

Prof. dr hab. Leszek MIESZKALSKI  
 Dr inż. Andrzej ANDERS  
 Mgr inż. Hanna Katarzyna SOŁODUCHA  
 Katedra Inżynierii Rolniczej i Surowców Naturalnych  
 Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie

## MODELOWANIE BRYŁ OWOCÓW NA PRZYKŁADZIE OWOCÓW MANDARYNKI®

Projektując a następnie budując maszynę przeznaczoną do sortowania, niezbędna jest wiedza na temat kształtu, wymiarów oraz cech fizycznych surowca, który zostanie poddany dalszej obróbce. W artykule przedstawiono model matematyczny bryły owocu w oparciu o równania parametryczne opublikowane w pracy Mieszkalskiego [9]. Do badań wykorzystano owoce mandarynki. Zmierzono owoce rzeczywiste oraz zmierzono wygenerowany komputerowo model bryły. Z przeprowadzonej analizy statystycznej uzyskanych pomiarów, dla badanej próby owoców wynika, że model bryły najlepiej odwzorowuje objętość bryły, pole powierzchni rzutu na płaszczyznę YZ, obwód rzutu na płaszczyznę YZ oraz obwód rzutu na płaszczyznę XY. Średnia objętość bryły modelu wynosiła  $1,475 \times 10^{-4} \text{ m}^3$ , przy czym połowa wygenerowanych komputerowo modeli miała objętość poniżej  $1,461 \times 10^{-4} \text{ m}^3$ . Zaproponowany model matematyczny może posłużyć do wstępnych prac projektowych maszyn sortujących owoce mandarynki.

**Słowa kluczowe:** model matematyczny, cechy geometryczne, owoce, mandarynka.

### WYKAZ OZNACZEŃ

- $a$  – połowa długości owocu mandarynki [m],
- $b$  – połowa szerokości owocu mandarynki [m],
- $c$  – połowa grubości owocu mandarynki [m],
- $f, g, h, k, m$  – współczynniki kształtu,
- $\varphi, \theta$  – kąt [°],
- $i$  – liczba wierszy macierzy,
- $j$  – liczba kolumn macierzy,
- $K$  – kolistość,
- $S$  – pole powierzchni rzutu mandarynki [ $\text{m}^2$ ],
- $S_{xy}, S_{yz}$  – pole powierzchni rzutu na płaszczyznę XY lub YZ [ $\text{m}^2$ ],
- $L$  – obwód rzutu mandarynki [m],
- $L_{xy}, L_{yz}$  – obwód rzutu mandarynki na płaszczyznę XY lub YZ [m].

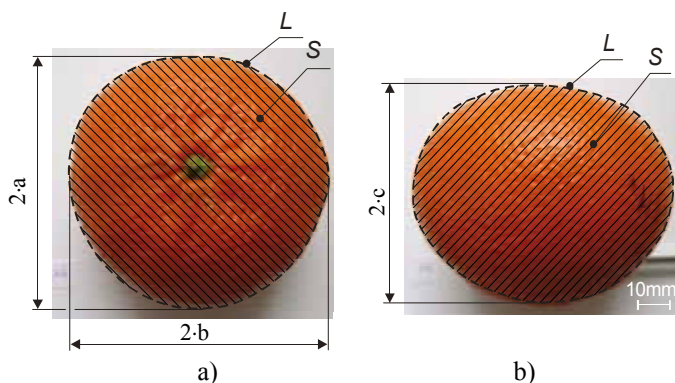
### WSTĘP

Kształty owoców, warzyw i nasion są zróżnicowane. W przyrodzie występują kształty płaskie, owalne, kanciaste oraz kuliste [4, 6]. Projektując maszynę przeznaczoną dla przetwórstwa potrzebna jest dokładna znajomość cech geometrycznych obiektów biologicznych poddawanych obróbce. Na tym etapie przydatne jest korzystanie z opracowanych modeli matematycznych obiektów roślinnych [1, 2]. Do matematycznego opisu wielkości owoców przyjmuje się ich wymiary uzyskane z pomiarów obiektów rzeczywistych [7, 8]. Lewandowski i Mieszkalski [7] modelując nasiono bobiku zaproponowali kształt elipsoidy. W pracy z 2003 roku Mieszkalski za pomocą zmodyfikowanych równań parametrycznych kuli modelował kształt bryły jabłka, dyni, papryki, ogórka i innych owoców. Drogosz i Mańkowski [3] opracowali model nasion

przyjmując za kształt wyjściowy trochoidę. Przykładem owocu, który ma przybliżony kształt do kuli jest owoc mandarynki. Mandarynka (*Citrus reticulata*) – trafiła do Europy na początku XIX wieku z Chin, gdzie przez wieki pilnie strzeżono tajemnicy upraw tego najłodszego owocu cytrusowego. Mandarynki są delikatne i aromatyczne. Dostarczają dużo potasu, wapnia i magnezu oraz witamin A, B, i C. Kilogram tych owoców to jedynie 400 kilokalorii. **Celem pracy zaprezentowanej w artykule było opracowanie matematycznego modelu bryły na przykładzie owocu mandarynki.**

### METODYKA BADAŃ

Materiałem do badań były owoce mandarynki odmiany Ortanique, klasy 2, przechowywane w pomieszczeniu o stałej temperaturze 22°C oraz wilgotności powietrza około 55%. Do badań wybrano 30 owoców mandarynki. Przed rozpoczęciem badań owoce były ponumerowane i zważone na wadze elektronicznej z dokładnością  $d = 1 \text{ g}$ . W każdym owocu mandarynki zmierzono za pomocą suwmiarki długość, szerokość i grubość z dokładnością  $d = 1 \text{ mm}$ . Kolejną czynnością było wykonanie fotografii badanych owoców.



**Fot. 1.** Owoc mandarynki: a – widok rzutu na płaszczyznę XY, b – widok rzutu na płaszczyznę YZ.

Każdą mandarynkę układano na papier milimetrowy a następnie fotografowano cyfrowym aparatem fotograficznym Nikon 5400 umieszczonym w statywie 25 cm nad owocem. Po wykonaniu fotografii zmieniano ułożenie owocu o kąt 90° tak, aby uzyskać widok owocu w drugim rzucie (fot. 1). Uzyskane zdjęcia miały rozdzielczość 2592×1944 pikseli i były zapisane w nisko skompresowanym formacie jpg. Na podstawie uzyskanych w ten sposób fotografii obliczano: pole powierzchni rzutu na płaszczyznę XY oraz na płaszczyznę YZ, obwód owocu w każdym rzucie oraz współczynniki kolistości. Następnie zmierzono objętość każdego owocu za pomocą szklanego naczynia cylindrycznego o objętości 500 cm<sup>3</sup>. Owoce mandarynki umieszczano w szklanym naczyniu cylindrycznym wypełnionym wodą a następnie odczytywano objętość wypartej wody z dokładnością  $d = 5 \text{ cm}^3$ . Przed określeniem pola powierzchni skórki mandarynki każdy owoc został nacięty i obrany za pomocą ostrego noża. Aby pomiar był dokładny – przyjęto, że skórka każdej mandarynki została nacięta na osiem części co ułatwiło dociśnięcie jej do powierzchni skanera. Obraną skórkę każdego owocu zeskanowano w rozdzielczości 300 dpi za pomocą skanera płaskiego typu Plustek Optic Pro ST 24. Obliczenia pola powierzchni skórki owocu mandarynki wykonano w programie ImageJ. Budowę modelu matematycznego bryły owocu oparto na układzie równań parametrycznych (1), które zostały wprowadzone do programu Mathcad 11 [9].

$$\begin{aligned} X_{i,j} &:= a \cdot \sin(\phi_i)^f \cdot \cos(\theta_j)^g \\ Y_{i,j} &:= b \cdot \sin(\phi_i)^h \cdot \sin(\theta_j)^k \\ Z_{i,j} &:= c \cdot \cos(\phi_i)^m \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie:  $\Theta_j = j \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{N}$ ,  $\phi_i = i \cdot \frac{\pi}{N}$ ,  $N=60$ ,  $i = 0..N$ ,  $j = 0..N$

ych wartościach  $a = 0,072 \pm 0,001 \text{ m}$ ,  $b = 0,072 \pm 0,002 \text{ m}$  i  $c = 0,054 \pm 0,003 \text{ m}$ . Wykładniki potęg w równaniach parametrycznych były dobierane eksperymentalnie. Na podstawie przeprowadzonych obliczeń ustalono, że podstawiając do równań parametrycznych wykładniki  $f = 1,1$ ,  $h = 1,1$ ,  $g = 1$ ,  $k = 1$  oraz  $m = 1$  kształt bryły modelu mandarynki ulegał nieznacznym zmianom i był najbardziej zbliżony do kształtu owocu mandarynki. Do obliczeń współczynnika kolistości przekrojów prostopadłych modelu zastosowano wzór (2) w oparciu o [1, 10, 11].

$$K = 4 \cdot \pi \frac{S}{L^2}; \quad (2)$$

Otrzymane wyniki na podstawie zdjęć poddano dalszej obróbce statystycznej za pomocą programu Statistica 8.0 oraz Microsoft Excel 2000.

### WYNIKI BADAŃ I ICH ANALIZA

Uzyskane z obliczeń wyniki pozwalają opisać kształt oraz masę owoców mandarynki oraz porównać zbudowany model matematyczny bryły z owocem rzeczywistym. Na podstawie przeprowadzonych pomiarów owoców oraz na podstawie analizy zdjęć każdego badanego owocu otrzymano dane, które pozwoliły obliczyć parametry statystyczne badanych owoców mandarynki. Wyniki obliczeń statystycznych mierzonych cech geometrycznych owoców przedstawia tabela 1.

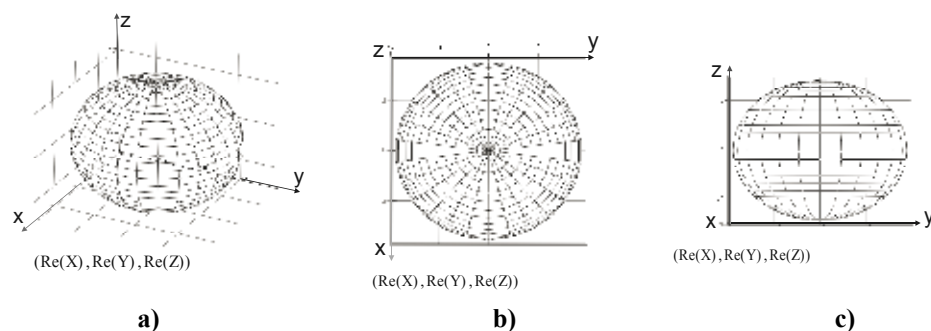
Analizując wyniki wymiarów objętości badanych owoców mandarynki dla wybranych 30 sztuk, stwierdzić należy, że średnia objętość wynosi  $1,458 \times 10^{-4} \text{ m}^3$ , przy czym połowa owoców miała objętość poniżej  $1,425 \times 10^{-4} \text{ m}^3$ .

**Tabela 1.** Parametry statystyczne owoców mandarynki

Statystyka	długość 2a [m]	szerokość 2b [m]	grubość 2c [m]	masa [kg]	objętość $\times 10^{-4} [\text{m}^3]$	pole powierzchni okrywy $\times 10^{-3} [\text{m}^2]$	rzut na płaszczyznę XY			rzut na płaszczyznę YZ		
							pole powierzchni $S \times 10^{-3} [\text{m}^2]$	obwód L [m]	kolistość K	pole powierzchni $S \times 10^{-3} [\text{m}^2]$	obwód L [m]	kolistość K
Średnia	0,072	0,072	0,054	0,145	1,458	13,981	4,103	0,229	0,990	3,063	0,197	0,970
Odchylenie stand.	0,001	0,002	0,003	0,011	0,117	0,928	0,179	0,005	0,002	0,246	0,008	0,008
Wariancja	0,000	0,000	0,000	0,000	0,013	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
Błąd stand.	0,000	0,000	0,000	0,002	0,021	0,170	0,033	0,001	0,000	0,045	0,001	0,001
Mediana	0,073	0,072	0,055	0,142	1,425	13,938	4,000	0,230	0,991	3,000	0,197	0,970
Rozstęp	0,008	0,010	0,010	0,044	0,450	3,699	0,700	0,021	0,013	1,400	0,034	0,034
Minimum	0,070	0,068	0,050	0,124	1,250	12,269	3,900	0,220	0,980	2,600	0,182	0,954
Maksimum	0,078	0,078	0,060	0,169	1,700	15,968	4,600	0,241	0,994	4,000	0,217	0,988
Liczebność	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30

Zbudowany model bryły pozwalał na obliczenie objętości modelowanej bryły, pola powierzchni zewnętrznej, pola powierzchni przekrojów na płaszczyznę XY i YZ oraz długości obwodów tych przekrojów. Aby uzyskać model zbliżony kształtem do owoców mandarynki zastosowano współczynniki skalujące w równaniach parametrycznych o następują-

Obszar zmienności objętości mandarynek wynosił  $0,450 \times 10^{-4} \text{ m}^3$  a przeciętne zróżnicowanie  $0,117 \times 10^{-4} \text{ m}^3$ . Na podstawie rzeczywistych wymiarów owoców wygenerowano w programie Mathcad 11 matematyczny model bryły mandarynki (rys. 1). Na podstawie przeprowadzonych pomiarów modelu matematycznego otrzymano dane, które pozwoliły obliczyć parametry statystyczne modelu. Wyniki obliczeń przedstawia tabela 2.



**Rys. 1.** Model matematyczny owocu mandarynki: a – widok ogólny, b – rzut na płaszczyznę  $XY$ , c – rzut na płaszczyznę  $YZ$

**Tabela 2.** Parametry statystyczne modelu mandarynki

Statystyka	objętość $\times 10^{-4}$ [m <sup>3</sup> ]	pole powierzchni okrywy $\times 10^{-3}$ [m <sup>2</sup> ]	rzut na płaszczyznę $XY$			rzut na płaszczyznę $YZ$		
			pole powierzchni $S \times 10^{-3}$ [m <sup>2</sup> ]	obwód $L$ [m]	kolistość $K$	pole powierzchni $S \times 10^{-3}$ [m <sup>2</sup> ]	obwód $L$ [m]	kolistość $K$
Średnia	1,475	13,700	4,150	0,228	0,998	3,093	0,199	0,968
Odchylenie stand.	0,121	0,836	0,208	0,001	0,001	0,232	0,006	0,014
Wariancja	0,014	0,001	0,043	0,000	0,000	0,053	0,000	0,000
Błąd stand.	0,022	0,153	0,038	0,001	0,000	0,042	0,001	0,002
Mediana	1,461	14,000	4,091	0,227	0,998	3,129	0,201	0,973
Rozstęp	0,470	3,000	0,745	0,020	0,005	0,894	0,028	0,065
Minimum	1,246	12,000	3,841	0,220	0,994	2,619	0,185	0,934
Maksimum	1,716	15,000	4,586	0,240	1,000	3,513	0,213	1,000
Liczebność	30	30	30	30	30	30	30	30

**Tabela 3.** Wyniki testu  $t$  dla prób zależnych

Zmienna	Średnia	Odch. st.	Ważnych	Różnica	Odch. st. Różnica	t	df	p
Objętość rzeczywista $\times 10^{-4}$ [m <sup>3</sup> ]	1,458	0,117	30	-0,017	0,067	-1,378	29	0,178
Objętość modelu $\times 10^{-4}$ [m <sup>3</sup> ]	1,475	0,121						
Pole powierzchni okrywy mandarynki $\times 10^{-3}$ [m <sup>2</sup> ]*	13,981	0,928	30	0,281	0,661	2,328	29	0,027
Pole powierzchni modelu $\times 10^{-3}$ [m <sup>2</sup> ]*	13,700	0,836						
Pole powierzchni rzutu na płaszczyznę $XY$ mandarynki $S_{xy} \times 10^{-3}$ [m <sup>2</sup> ]*	4,158	0,209	30	0,007	0,000	105,405	29	0,000
Pole powierzchni rzutu na płaszczyznę $XY$ modelu $S_{xy} \times 10^{-3}$ [m <sup>2</sup> ]*	4,150	0,208						
Obwód rzutu na płaszczyznę $XY$ mandarynki $L_{xy}$ [m]	0,229	0,005	30	0,001	0,003	1,992	29	0,055
Obwód rzutu na płaszczyznę $XY$ modelu $L_{xy}$ [m]	0,228	0,005						
Pole powierzchni rzutu na płaszczyznę $YZ$ mandarynki $S_{yz} \times 10^{-3}$ [m <sup>2</sup> ]	3,168	0,252	30	0,074	0,225	1,813	29	0,080
Pole powierzchni rzutu na płaszczyznę $YZ$ modelu $S_{yz} \times 10^{-3}$ [m <sup>2</sup> ]	3,093	0,232						
Obwód rzutu na płaszczyznę $YZ$ mandarynki $L_{yz}$ [m]	0,197	0,008	30	-0,001	0,004	-2,016	29	0,053
Obwód rzutu na płaszczyznę $YZ$ modelu $L_{yz}$ [m]	0,199	0,006						

\* – różnice są istotne z  $p < 0,05$

W celu porównania równości średnich badanych zmiennych modelu matematycznego mandarynki z rzeczywistymi wymiarami wybranej próby mandarynek przeprowadzono test  $t$  dla prób zależnych (tabela 3).

Przeprowadzony test  $t$  dla grup zależnych ukazuje, że różnice średnich pól powierzchni okrywy mandarynki i pola powierzchni wygenerowanego modelu oraz pola powierzchni rzutu na płaszczyznę  $XZ$  mandarynki i modelu przy założonym poziomie istotności 0,05 są statystycznie istotne. Różnice średnich pozostałych parametrów tj. objętości owocu mandarynki i modelu, pola powierzchni rzutu na płaszczyznę  $YZ$  mandarynki i modelu, obwodu rzutu na płaszczyznę  $YZ$  mandarynki i mode-

lu oraz obwodu rzutu na płaszczyznę  $XY$  owocu mandarynki i modelu są dla przyjętego poziomu istotności 0,05 statystycznie nieistotne.

## WNIOSKI

1. Na podstawie przeprowadzonych pomiarów i obliczeń wynika, że zbudowany model bryły owocu mandarynki najlepiej odwzorowuje, w porównaniu do owoców rzeczywistych, następujące parametry: objętość bryły, pole powierzchni rzutu na płaszczyznę  $YZ$ , obwód rzutu na płaszczyznę  $YZ$  oraz obwód rzutu na płaszczyznę  $XY$ . Zaproponowany model matematyczny może posłużyć do wstępnych prac projektowych maszyn sortujących owoce mandarynki.

2. Analizując wyniki pomiarów pola powierzchni okrywy badanych owoców mandarynki dla wybranych 30 sztuk, stwierdzić należy, że średnie pole powierzchni okrywy owocu wynosiło  $13,981 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ . Obszar zmienności pola powierzchni okrywy wynosił  $3,699 \times 10^{-3} \text{ m}^2$  a przeciętne zróżnicowanie  $0,928 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ . Średnie pole powierzchni bryły modelu wynosi  $13,7 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ , przy czym połowa wygenerowanych komputerowo modeli miała pole powierzchni okrywy poniżej  $14,0 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ . Obszar zmienności wynosił  $3,0 \times 10^{-3} \text{ m}^2$  a przeciętne zróżnicowanie  $0,836 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ .

3. Średnia objętość bryły modelu wynosiła  $1,475 \times 10^{-4} \text{ m}^3$ , przy czym połowa wygenerowanych komputerowo modeli miała pole powierzchni okrywy poniżej  $1,461 \times 10^{-4} \text{ m}^3$ . Obszar zmienności objętości bryły modelu wynosił  $0,470 \times 10^{-4} \text{ m}^3$  a przeciętne zróżnicowanie  $0,121 \times 10^{-4} \text{ m}^3$ . Średnia objętość modelu bryły owocu mandarynki dla badanej próby owoców jest zbliżona do objętości owoców rzeczywistych.

## LITERATURA

- [1] Anneke M. Bouwman, Jaap C. Bosma, Pieter Vonk, J. (Hans) A. Wesselingh, Henderik W. Frijlink: Which shape factor (s) best describe granules? *Powder Technology*, 2004, 146, 66-72.
- [2] Anders A.: Analiza obrazu jako metoda oceny skuteczności obłuskiwania okrywy nasion gorczycy białej, *Acta Agrophysica*, 2007, 10 (2), 263-271.
- [3] Drogosz P., Mańkowski S.: Trochoid application to seed solid section mapping, *Technical Sciences* nr 6, 2003, s. 57-64.
- [4] Grochowicz J.: Maszyny do czyszczenia i sortowania nasion, Wydawnictwo Akademii Rolniczej, Lublin, 1994.
- [5] Lewandowski R.: Modelowanie procesu obłuskiwania nasion roślin strączkowych, Politechnika Warszawska, Płock (praca doktorska), 1998.
- [6] Mieszkalski L.: Określenie kształtu i prostopadłych rzutów powierzchni nasion bobiku, *Acta Academiae Agriculturae ac Technicae Olstenensis, Aedificatio et Mechanica*, 1991, 22.
- [7] Mieszkalski L.: Matematyczne modelowanie procesu obłuskiwania nasion, *Rozprawy i monografie*. Wydawnictwo ART, Olsztyn, 1999.
- [8] Mieszkalski L., Sołoduha H.K.: Model matematyczny kształtu nasion fasoli, *Technical Sciences*, suppl. 2004, 1, s. 59-66.
- [9] Mieszkalski L.: Method for generating three-dimensional solid models of seeds applied in the food industry, *Technical Sciences*, 2003, 6, 49-55.

[10] Renliang Xu, Olga Andreina Di Guida.: Comparison of sizing small particles using different technologies, *Powder Technology*, 2003, 132, 145-153.

[11] Sakai N., Yonekawa S., Matsuzaki A.: Two-dimensional image analysis of shape of rice and its application to separating varieties, *Journal of Food Engineering* 27, 1996, 397-407.

## FRUIT SHAPE MODELING ON THE EXAMPLE OF MANDARIN FRUIT

### SUMMARY

*The design and building of sorting machine of fruit and device requires thorough knowledge of the shape, dimensions and physical properties of agricultural products. The paper presents mathematical model of fruit shape built on parametric equations published in paper in 2003 by Mieszkalski. The experimental materials comprised mandarin fruits var. Ortanique. Mandarin fruits and computer generated model were measured. Statistical analysis of examined sample measurements showed that best fitting of generated model was obtained for fruit volume, YZ plane projection area, perimeter of YZ plane projection area and perimeter of XY plane projection area. The average volume of computer generated model of mandarin fruit was  $1,475 \times 10^{-4} \text{ m}^3$ , however half of models had volume below  $1,461 \times 10^{-4} \text{ m}^3$ . Presented model of mandarin fruit can be helpful to preliminary design work of sorting machines.*