

Marcin Barszcz<sup>1</sup>, Mykhaylo Pashechko<sup>1</sup>

## WYKORZYSTANIE PROGRAMU MATHCAD DO ROZWIĄZYWANIA ZAGADNIĘŃ INŻYNIERSKICH NA PRZYKŁADZIE KONSTRUKCJI KRATOWEJ

**Streszczenie.** W artykule przedstawiono możliwości wykorzystania programu Mathcad do rozwiązywania wybranych zagadnień ze zbioru zadań z mechaniki technicznej lub wytrzymałości materiałów. Pokazano przykład wyznaczania sił w prętach oraz reakcje podpór konstrukcji kratowej (kratownicy płaskiej) metodą Rittera i metodą równoważenia węzłów. Zauważono, że narzędzie to znacznie ułatwia proces rozwiązywania zagadnień oraz umożliwia szybkie przeanalizowanie zachowania się danej konstrukcji przy różnych obciążeniach.

**Słowa kluczowe:** Mathcad, mechanika techniczna, kratownice, obliczenia inżynierskie.

### WPROWADZENIE

Ciągły rozwój nauk technicznych, a w szczególności branży mechanicznej, budowlanej i elektronicznej spowodował znaczący rozwój techniki komputerowej. Co z pewnością pozytywnie wpływa na pracę inżynierów, konstruktorów i projektantów.

Obecnie głównym wymogiem pracy jest czas wykonania zleconego zadania, a dokładniej minimalny czas jego wykonania przy maksymalnej dokładności i precyzji. Niezbędne stało się więc opracowanie nowoczesnych narzędzi usprawniających pracę. Niezastąpionym narzędziem okazało się oprogramowanie typu CAD. Praca na tego typu programach w szczególności polega na opracowaniu dokumentacji konstrukcyjnej, analizy kinematycznej, wytrzymałościowej oraz wielu innych zagadnień związanych z powstawaniem projektu gotowego wyrobu. Dla inżynierów praca na tego typu programach ma niezwykle istotne znaczenie, gdyż umożliwia „dialog” między twórcą konstrukcji technicznych, a jej wykonawcą.

Spśród wielu programów komputerowych wspomagających rozwiązywanie różnego rodzaju zagadnień Mathcad wyróżnia się względną prostotą, wykazując przy tym pewną ogólność. Oczywiście program ten nie zawsze jest doskonały i czasami sprawia trudności przy rozwiązywaniu niektórych zagadnień. Jednak w procesie kształcenia jest wyśmienitym narzędziem, które może nam posłużyć między innymi do rozwiązywania zadań prezentowanych w zbiorach z mechaniki ogólnej.

---

<sup>1</sup> Katedra Podstaw Techniki, Politechnika Lubelska.

## MOŻLIWOŚCI PROGRAMU MATHCAD

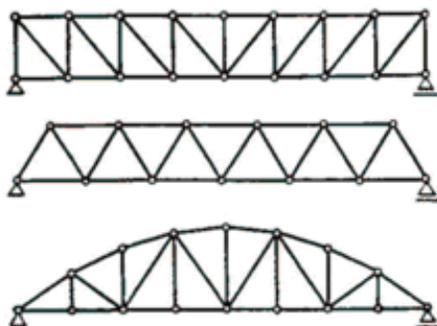
Mathcad jest programem komputerowym umożliwiającym wykonywanie prostych oraz bardzo skomplikowanych obliczeń inżynierskich. Daje również możliwość tworzenia dokumentacji technicznej w postaci dokumentu tekstowego wzbogaconego o wykresy i rysunki. Korzystają z niego miliony użytkowników w ponad 50 krajach. Środowisko programu umożliwia inżynierom efektywne wykorzystanie jego możliwości, na każdym etapie projektowania. Do jego zalet możemy zaliczyć: łatwość obsługi, naturalny zapis wszystkich wzorów, możliwość tworzenia wykresów 2D i 3D oraz przejrzyste przedstawienie danych (w postaci wzorów i tekstu). Poniżej podano wybrane możliwości programu:

- rozwiązywanie równań i nierówności liniowych i nieliniowych,
- rozwiązywanie układów równań,
- operacje na wektorach i macierzach,
- obliczenia pochodnych i granic,
- rachunek całkowy i różniczkowy,
- wykonywanie obliczeń numerycznych,
- wykonywanie obliczeń symbolicznych,
- obliczenia rozkładu prawdopodobieństwa i funkcji statystycznych,
- tworzenie wykresów funkcji jednej i dwu zmiennych,
- programowanie obliczeń,
- korzystanie z jednostek i miar,
- tworzenie animacji,
- wymiana danych z innymi programami.

## PODSTAWOWE WIADOMOŚCI DOTYCZĄCE KONSTRUKCJI PRĘTOWEJ – KRATOWNICY

Kratownicą nazywamy układ złożony z prętów prostych połączonych ze sobą w węzłach (pozbawionych tarcia) przegubami, na które działają wyłącznie siły skupione. Z definicji tej wynika, że końce prętów mogą się względem siebie przemieszczać. Jednak w rzeczywistych konstrukcjach budowlanych połączenia prętów kratownic są realizowane w sposób odbiegający od tego założenia (kratownice stanowią dźwigary kratowe o sztywnych węzłach). Założenie to jednak znacznie upraszcza teorie kratownic i sposoby ich rozwiązywania, nie wprowadzając większych błędów.

Kratownice mogą być płaskie (wszystkie pręty i obciążenia leżą na jednej płaszczyźnie – rys. 1) lub przestrzenne.



Rys. 1. Przykład kratownicy płaskiej

### Geometryczna niezmienność i statyczna wyznaczalność kratownic

Rozwiązanie kratownicy sprowadza się do wyznaczenia reakcji powstających w punktach podparcia oraz sił rozciągających i ściskających poszczególne pręty. Przystępując do rozwiązania kratownicy na początku należy sprawdzić warunek konieczny statycznej (wewnętrznej) wyznaczalności, który ma postać:

$$p = 2w - 3$$

Stopień statycznej niewyznaczalności kratownicy można wyznaczyć ze wzoru:

$$p = 2w - r$$

gdzie:  $w$  – liczba węzłów kratownicy,  
 $p$  – liczba prętów kratownicy,  
 $r$  – liczba reakcji podporowych.

Jeżeli  $p > 2w - r$  kratownica ma większą liczbę prętów niż to jest konieczne dla jej geometrycznej niezmienności i liczba niewiadomych jest większa niż liczba równań równowagi. Kratownica taka jest przesztywniona i statycznie niewyznaczalna. Jeżeli zaś  $p < 2w - r$ , to układ jest geometrycznie zmienny i nie może być stosowany w konstrukcjach budowlanych.

### Analityczne metody wyznaczania sił w prętach kratownicy

W celu wyznaczenia sił w prętach kratownicy najczęściej wykorzystuje się dwie metody:

- metoda równoważenia węzłów,
- metoda przekrojów (Rittera).

Metoda równoważenia węzłów polega na znalezieniu równań równowagi, dla każdego myślowo wyciętego węzła kratownicy. Przystępując do rozwiązania:

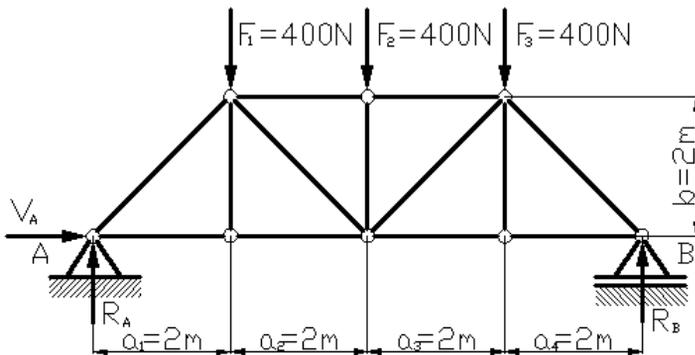
- z równań równowagi wyznaczamy składowe reakcji podpór  $\Sigma M_A = 0, \Sigma P_{ix} = 0, \Sigma P_{iy} = 0$ ;
- w poszczególnych wyciętych węzłach kratownicy zapisujemy dwa równania równowagi  $\Sigma P_{ix} = 0, \Sigma P_{iy} = 0$ ;
- z zapisanych równań równowagi wyznaczamy siły we wszystkich prętach kratownicy (rozwiązanie zaczynamy od węzła, w którym zbiegają się dwa pręty o nieznanymi siłach).

Metoda przekrojów polega na myślowym przecięciu kratownicy odpowiednim przekrojem na dwie części i wykorzystaniu warunków równowagi wszystkich sił działających na jedną z nich. Przystępując do wyznaczania sił w prętach kratownicy metodą przekrojów:

- z równań równowagi wyznaczamy składowe reakcji podpór  $\Sigma M_A = 0, \Sigma P_{ix} = 0, \Sigma P_{iy} = 0$ ;
- przecinamy kratownicę przez trzy pręty, w których chcemy określić siły wewnętrzne (pręty kratownicy nie mogą zbiegać się w jednym punkcie);
- jedną część kratownicy odrzucamy (najczęściej tą, na którą działa więcej sił zewnętrznych);
- dla odciętej części kratownicy zapisujemy równania sumy momentów wszystkich sił względem trzech punktów, w których przecinają się parami kierunki poszukiwanych sił w prętach.

## PRZYKŁAD ZASTOSOWANIA PROGRAMU MATHCAD

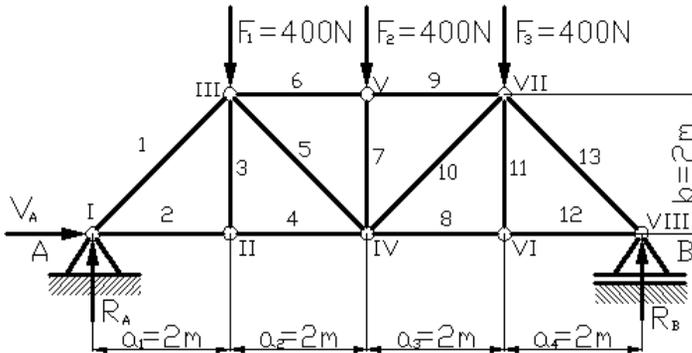
Poniżej przedstawiono przykładowe rozwiązanie zadania wykonanego w programie Mathcad. Przykład przedstawia obciążoną kratownicę płaską (rys. 2), dla której należy obliczyć składowe reakcji podpór (przegubowej stałej A i przesuwnej B) oraz siły wewnętrzne rozciągające i ściskające poszczególne pręty.



Rys. 2. Kratownica z zaznaczonymi obciążeniami

Poniżej podano kolejne fazy wykonywania działań przy rozwiązywaniu:

1. Numerowanie węzłów i prętów kratownicy (najczęściej węzły numerujemy liczbami rzymskimi a pręty arabskimi – rys. 3).



Rys. 3. Kratownica z zaznaczonymi obciążeniami i ponumerowanymi węzłami i prętami

2. Definiowanie zmiennych w programie Mathcad

- siły działające na poszczególne węzły kratownicy:

$$F_1 = 400 \text{ N} \quad F_2 = 400 \text{ N} \quad F_3 = 400 \text{ N}$$

- odległości przyłożenia tych sił od punktu A:

$$l_{F_1} = 2 \text{ m} \quad l_{F_2} = 4 \text{ m} \quad l_{F_3} = 4 \text{ m}$$

- odległości pomiędzy węzłami w poziomie (a) i w pionie (b):

$$a_1 = 2 \text{ m} \quad a_2 = 2 \text{ m} \quad a_3 = 2 \text{ m} \quad a_4 = 2 \text{ m} \quad b = 2 \text{ m}$$

- liczba prętów (p) oraz liczba węzłów (w) w kratownicy

$$p = 13 \quad w = 8$$

3. Sprawdzenie warunku koniecznego statycznej (wewnętrznej) wyznaczalności kratownicy płaskiej:

$$p = 2w - 3$$

$$p = 13$$

warunek jest spełniony.

Przystępując do rozwiązania przedstawionej na rysunku 2 i 3 kratownicy metodą równoważenia węzłów należy wyznaczyć reakcje podpór. W tym celu budujemy w programie Mathcad trzy układy równań z trzema niewiadomymi poprzedzając je napisem Given.

Given

$$\sum F_{ix} = 0 \quad V_A = 0$$

$$\sum F_{iy} = 0 \quad R_A - F_1 - F_2 - F_3 + R_B = 0$$

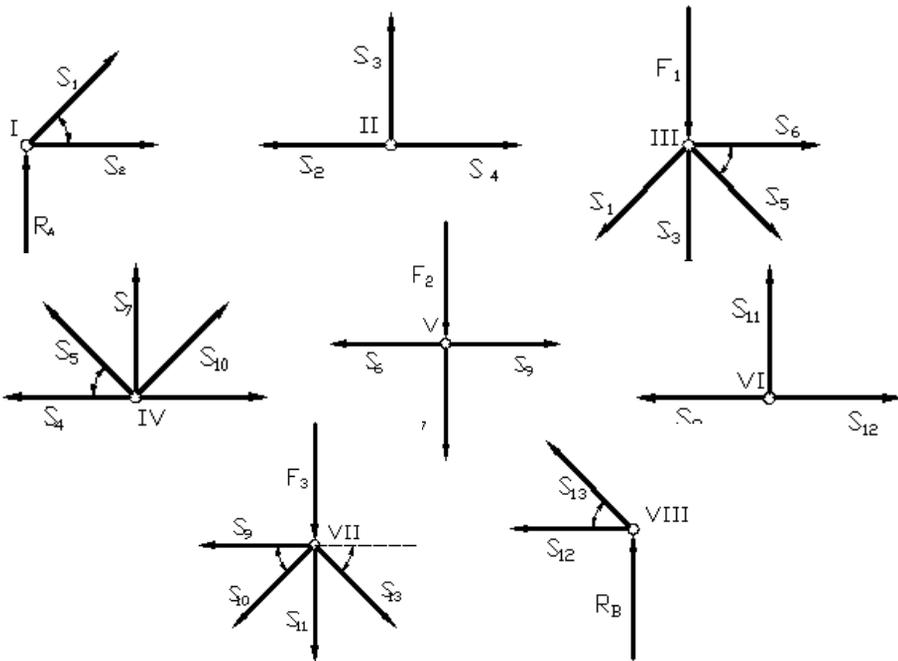
$$\sum M_{iA} = 0 \quad a_1 \cdot F_1 + \sum_{i=1}^2 [a_i(F_2)] + \sum_{i=1}^3 [a_i(F_3)] - \sum_{i=1}^4 (a_i \cdot R_B) = 0$$

Kolejnym etapem jest wyznaczenie sił w prętach kratownicy więc przechodzimy do myślowego wycinania poszczególnych węzłów (rys. 4). Dla każdego węzła definiujemy dwa równania w rozpoczętej powyżej procedurze Given. Zaczynamy od węzła I ponieważ w nim zbiegają się dwa pręty.

Przyjmując:

$$\sin \alpha := \frac{2}{\sqrt{8}} = 0.707$$

$$\cos \alpha := \frac{2}{\sqrt{8}} = 0.707$$



Rys. 4. Rozkład sił w poszczególnych węzłach kratownicy

<p>Węzeł I</p> $V_A + S_2 + 0.707 \cdot S_1 = 0$ $R_A + 0.707 \cdot S_1 = 0$	<p>Węzeł II</p> $-S_2 + S_4 = 0$ $S_3 = 0$	<p>Węzeł III</p> $S_6 + 0.707 \cdot S_5 - 0.707 \cdot S_1 = 0$ $-F_1 - S_3 - 0.707 \cdot S_5 - 0.707 \cdot S_1 = 0$
<p>Węzeł IV</p> $S_8 - S_4 + 0.707 \cdot S_{10} - 0.707 \cdot S_5 = 0$ $S_7 + 0.707 \cdot S_{10} + 0.707 \cdot S_5 = 0$	<p>Węzeł V</p> $S_9 - S_6 = 0$ $-F_2 - S_7 = 0$	<p>Węzeł VI</p> $S_{12} - S_8 = 0$ $S_{11} = 0$
<p>Węzeł VII</p> $-S_9 - 0.707 \cdot S_{10} + 0.707 \cdot S_{13} = 0$		

Po rozpatrzeniu wszystkich węzłów można wyznaczyć niewiadome z tych równań.

$$\text{Find}(V_A, R_A, R_B, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8, S_9, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 600N \\ 600N \\ -848.656N \\ 600N \\ 0 \\ 600N \\ 282.885N \\ -800N \\ -400N \\ 600N \\ -800N \\ 282.885N \\ 0 \\ 600N \\ -848.656N \end{pmatrix}$$

Pozostałe trzy równania zostały niewykorzystane ale mogą posłużyć jako sprawdzenie. Jedno równanie z węzła VII

$$-F_3 - S_{11} - 0.707 \cdot S_{13} - 0.707 \cdot S_{10} = 0$$

i dwa równania z węzła VIII

$$-S_{12} - 0.707 S_{13} = 0$$

$$R_B + 0.707 \cdot S_{13} = 0$$

Sprawdzenie:

$$-F_3 - S_{11} - 0.707 \cdot S_{13} - 0.707 \cdot S_{10} = 0$$

$$F_3 := -S_{11} - 0.707 \cdot S_{13} - 0.707 \cdot S_{10}$$

$$F_3 = 400$$

$$-S_{12} - 0.707 \cdot S_{13} = 0$$

$$S_{12} = 600$$

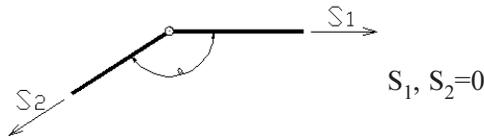
$$R_B + 0.707 \cdot S_{13} = 0$$

$$R_B = 600$$

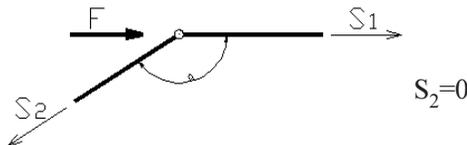
Na podstawie otrzymanych wyników można zauważyć, że część prętów jest rozciąganych a część ściskanych. Pręty, które są rozciągane ( $S_2, S_4, S_5, S_8, S_{10}, S_{12}$ ) mają wartości dodatnie natomiast ściskane ( $S_1, S_6, S_7, S_9, S_{13}$ ) wartości ujemne. Można również zauważyć, że niektóre pręty nie pracują czyli ich siły są równe zero, np. pręt  $S_3$  i  $S_{11}$ .

**Przykłady prętów zerowych:**

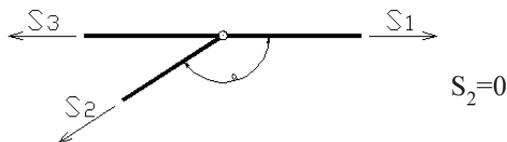
- 1) Jeżeli w nieobciążonym węźle kratownicy schodzą się 2 pręty pod pewnym kątem, to siły wewnętrzne w obu prętach są równe zero



- 2) Jeżeli w węźle kratownicy schodzą się 2 pręty i węzeł jest obciążony siłą zewnętrzną równoległą do jednego z nich, to siła wewnętrzne w drugim pręcie jest równa zero



- 3) Jeżeli w węźle kratownicy schodzą się 3 pręty, z których dwa są równoległe i węzeł jest nieobciążony, to siła w trzecim pręcie jest równa zero



Dla potwierdzenia otrzymanych wyników rozwiążemy powyższe zadanie metodą Rittera. Ponieważ powyżej zostały zdefiniowane poszczególne wielkości (tj. siły działające na węzły kratownicy, odległości przyłożenia tych sił od punktu A, odległości pomiędzy węzłami w poziomie i w pionie oraz liczba prętów i liczba węzłów) można przystąpić do wyznaczenia reakcji podpór. W celu wyznaczenia sił reakcji w podporach należy ułożyć cztery równania równowagi:

$$\Sigma P_{ix} = 0$$

$$\Sigma P_{iy} = 0$$

$$\Sigma M_{iA} = 0$$

$$\Sigma M_{iB} = 0$$

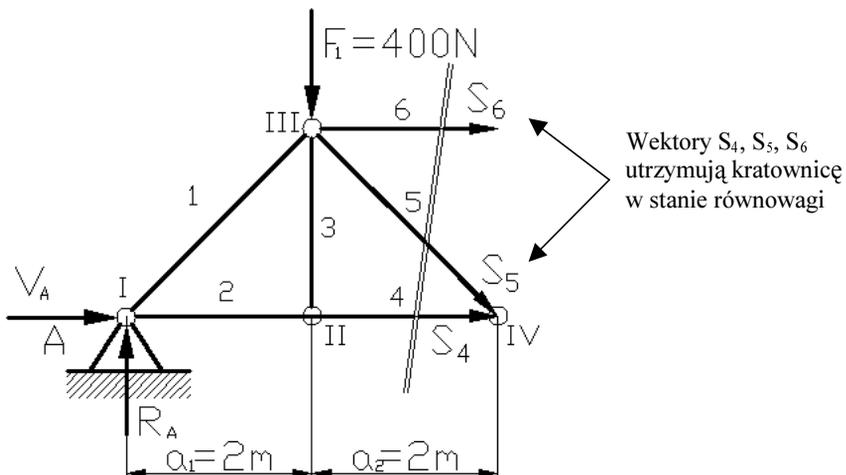
Dla podanego przykładu wystarczy dwa równania równowagi: suma rzutów wszystkich sił na oś x i suma momentów względem punktu A. Poprzedzamy je napisem Given.

Given

$$R_A - F_1 - F_2 - F_3 + R_B = 0$$

$$a_1 \cdot F_1 + \sum_{i=1}^2 [a_i(F_2)] + \sum_{i=1}^3 [a_i(F_3)] - \sum_{i=1}^4 (a_i \cdot R_B) = 0$$

Ponieważ metoda Rittera pozwala na wyznaczenie sił w trzech prętach kratownicy to wyznaczymy je w prętach 4, 5 i 6. W tym celu przecinamy kratownicę wyobraźną płaszczyzną przechodzącą przez pręty 4, 5, 6 i odrzucamy jej prawą część (rys. 5).



Rys. 5. Przecięta kratownica i odrzucona prawa strona

Dla odciętej części kratownicy należy zapisać równania sumy momentów wszystkich sił względem dwóch punktów (węzeł III i IV), w których przecinają się parami kierunki poszukiwanych sił w prętach oraz sumę sił na oś y. Równania należy zdefiniować w rozpoczętej procedurze Given:

$$\begin{aligned} \sum F_{iy} = 0 & \quad -F_1 - S_5 \cdot 0.707 + R_A = 0 \\ \sum M_{III} = 0 & \quad R_A \cdot a_1 - S_4 \cdot b = 0 \\ \sum M_{IV} = 0 & \quad S_6 \cdot b + \sum_{i=1}^2 [a_1(R_A)] - F_1 \cdot a_1 = 0 \end{aligned}$$

Po rozpatrzeniu wszystkich równań można wyznaczyć niewiadome:

$$\text{Find}(R_A, R_B, S_4, S_5, S_6) \rightarrow \begin{pmatrix} 600N \\ 600N \\ 600N \\ 282.885N \\ -800N \end{pmatrix}$$

Jak widać w pierwszym i drugim przypadku otrzymano te same wartości szukanych zmiennych. Świadczy to o poprawności rozwiązania zadania.

## PODSUMOWANIE

Możliwości obliczeniowe programu Mathcad możemy wykorzystać w codziennej pracy, która wymaga częstego i powtarzalnego stosowania mniej lub bardziej zaawansowanych obliczeń matematycznych.

Omówione w pracy możliwości wykorzystania programu Mathcad mogą w znacznym stopniu ułatwić, usprawnić i przyspieszyć rozwiązywanie zagadnień inżynierskich nie tylko z mechaniki technicznej i wytrzymałości materiałów ale również z innych dziedzin tj. matematyki, fizyki, elektroniki, elektrotechniki czy też mechatroniki. Automatyzacja skomplikowanych obliczeń, z jakimi spotykają się inżynierowie, pomaga uniknąć błędów przy jednoczesnym zmniejszeniu czasu obliczeń, co z kolei przekłada się na jakość i rentowność projektu.

## LITERATURA

1. Bodnar A.: Wytrzymałość Materiałów. Podręcznik dla studentów wyższych szkół technicznych. Kraków 2004.
2. Jakubowski K.: Mathcad 2000 Profesional. Wydawnictwo Exit.
3. Kucharski T.: Mechanika ogólna. Rozwiązywanie zagadnień z MATHCAD-em. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne. Warszawa 2002.
4. Leyko J., Szmelter J.: Zbiór zadań z mechaniki ogólnej. Tom 1. Statyka. Państwowe wydawnictwo Naukowe. Warszawa 1983.
5. Misiak J.: Mechanika ogólna. Zadania z mechaniki ogólnej. Cz. 1. Statyka. Wydawnictwo Naukowo Techniczne. Warszawa 1992.
6. Niezgodziński M., Niezgodziński T.: Zadania z wytrzymałości materiałów. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne. Warszawa.
7. Pietraszek J.: Mathcad. Ćwiczenia. Wydawnictwo Helion. Gliwice 2002.
8. Siuta W.: Mechanika techniczna. Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne. Warszawa 1993.
9. Wolny S., Siemieniec A.: Wytrzymałość materiałów. Teoria. Zastosowanie. Uczelniane Wydawnictwa Naukowo-Dydaktyczne. Kraków 2002.

## USING PROGRAM MATHCAD FOR SOLVING PROBLEMS OF ENGINEERING FOR THE EXAMPLE CONSTRUCTION TRUSS

### Summary

The article presents the possibility of using program Mathcad to solve selected problems from the set of tasks with the mechanics of technical and material strength. An example of determining the forces in the bars and the reactions of the supports in truss structures (plane truss) method Ritter and method of balancing nodes. It was noted that this tool greatly simplifies the process of solving problems and can quickly analyze the behavior of a structure with different loads.

**Keywords:** Mathcad, technical mechanics, trusses, engineering calculations.