorygowaną) wartość θ .
 - 4.5) Sprawdzić wartość ε_2 ; jeżeli obliczona wartość ε_2 jest zgodna z przyjętą wartością ε_2 (z założoną dokładnością), to wartości zmiennych obliczone w p. 4.3 są prawidłowe; w przeciwnym wypadku należy przyjąć nową (skorygowaną) wartość ε_2 .
- 5) Obliczyć wartości σ_{c2V} i ε_{2V} (od V) w poszczególnych ściankach.
- 6) Obliczyć wartości sił podłużnych N_v , w poszczególnych ściankach, spowodowanych naprężeniami stycznymi τ_m [rów. (45)].
- 7) Określić całkowite obciążenie równoważne działające w układzie 1 [suma obciążeń zewnętrznych N , M_y , M_z i obciążeń będących wynikiem działania sił N_v ; prawe strony rów. (42) - (44)].
- 8) Określić odkształcenia przekroju ε_{cen} , ϕ_y , ϕ_z spowodowane całkowitym obciążeniem równoważnym, czyli ustalić stan odkształcenia przekroju w kierunku podłużnym [rów. (41)].

- 9) Ustalić stan naprężeń normalnych w przekroju poprzecznym, odpowiadający stanowi odkształcenia podłużnego, czyli w konsekwencji wartości sił wewnętrznych N , M_y , M_z [lewe strony równ. (42) – (44)].
- 10) Sprawdzić zbieżność, wykorzystując równania równowagi (42) – (44); jeżeli uzyskano założony poziom zbieżności, to wartości wszystkich, obliczonych zmiennych są prawidłowe; w przeciwnym razie należy przyjąć nowe (skorygowane) wartości ε_t w poszczególnych ściankach (w p. 3) i powtórzyć obliczenia.
- 11) Obliczyć ϕ_t , ϕ_t oraz ϕ_{dp} w poszczególnych ściankach.
- 12) Obliczyć ε_{2max} , ε_{2maxT} , t_d , α_1 , β_1 , γ w poszczególnych ściankach oraz ψ .
- 13) Sprawdzić wartość t_d w poszczególnych ściankach; jeżeli obliczone wartości t_d są zgodne z przyjętymi wartościami t_d (z założoną dokładnością) oznacza to, że stan odkształcenia elementu został określony prawidłowo; w przeciwnym razie należy przyjąć nowe (skorygowane) wartości t_d w p.1) i powtórzyć obliczenia.

Stosując model teoretyczny *Rahala* i *Collinsa* można wyznaczyć stan odkształcenia elementu jednocześnie skręcanego i ścinanego pod obciążeniem eksploatacyjnym (w SGU). Według większości metod, teoretycznych i normowych, podstawą obliczenia szerokości rys jest określenie stanu odkształcenia elementu. W związku z tym wydaje się uzasadnione, podjęcie próby opracowania zależności, służącej do obliczania szerokość rys w elementach jednocześnie skręcanych i ścinanych.

4. Propozycja własna obliczania szerokości rys ukośnych w elementach żelbetowych poddanych jednoczesnemu działaniu T i V

Kierunek rys, które powstają w elemencie żelbetowym, jest zawsze prostopadły do kierunku głównych naprężeń rozciągających σ_{c1} . W belkach jednocześnie skręcanych i ścinanych rysy o maksymalnej szerokości powstają na boku, na którym następuje sumowanie naprężeń stycznych od T i V , co uzasadniono w p. 3. Kąt nachylenia pierwszych rys, które powstają na boku ($T+V$) tego typu belek, pod obciążeniem rysującym, jest więc zgodny z kątem nachylenia kierunku głównych naprężeń ściskających w betonie przed zarysowaniem σ_{c2} , i wynosi 45° . Jeżeli w elemencie skręcanym lub/i ścinanym moc zbrojenia podłużnego jest różna od mocy zbrojenia poprzecznego, co wynika z przyjętej przy projektowaniu wartości $\theta \neq 45^\circ$, to pod obciążeniem większym od obciążenia rysującego kąt nachylenia kierunku naprężeń σ_{c2} jest różny od 45° . Wyniki zarówno analizy teoretycznej [6, 12, 14], jak i badań doświadczalnych [1, 3, 8, 16] wskazują, że kąt nachylenia kierunku naprężeń σ_{c2} może w istotny sposób różnić się od 45° (różnica większa niż $\pm 5^\circ$), dopiero jeżeli obciążenie elementu jest bliskie obciążenia niszczonego, nawet gdy przy projektowaniu przyjęto wartość θ istotnie różną od 45° . Wobec tego, w belce jednocześnie skręcanej i ścinanej, na boku ($T+V$), pod obciążeniem odpowiadającym stanowi użyteczności (eksploatacyjnym) kąt nachylenia kierunku naprężeń σ_{c2} jest równy około 45° . Można więc przyjąć, z zadowalającą dokładnością, że rysy, które powstały zarówno pod obciążeniem rysującym jak i pod większym obciążeniem, lecz nie większym od eksploatacyjnego, będą się rozwierały dokładnie w kierunku zgodnym z kierunkiem głównych naprężeń rozciągających σ_{c1}

spowodowanych obciążeniem eksploatacyjnym (szerokość rys mierzy się w kierunku prostopadłym do brzegów rys). W konsekwencji, odkształcenia w betonie rozciągany ε_t , spowodowane naprężeniami σ_{ct} , można uznać za miarę intensywności ukośnego zarysowania elementu.

Jedynym modelem teoretycznym, na podstawie którego można określić zachowanie elementu jednocześnie skręcanego i ścinanego jest model *Rahala* i *Collinsa*. Daje on możliwość ustalenia pełnej reakcji elementu na działające obciążenia. Stosując ten model można więc określić wartość odkształcenia ε_t w ścianie krytycznej ($T+V$) belki poddanej jednoczesnemu działaniu T i V , pod obciążeniem odpowiadającym stanowi użytkowalności (eksploatacyjnym).

Uwzględniając powyższe uwagi oraz podstawowe założenia modelu *Rahala* i *Collinsa*, na podstawie których definiuje się m.in. średnie odkształcenia w betonie zarysowanym, proponuje się, aby wartość średniej szerokości rysy w elementach poddanych jednoczesnemu działaniu momentu skręcającego i siły poprzecznej obliczać według zależności:

$$w_m = \varepsilon_t s_{rm} \quad (63)$$

gdzie ε_t jest średnim odkształceniem w betonie rozciągany (na kierunku σ_{ct}), którego wartość wyznacza się na podstawie modelu *Rahala* i *Collinsa*, natomiast s_{rm} jest średnim rozstawem rys ukośnych, mierzonym prostopadłe do ich kierunków.

Proponuje się, aby średni rozstaw rys ukośnych wyznaczać na podstawie zależności:

$$s_{rm} = \frac{1}{\frac{\cos \theta}{s_{rmy}} + \frac{\sin \theta}{s_{rmx}}} \quad (64)$$

Równanie (64) jest w zasadzie zgodne z zależnością zalecaną przez normę [20]. Różnica polega na zastąpieniu kąta α przez kąt pochylenia betonowych krzyżulców ściskanych θ . W rów. (64) zmienne s_{rmx} i s_{rmy} oznaczają średnie, ostateczne, rozstawy rys w kierunku, odpowiednio, podłużnym i poprzecznym, a które proponuje się obliczać na podstawie zależności wg [19, 22]:

$$s_{rm} = 50 + 0.25k_1k_2 \frac{\phi}{\rho_r} \quad (65)$$

Wartość ε_t , zgodnie z definicją (założenie 5 w p. 2.1), jest uśrednioną wartością odkształceń w betonie rozciągany, na długości odcinka przecinającego kilka rys, wliczając w to odkształcenia w przekrojach zarysowanych. Wobec tego, w średnim odkształceniu ε_t uwzględnione są również odkształcenia w betonie rozciągany na odcinkach między rysami. Z rów. (63) wynika, że ε_t są utożsamiane ze średnią szerokością rys w_m . Podstawiając wartość ε_t , obliczoną na podstawie modelu *Rahala* i *Collinsa*, bezpośrednio do rów. (63) uzyska się w konsekwencji zawyżoną wartość w_m , pomimo znacznie mniejszej wartości odkształceń w betonie na odcinku między rysami w porównaniu z szerokością rys. Ponadto wartość w_m obliczona z rów. (63) będzie większa od rzeczywistej, średniej szerokości rys (ustalonej na podstawie pomiarów) dlatego, że obliczeniowa wartość ε_t uwzględnia odkształcenia we wszystkich przekrojach zarysowanych, również w tych, w których wystąpiły rysy wtórne.

Ponieważ rysy wtórne nie uwidaczniają się na zewnętrznej powierzchni betonu [5], ich szerokości nie uwzględnia się przy obliczeniowym sprawdzaniu szerokości rys w stanie granicznym użyteczności (i oczywiście nie można ich zmierzyć).

Należy jednak przypomnieć, że w modelu *Rahala* i *Collinsa* wartość ε_1 , w konkretnej ścianie, wyznacza się przy założeniu, że na całej wysokości ścianki działają stałe, co do wartości, średnie naprężenia styczne τ_T [p. 2.1; rów. (39)]. Nie jest to zgodne z rzeczywistym rozkładem naprężeń τ_T , które mają największą wartość w połowie wysokości ścianki. Rzeczywista wartość τ_T w połowie wysokości ścianki krytycznej, czyli w miejscu gdzie w elemencie jednocześnie skręcanym i ścinanym rysy mają największą szerokość, jest więc większa od wartości τ_T przyjmowanej do obliczeń. Jeżeli do rów. (63) podstawią się wartość ε_1 obliczoną na podstawie modelu *Rahala* i *Collinsa*, to w rezultacie uzyskuje się zaniżoną wartość w_m w stosunku do rzeczywistej wartości w_m w połowie wysokości ścianki.

Przyjęto założenie, że czynniki mające wpływ na obliczeniową wartość odkształcenia ε_1 (opisane powyżej), które powodują zawyżenie i zaniżenie obliczeniowej wartości w_m [wg rów. (63)] w stosunku do rzeczywistej wartości średniej szerokości rys w połowie wysokości boków belki, na których występuje przypadek (T+V) lub (T-V), wzajemnie się znoszą. Należy dodać, że prawidłowe oszacowanie wpływu opisanych czynników na obliczeniową wartość ε_1 , a także wpływu zmian wartości ε_1 , wywołanych poszczególnymi czynnikami, na wartość w_m , jest bardzo trudne. Wydaje się, że przyjmując powyższe założenie, w przypadku znacznej wartości stosunku h/b (np. $h/b \approx 2.5$), uzyskuje się zaniżoną wartość w_m obliczoną na podstawie rów. (63), z powodu istotnej różnicy między średnią, obliczeniową wartością τ_T i maksymalną, rzeczywistą wartością τ_T .

Zgodnie z podstawowym założeniem teorii *Rahala* i *Collinsa* (teorii MCFT), za średnią wartość odkształceń przyjmuje się wartość odkształceń w płaszczyźnie określonej położeniem linii środkowej równoważnej strefy strumienia ścinania, czyli w odległości ($a/2$) od zewnętrznej powierzchni betonu (por. p. 2.2). Średnią szerokość rys, wg rów. (63), oblicza się więc na głębokości ($a/2$), licząc od zewnętrznej powierzchni betonu.

Brzegi rys ulegają deplanacji [7, 17]. Wskutek tego zjawiska rysa ma największą szerokość na zewnętrznej powierzchni elementu. Uwzględniając: standardowe grubości otuliny betonowej, stopień wyężenia elementu w SGU oraz wyniki badań [7, 17] przyjęto założenie, że średnia szerokość rysy na powierzchni elementu jest 20% większa niż średnia szerokość rysy na głębokości ($a/2$). Przy tym założeniu rów. (63) przyjmuje postać:

$$w_m = 1.2\varepsilon_1 s_{rm} \quad (66)$$

Przy projektowaniu za miarodajną przyjmuje się maksymalną szerokość rys. Wszystkie wartości stosunku w_{max}/w_m , podane w przepisach normowych, przy różnych przypadkach obciążenia, zostały ustalone na podstawie badań doświadczalnych. W żadnej z norm nie ma podanych zaleceń odnośnie wartości tego stosunku, jaką należy przyjmować w przypadku elementów skręcanych (i oczywiście przypadku T+V). Autorowi nie są znane wyniki badań, na podstawie których można by określić doświadczalną wartość tego stosunku w przypadku elementów jednocześnie skręcanych i ścinanych. Opierając się na wynikach badań własnych [1, 2, tab. 1] proponuje się przyjąć wartość tego stosunku równą (w_{max}/w_m) = 1.7.

Ostatecznie proponuje się, aby maksymalną szerokość rys w elementach poddanych jednoczesnemu działaniu T i V , w połowie wysokości ścianki krytycznej ($T+V$), obliczać na podstawie równania:

$$w_{\max} = 1.7 \cdot 1.2 \varepsilon_1 s_{rm} \quad (67)$$

Przeprowadzono badania własne na elementach żelbetowych w skali naturalnej poddanych jednoczesnemu skręcaniu i ścinaniu [1,2]. W tabl. 1 przedstawiono porównanie doświadczalnych szerokości rys zaobserwowanych w poszczególnych belkach pod obciążeniem eksploatacyjnym, w połowie wysokości ścianki krytycznej, z wartościami szerokości rys wyznaczonymi na podstawie proponowanej metody obliczeniowej (w obliczeniach wykorzystano program komputerowy). W tabeli 2 przedstawiono analogiczne wyniki dla boków elementów badawczych, na których strumienie sił stycznych od T i V odejmowały się.

Tabela 1. Porównanie doświadczalnych i obliczeniowych wartości w_m i w_{\max} w obszarach ($T+V$) belek badawczych.

Table 1. Comparison of experimental and calculated w_m i w_{\max} in the regions ($T+V$) of the testing beams.

Oznaczn. belki	ε_1 wg[13] $\times 10^{-3}$	s_{rm} r.(64) mm	w_m r.(63) mm	w_m^{dos} mm	w_{\max}^{dos} mm	w_m^{obl} r.(66) mm	w_{\max}^{obl} r.(67) mm	$\frac{w_m^{obl}}{w_m^{dos}}$	$\frac{w_{\max}^{obl}}{w_{\max}^{dos}}$
BN 3-1	0.77	159	0.122	0.057	0.15	0.146	0.25	2.56	1.67
BN 2-1	0.79	149	0.118	0.158	0.24	0.142	0.24	0.90	1.00
BN 1-1	0.63	151	0.095	0.136	0.17	0.114	0.19	0.84	1.12

Tabela 2. Porównanie doświadczalnych i obliczeniowych wartości w_m i w_{\max} w obszarach ($T-V$) belek badawczych.

Table 2. Comparison of experimental and calculated w_m i w_{\max} in the regions ($T-V$) of the testing beams.

Oznaczn. belki	ε_1 wg[13] $\times 10^{-3}$	s_{rm} r.(64) mm	w_m r.(63) mm	w_m^{dos} mm	w_{\max}^{dos} mm	w_m^{obl} r.(66) mm	w_{\max}^{obl} r.(67) mm	$\frac{w_m^{obl}}{w_m^{dos}}$	$\frac{w_{\max}^{obl}}{w_{\max}^{dos}}$
BN 3-1	0.55	158	0.087	0.026	0.05	0.104	0.18	4.00	3.60
BN 2-1	0.47	148	0.070	0.046	0.10	0.084	0.14	1.83	1.40
BN 1-1	0.33	155	0.051	0.054	0.10	0.061	0.10	1.13	1.00

Aby zastosować proponowaną metodę obliczania szerokości rys, należy określić wytrzymałość betonu na rozciąganie w dwuosiowym stanie naprężenia f_{ctm} . Vecchio i Collins [15], Hsu [6] oraz Rahal i Collins [13] proponują, aby wartość tej wytrzymałości obliczać według zależności $f_{ctm} = 0.33(f_{cm})^{1/2}$. W obliczeniach, których wyniki przedstawiono w tabl. 1 i tabl. 2, wartości f_{ctm} wyznaczono na podstawie tej zależności.

W proponowanej metodzie obliczania szerokości rys w elementach jednocześnie skręcanych i ścinanych została uwzględniona większość parametrów, które mają wpływ na zarysowanie elementu (szerokość, rozstaw rys). Było to możliwe, przede wszystkim dzięki zastosowaniu modelu Rahala i Collinsa, i dodatkowo poprzez wykorzystanie rów. (65). Wyznaczając ε_1 na podstawie modelu Rahala i Collinsa uwzględnia się następujące parametry: wymiary przekroju, stopień

zbrojenia, wytrzymałość betonu na ściskanie i rozciąganie w dwuosiowym stanie naprężenia, kąt pochylenia rys, rysy wtórne oraz, pośrednio, warunki przyczepności między betonem i stalą (założenie 6 w p. 2.1). Poprzez zastosowanie rów. (65) uwzględnia się dodatkowo następujące parametry: średnicę zbrojenia, rodzaj powierzchni prętów oraz rozmieszczenie zbrojenia. W metodzie obliczeniowej uwzględniono również zjawisko deplanacji brzegów rys, poprzez zastosowanie współczynnika o wartości 1.2.

Dzięki zastosowaniu teorii *Rahala* i *Collinsa*, w obliczeniach szerokości rys wg rów. (67) uwzględnia się naprężenia rozciągające w zarysowanym betonie (zjawisko „tension stiffening”) oraz zjawisko zmniejszenia wytrzymałości na ściskanie ukośnie zarysowanego betonu (softening of concrete). Należy szczególnie podkreślić, że jedynie teoria *Rahala* i *Collinsa* daje możliwość poprawnego określenia stanu odkształcenia (naprężenia) elementu jednocześnie skręcane go i ścinanego pod obciążeniem eksploatacyjnym. Należy zaznaczyć, że ustalenie stanu odkształcenia elementu w SGU stanowi poważny problem przy opracowywaniu metod obliczania szerokości rys w elementach skręcanych, co opisano w p. 1.

Z porównania wartości doświadczalnych i obliczeniowych szerokości rys (por. tab. 1 i tab. 2), szczególnie w zakresie w_{max} , wynika, że wartości wyznaczone na podstawie proponowanej metody obliczeniowej są w dobrej zgodności z wynikami badań. Wydaje się więc, że ogólna koncepcja równania (67) jest słuszna. Konkretnie wartości współczynników liczbowych, zastosowanych w rów. (67), zostały przyjęte na podstawie wyników (nielicznych) badań, również własnych (współczynnik 1.7). Wymagane są dalsze badania doświadczalne w celu uściślenia wartości tych współczynników.

Aby wyznaczyć wartość odkształcenia ε_1 należy przeprowadzić skomplikowaną procedurę obliczeniową (p. 3.3). Wymagane są dalsze prace analityczne w celu wprowadzenia pewnych założeń wstępnych, upraszczających tą procedurę.

W proponowanej metodzie obliczeniowej, podobnie jak w modelu *Rahala* i *Collinsa* (por. założenie 2 w p. 2.1), nie został uwzględniony wpływ: czasu trwania obciążenia oraz odkształceń wymuszonych i reologicznych. Wobec tego, na podstawie rów. (67) można wyznaczyć jedynie szerokość rys w elementach poddanych działaniu obciążeń doraźnych.

Przy wykorzystaniu proponowanej metody obliczeniowej w praktyce inżynierskiej (przy projektowaniu) należałoby, zgodnie z propozycją *Lewickiego* [11], określić wartość współczynnika γ_b , uwzględniającego niepewność modelu teoretycznego przyjętego przy opracowywaniu rów. (67).

Literatura

- [1] Budzyński W., *Badania belek żelbetowych poddanych jednoczesnemu skręcaniu i ścinaniu*, Inżynieria i Budownictwo, nr 4/1999.
- [2] Budzyński W., *Analiza szerokości rozwarcia rys ukośnych w elementach żelbetowych przy jednoczesnym występowaniu skręcania i ścinania*, Praca doktorska. Pol. Lubelska 2000.
- [3] Ciężak T., *Rozwarcie rys w skręcanych elementach żelbetowych*, Prace Naukowe Politechniki Lubelskiej 218. Budownictwo 40. Lublin 1990.
- [4] Collins M.P., Mitchell D., *Prestressed Concrete Structures*, Prentice Hall 1991.

-
- [5] Goto Y., *Cracks Formed in Concrete Around Deformed Tension Bars*, ACI Journal, No.4, Apr.1971.
- [6] Hsu T.T.C., *Unified Theory of Reinforced Concrete*, CRC Press Inc., Boca Raton, Florida 1993.
- [7] Husain S.I., Ferguson Ph.M., *Flexural Crack Width at the Class in Reinforced Concrete Beams*, Research Report 102-1F Center for Highway Research, the University of Texas at Austin, June 1968.
- [8] Kosińska A., Nowakowski A.B., *Badania żelbetowych belek wykonanych z betonu wysokowartościowego poddanych czystemu skręcaniu*, XLII Konferencja Naukowa KILiW PAN i KN PZITB. Krynica 1996.
- [9] Lampert P., Thürlimann B., *Torsions-Biege-Versuche an Stahlbetonbalken*, Institut für Baustatik, ETH Zürich, Bericht Nr 6506-3, Januar 1969.
- [10] Lampert P., Thürlimann B., *Torsionsversuche an Stahlbetonbalken*, Institut für Baustatik, ETH Zürich, Bericht Nr 6506-2, Juni 1968.
- [11] Lewicki B., *Związek między wynikami badań i wzorami normowymi*, Inżynieria i Budownictwo, nr 4-5/1990.
- [12] Pang X.B., Hsu T.T.C., *Fixed Angle Softened Truss Model for Reinforced Concrete*, ACI Structural Journal, V.93, No.2, March-April 1996.
- [13] Rahal K.N., Collins M.P., *Analysis of Sections Subjected to Combined Shear and Torsion - A Theoretical Model*, ACI Structural Journal, V.92, No.4, July-August 1995.
- [14] Thürlimann B., *Ultimate Strength and Design of Reinforced Concrete Beams under Bending and Shear*, Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, Bericht Nr 63, September 1976.
- [15] Vecchio F.J., Collins M.P., *The Modified Compression-Field Theory for Reinforced Concrete Elements Subjected to Shear*, ACI Structural Journal, V.83, No.2, Mar.-Apr. 1986.
- [16] Vecchio F.J., Collins M.P., *The Response of Reinforced Concrete to In-Plane Shear and Normal Stresses*, Publication 82-03, Department of Civil Engineering, University of Toronto, Toronto 1982.
- [17] Yang S., Chen J., *Bond Slip and Crack Width Calculations of Tension Members*, ACI Structural Journal, V.85, No.4, July-August 1988.
- [18] *ACI 318-02, Building Code Requirements for structural Concrete (ACI 318-02) and Commentary (ACI 318R-02)*, American Concrete Institute, 2002.
- [19] *CEB-FIP. Model Code for Concrete Structures*, CEB-FIP International Recommendations, 3rd Edition 1978.
- [20] *CEB-FIP Model Code MC 1990. Verrification of the Ultimate Limit States. Summary and Analysis of Observations Concerning the Revision of the CEB-FIP Model Code 1978*, Bulletin d'Information No.175, March 1987.
- [21] *ENV 1992-1-1:1991: Eurokod 2. Projektowanie konstrukcji z betonu. Część 1: Reguły ogólne i reguły dla budynków*, Tom 1, Wersja polska. ITB 1992.
- [22] *PN-B-03264:2002. Konstrukcje betonowe, żelbetowe i sprężone. Obliczenia statyczne i projektowanie*, PKN 2002.
- [23] *SNiP 2.03.01-84-M. Bietonnyje i zelezobietonnyje konstrukcii*, Strojizdat. Moskwa 1984.

Proposition of a new method for the calculation of diagonal crack widths in reinforced concrete elements subjected to combined torsion and shear

Waldemar Budzyński

*Lublin University of Technology, Institute of Building, Nadbystrzycka 40, 20-618 Lublin,
e-mail: walbud@gazeta.pl*

Abstract: This paper concerns the phenomenon of cracking in reinforced concrete elements subjected to combined torsion and shear. The theoretical model developed by Rahal and Collins is described in detail. This model is the only one which is capable of predicting the full response (e.g.: steel and concrete strains, deformations, curvatures) rectangular reinforced concrete sections subjected to combined torsion and shear throughout their post - cracking loading history. The assumptions of Modified Compression Field Theory are also described because the model of Rahal and Collins is based on this theory. It also contains a concept of the new method which is capable of determining the width of cracks in reinforced concrete elements subjected to combined torque moment and shear force. The method is based on the model suggested by Rahal and Collins.

Key words: reinforced concrete; torsion; shear; truss model; strains; compatibility equations; width of cracks.